ریاضی برائے جماعت دہم

MATHEMATICS FOR 10th CLASS

مشیرِ اعلیٰ

شریمتی چترا راماچندرن، آئی۔اے۔ایس
اسپیشل چیف سیکریٹری، محکمہ تعلیمات، تلنگانہ

مدیرِ اعلیٰ

ڈاکٹر ایچ۔کے۔دیوان
تعلیمی مشیر، ودیا بھون سوسائٹی، راجستھان

کمیٹی برائے فروغ و اشاعت درسی کتاب

شریمتی اے۔سری دیوا سینا آئی۔اے۔ایس
ڈائرکٹر محکمہ اسکولی تعلیم، تلنگانہ، حیدرآباد

شری اے۔کرشنا راؤ
ڈائرکٹر، اوپن اسکول سوسائٹی،
تلنگانہ، حیدرآباد

شری ایس۔وینکٹیشورا شرما
ڈائرکٹر، گورنمنٹ ٹکسٹ بک پریس،
تلنگانہ، حیدرآباد

کوآرڈینیشن اور کوآپریشن

شری ماراسانی سومی ریڈی
جوائنٹ ڈائرکٹر
اوپن اسکول سوسائٹی، تلنگانہ، حیدرآباد

شری بوئین پلی وینکیشورا راؤ
اسٹیٹ کوآرڈینیٹر
اوپن اسکول سوسائٹی، تلنگانہ، حیدرآباد

قانون کا احترام کریں
حقوق حاصل کریں

ناشر
اوپن اسکول سوسائٹی
تلنگانہ، حیدرآباد

تعلیم سے آگے بڑھیں
عاجزی وانکساری کا اظہار کریں

First Published 2021

This Book has been printed on 70 G.S.M. Maplitho
Title Page 200 G.S.M. White Art Card

Open School Society, Telangana - 2021-22

Printed in India
at the Telangana Govt.Text Book Press,
Mint Compound, Hyderabad,
Telangana.

سارے جہاں سے اچھا

- علامہ اقبالؔ

سارے جہاں سے اچھا ہندوستاں ہمارا
ہم بلبلیں ہیں اس کی یہ گلستاں ہمارا
پربت وہ سب سے اونچا ہمسایہ آسماں کا
وہ سنتری ہمارا وہ پاسباں ہمارا
گودی میں کھیلتی ہیں اس کی ہزاروں ندیاں
گلشن ہے جن کے دم سے رشک جناں ہمارا
اے آب رود گنگا وہ دن ہے یاد تجھ کو
اترا ترے کنارے جب کارواں ہمارا
مذہب نہیں سکھاتا آپس میں بیر رکھنا
ہندی ہیں ہم وطن ہے ہندوستاں ہمارا

قومی ترانہ

- رابندرناتھ ٹیگور

جن گن من ادھی نایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
پنجاب، سندھ، گجرات، مراٹھا، ڈراوڑ، اتکل، ونگا
وندھیا، ہماچل، یمنا، گنگا، اُچ چھل جل دھی ترنگا
تواشبھ نامے جاگے، تواشبھ آشش ماگے
گاہے تو جیا گاتھا
جن گن منگل دایک جیا ہے
بھارت بھاگیہ ودھاتا
جیا ہے، جیا ہے، جیا ہے
جیا جیا جیا جیا ہے

عہد

-پدامری ویکنٹا سباراؤ

ہندوستان میرا وطن ہے۔ مجھے اپنے وطن سے پیار ہے۔ تمام ہندوستانی میرے بھائی اور بہن ہیں اور میں اس کے عظیم اور گوناگوں ورثے پر فخر کرتا ہوں/کرتی ہوں۔ میں ہمیشہ اس ورثے کے قابل بننے کی کوشش کرتا رہوں گا/کرتی رہوں گی۔ اپنے والدین، استادوں اور بزرگوں کی عزت کروں گا/کروں گی اور ہر ایک کے ساتھ خوش اخلاقی کا برتاؤ کروں گا/کروں گی۔ میں جانوروں کے تئیں رحم دلی کا برتاؤ رکھوں گا/رکھوں گی۔ میں اپنے وطن اور ہم وطنوں کی خدمت کے لیے اپنے آپ کو وقف کرنے کا عہد کرتا ہوں/کرتی ہوں۔

پیش لفظ

تعلیم ایک روشن خیال تجربہ ہوتا ہے۔تعلیم سے ہی ہمارے اطراف موجود دنیا کو سمجھنے میں مدد ملتی ہے اور یہ بہتر معلومات حاصل کرنے کا موقع فراہم کرتی ہے۔تعلیم مستقبل کے پاسپورٹ کی طرح ہے کیونکہ کل اُن لوگوں کا ہے جو آج اس کی تیاری کرتے ہیں۔

تعلیم کی اہمیت کو سمجھنا تمام ترقی پسند معاشرے کے لئے ضروری ہے تاکہ سب کو مضبوط عزم کے ساتھ ابتدائی تعلیم فراہم کی جائے اس کے تسلسل کے حصے کے طور پر ثانوی تعلیم کی عالمگیریت کو تسلیم کیا گیا ہے۔

تعلیم اتفاقی طور پر حاصل نہیں ہوتی ہے اس کے لئے سخت جدوجہد اور بھرپور کوشش کرنی پڑتی ہے ان سب کو مدنظر رکھتے ہوئے تمام طلباء کو کوالٹی ایجوکیشن فراہم کرنے کے لئے اوپن اسکول سوسائٹی کا قیام عمل میں آیا۔اس سوسائٹی کا خاص مقصد ''تعلیم آپ کی دہلیز پر''، تعلیم میں ریاضی، ذہنی ڈسپلن کو بنانے میں کلیدی کردار ادا کرتا ہے اور یہ منطقی استدلال اور مضبوط سوچ کی حوصلہ افزائی کرتا ہے۔مزید کہ ریاضی اسکول کے دوسرے مضامین جیسے سائنس، سماجی علوم اور اس کے علاوہ میوزک اور آرٹ کے مواد کو سمجھنے میں ایک اہم رول ادا کرتا ہے۔

ریاضی انسانی دماغ میں تجسس اور منطقی استدلال کی بنیاد پر فروغ پاتا ہے، ریاضی کے لئے بچوں کی صلاحیتوں کو فروغ دینا، ریاضی کی تعلیم کا اہم مقصد ہوتا ہے۔درسی کتاب کے تصورات کو طلباء اپنی روزمرہ زندگی سے مربوط کرنا ہوگا ورنہ علم صرف ایک معلوماتی سطح تک محدود ہو جائے گا۔لہٰذا یہ درسی کتاب سیکھنے والوں کو قدرت اور ماحول کے مطابق اپنے تجربات کو ترتیب دینے کے قابل بناتی ہے اور یہ تمام طلباء کو موقع فراہم کرتی ہے۔نئی تعلیمی پالیسی 2020 کے مطابق اس کا بنیادی مقصد بچوں کی جامع نشوونما ہے اور یہ درسی کتاب بچوں کی حوصلہ افزائی کرتی ہے اور انہیں ایک ایسا موقع فراہم کرتی ہے کہ وہ اپنے آپ کو ہنرمند (ہندوستانی) بھارتی بنائیں۔

یہ درسی کتاب مختلف علاقوں کے ابواب پر مشتمل ہے جیسے عددی نظام، الجبراء، جیومٹری، مساحت، حساب، علم مثلث اور شماریات۔ ان متعلقہ علاقوں سے مطالعہ کئے گئے تصورات بہ لحاظ مختلف تعلیمی معیارات جیسے مسئلہ کا حل، استدلال اور ثبوت، ریاضیاتی اظہار، ربط اور بصارت اور نمائندگی کی مدد سے متوقع اکتسابی نتائج حاصل ہوں گے اور ان متوقع اکتسابی نتائج کو حاصل کرنا نصاب کا حتمی مقصد ہے۔

میں مصنّفین، ادارتی بورڈ کے ممبران، کوآرڈینیٹر، ڈیزائنرس اور DTP آپریٹرس کی کاوشوں کا شکرگزار ہوں۔ میں خصوصی شکریہ ادا کرتا ہوں **شریمتی چترا رامچندرن** آئی۔اے۔ایس اسپیشل چیف سکریٹری آف ایجوکیشن کا۔انہوں نے نئی درسی کتاب کی تیاری میں ہماری حوصلہ افزائی اور رہنمائی کی ہے۔ میں **شریمتی سبیتا اندرا ریڈی** عزت مآب وزیر تعلیم کا ممنون ہوں کہ انہوں نے کتاب کی تیاری میں ہماری ہمت افزائی اور رہنمائی کی ہے۔میں درسی کتاب کی کامیاب تکمیل کے لئے مصنّفین، ادارتی بورڈ، ڈیزائنرس، سبجیکٹ کوآرڈینیٹر اور اوپن اسکول سوسائٹی کے عملہ کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں ان کے آپسی تعاون اور تبادلہ خیال کے ساتھ درسی کتاب کی تدوین عمل میں آئی ہے۔

میں امید کرتا ہوں کہ یہ درسی کتاب طلباء کے لئے مفید ہوگی اور ریاضی میں ان کے معیار کو بہتر بنانے میں معاون و مددگار ثابت ہوگی۔ہم اپنے کاز کے معیار کو مستقل طور پر بہتر بنانے کے ضمن میں آپ کے تبصروں اور مشوروں کا خیر مقدم کرتے ہیں۔

تاریخ: 24-12-2020

مقام: حیدرآباد

سری اے۔کرشنا راؤ

ڈائرکٹر

اوپن اسکول سوسائٹی تلنگانہ، حیدرآباد

طلباء کے لئے ہدایات

- درسی کتاب کے تصورات کی بہتر تفہیم کے لئے تصویریں رخاکے راشکال دئے گئے ہیں ان کو حالات سے جوڑا گیا ہے۔تصورات کو بہتر طور پر سمجھنے کے لئے انہیں غور سے پڑھئے۔
- تصورات کی تفہیم کے لئے مشغلوں میں حصہ لینے کے دوران پیدا ہونے والے شک وشبہات کا ازالہ آپ اپنے معلم سے فوراً کرلیں۔
- ''اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے'' کے تحت دئے گئے سوالات کا مقصد کسی تصور کو سیکھنے کے فوراً بعد انہیں حل کرتے ہوئے اپنی قابلیت کی جانچ کرنا ہے۔
- ''مثالیں اور مشاغل'' آپ کے خیالات اور افکار کو ابھارنے کے لئے ہر باب میں مواد مہیا کیا گیا ہے۔اس کے پیچھے بھی ایک منطق ہے جو تصوراتی تفہیم میں آپ کے لئے مدد ومعاون ثابت ہوگا۔
- ''سوچئے۔تبادلہ خیال کیجئے اور کچھ سرگرمیاں رمشاغل'' کے تحت دئے گئے سوالات کی مدد سے اپنی تجزیاتی قابلیت کو جانچئے۔یہ آپ کی سوچ کو ابھارنے کے عمل میں مددگار ہوتے ہیں۔
- ایک خاص سطح کے تصور کو سیکھنے کے لئے ہر باب کے ختم پر مشقیں دی گئی ہیں۔خود سے ان سوالات کو حل کرنے کی کوشش کیجئے۔گائیڈس یا دیگر ذرائع سے نقل کرنے کی کوشش نہ کریں۔
- جدولوں میں خالی جگہوں کو چھوڑا گیا ہے تاکہ آپ اپنے جواب کا اندراج کرسکیں۔آپ اپنی درسی کتاب میں جوابات کا اندراج خالی جگہوں کو پر کرکے کرسکتے ہیں۔
- ہر ایک طالب علم کو ہفتہ واری کام مختصر کیا گیا ہے اسے وقت پر مکمل کرنا چاہئے اسے آگے کے لئے نہیں چھوڑنا چاہئے ورنہ بعد میں آپ کو یہ بوجھ محسوس ہوگا۔
- آپ نے جو سیکھا ہے اس تصور کی بنیاد پر مزید معلومات اکٹھا کرنے کی کوشش کریں۔ایسے ہی کچھ سوالات اکٹھا کریں انسٹرکٹر رمعلم اور اپنے ساتھیوں کی مدد سے انہیں حل کرنے کی کوشش کریں۔
- آپ نے جس تصور کو سیکھا ہے اس کو دوسرے مضامین سے جوڑنے کی کوشش کریں اور کمرۂ جماعت سے باہر کے حالات رروزمرہ زندگی سے مربوط کرنے کی کوشش کریں۔
- نصاب کی بنیاد پر درسی کتاب کے ابتدائی صفحات پر تعلیمی معیارات کو بیان کیا گیا ہے۔اس ضمن میں آپ کو اپنی صلاحیتوں اور قابلیت کے لحاظ سے تعلیمی معیارات پر کھرے اترنا چاہئے۔ثانوی تعلیم کی سطح پر تعلیمی معیارات جیسے (1) مسئلہ کا حل،(2) استدلال اور ثبوت،(3) ریاضیاتی اظہار،(4) ربط،(5) بصارت اور نمائندگی پر متوقع اکتسابی نتائج فراہم کئے گئے ہیں۔
- نصاب کی توقعات کے مطابق مشقی سوالات کو مختلف تعلیمی معیارات کے ذریعہ حل کیجئے۔بیان کئے گئے تعلیمی معیارات کے مطابق متوقع اکتسابی نتائج کو حاصل کرنے کی کوشش کریں۔
- کچھ عنوانات اگرچہ امتحان کے لئے مختص نہیں ہیں مگر وہ حقیقی تصور کو سمجھنے میں مدد ومعاون ثابت ہوتے ہیں۔اس لئے بنیادی نظریات پر توجہ دیں اور تصوراتی اکتساب سیکھنے سے پہلے انہیں اچھی طرح سے سمجھیں۔
- مسئلئے،ضابطے اور تعریفات کو حفظ کرنے کے بجائے ان کے جز اطلاق پر توجہ دیں اور ایک جیسے نظریات کی مدد سے سوالات کو حل کریں۔
- آپ کی ریاضی کی درسی کتاب مختلف علاقوں پر مشتمل ہے جیسے عددی نظام،جیومٹری،مساحت،حساب،علم مثلث اور شماریات۔ان باب پر عبور حاصل کریں تاکہ یہ آپ کی اعلیٰ تعلیم اور مسابقتی امتحانات میں مددگار ثابت ہوں گے۔ل
- ایک سوال کو حل کرنے کے لئے مختلف طریقے دوسری کتابوں،انٹرنیٹ،فورمس کے ذریعہ معلوم کریں تاکہ ان تصورات کو بہتر طور پر سمجھ سکیں۔

ہماری نیک خواہشات کے ساتھ

انسٹرکٹرس کے لئے ہدایات

- طلباء کی رہنمائی کرنے سے قبل ریاضی کی درسی کتاب کے ہر ایک تصور کی تفہیم کو فروغ دیں۔
- درسی کتاب میں پیش لفظ، طلباء کے لئے ہدایات، تعلیمی معیارات، نصابی توقعات اور متوقع اکتسابی نتائج کو بیان کیا گیا ہے۔ ان چیزوں کا بغور مطالعہ کیجئے اور جانئے اس سطح پر ریاضی کی تدریس کا اہم مقصد کیا ہے۔
- طلباء سے کہیں وہ ''طلباء کے لئے ہدایات'' کو پڑھیں۔ ان کے ساتھ آپ بھی پڑھیں اور جانیں ''طلباء کو کیا کرنا ہے'' اس کے مطابق ان کی رہبری و رہنمائی کریں۔
- اس درسی کتاب کو اسباق کی تکمیل کے سلسلے میں تیار نہیں کیا گیا ہے اور نہ ہی امتحان میں نتیجہ حاصل کرنے کے لئے بلکہ اس درسی کتاب کو متوقع اکتسابی نتائج حاصل کرنے کے لئے بنایا گیا ہے جیسا کہ یہ اس کا اہم مقصد ہے۔ آپ تعلیمی معیارات او رمتوقع اکتسابی نتائج کو پڑھ کر اس درسی کتاب کے اکتسابی مقاصد کو سمجھ سکتے ہیں۔
- آیئے خلاصہ کریں'' اس عنوان کے ساتھ اسباق کے آخر میں جو اہم تصورات بیان کئے گئے ہیں اس طرح متوقع اکتسابی نتائج کو حاصل کرنے کے لئے مشاغل اور مشقیں دیئے گئے ہیں مشق کرنے کے لئے۔
- درسی کتاب میں اسباق کے یونٹ ڈھانچے کو سمجھیں اور طلباء کو بھی اسی ترتیب میں سمجھایئے۔
- ٹریننگ سنٹر کے کانٹاکٹ کلاسس کی کل تعداد کے لحاظ سے شیڈولڈ کے مطابق اسباق کو تقسیم کریں اور طلباء سے تبادلہ خیال کریں۔
- طلبا نہ صرف تصورات کو سمجھیں بلکہ خود ہی مشقی سوالات کو حل کرسکیں۔
- طلباء کی اس طرح تربیت کریں کہ وہ ''اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے'' اور ''اکتسابی نتائج کے لئے مشق'' کے تحت دئے گئے سوالات کے جوابات خود ہی لکھ سکیں۔ سمجھائیں کہ بلاک بورڈ پر جوابات کیسے لکھیں۔ انہیں کلیدی تصورات کی وضاحت کے قابل بنائیں۔
- ہر طالب علم کو گراف بنانے، بناوٹ اور جدول کی تیاری سکھائیں۔
- طلباء میں تصورات کی بہتر تفہیم کے لئے انہیں بتایئے کہ ریگولر درسی کتابیں جماعت ششم تا جماعت دہم کا بھی مطالعہ کریں۔
- طلباء سے کہیں مشقی سوالات کو الگ ایک نوٹ بک میں حل کریں۔ ان کے جوابات کے مشاہدے کے بعد انہیں اپنے مشورے دیں۔
- طلباء کو آن لائن سیکھنے کی سہولیات کو استعمال کرنے کے قابل بنائیں اور ان کی رہنمائی کریں۔
- امتحان میں سوالات براہ راست درسی کتاب کے مشق سے نہیں دئے جاتے ہیں۔ لہٰذا انہیں خود ہی درسی کتاب سے ہٹ کر اسی ماڈل کے سوالات کے جوابات لکھنے کے قابل بنائیں۔

تعلیمی معیارات' دسویں جماعت کی درسی کتاب کے ذریعہ حصول طلب استعداد

تعلیمی معیارات

طلباء کیا جاننا چاہتے ہیں اوران پر عمل کرنے کے قابل ہوں' اس کے بارے میں تعلیمی معیارات واضح بیانات ہوتے ہیں۔اس بنیاد پر ذیل کے تعلیمی معیارات کی درجہ بندی کی گئی ہے:

I. مسئلہ کا حل

طریقۂ عمل اور تصورات کو استعمال کرتے ہوئے ریاضیاتی مسائل کو حل کرنا۔

a. مسائل کے اقسام

مسائل مختلف صورتوں میں ہوسکتے ہیں جیسے معمۂ عبارتی سوالات' تصویری اظہار پر مبنی سوالات' مختلف طریقوں کی بناپر سوالات' معطیات' جدول اور ترسیمات وغیرہ۔

b. مسئلہ کو حل کرنا

- مسئلہ کو پڑھنا
- معلومات رڈیٹا کے تمام حصوں کی شناخت کرنا۔
- کون سا خیال یا تصور شامل ہے اس کی تفہیم کرنا۔
- متعلقہ طریقہ اعمال (مفروضات) ضابطوں وغیرہ کو دہرانا۔
- طریقۂ عمل کا انتخاب کرنا۔
- مسئلہ کو حل کرنا۔
- مسئلہ پر مبنی عبارتی سوالات اور ان کے جوابات کی جانچ کرنا۔

c. پیچیدگی

سوال کی پیچیدگی اس پر منحصر ہوتی ہے:

- تعلق پیدا کرنا (ربط کے سیکشن میں اس کی تعریف کی گئی ہے)
- اقدامات کی تعداد
- مراحل کی تعداد
- عبارتی سوالات کو سلجھانا
- طریقۂ عمل کی نوعیت

II. استدلالی ثبوت

- مختلف مراحل کے درمیان وجوہات بتلانا (مختلف مفروضات کی بناپر)
- ریاضیاتی کلیات (ضابطے) اور مفروضات کو بتانا اور سمجھنا
- طریقۂ عمل کی جانچ اور تفہیم
- منطقی بحث کی جانچ حصول ثبوت کا فہم
- استقرائی اور استخراجی طریقہ کا استعمال
- ریاضی کے کلیات کی جانچ

III. اظہار

- ریاضی کے اعداد کے نظام کو لکھنا' پڑھنا اور ان کا اظہار (عبارتی وعلامتی شکل میں)

مثلاً $3 + 4 = 7$؛ $3 \neq 5$، $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^0 وغیرہ

- ریاضیاتی عبارتوں کی تشکیل

- ریاضیاتی خیالات کو اپنے الفاظ میں بیان کرنا جیسے مربع ایک بند شکل ہوتی ہے جس کے چار ضلعے اور چار زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ریاضیاتی طریقوں کی تشریح جیسے دو ہندسی اعداد کی جمع میں پہلے اکائی کے مقام کے ہندسوں کو جمع کرنا' مابعد دہائی کے مقام کے ہندسوں کو حاصل کو مدنظر رکھتے ہوئے۔
- ریاضیاتی منطق کی تشریح

IV. ربط

- ریاضیاتی علاقے کے تصورات میں ربط پیدا کرنا مثلاً جمع کو ضرب سے' کل حصوں کو نسبت سے' اور تقسیم سے' نقش و نگار نمونے میں اور تشاکل' پیمائشات اور فاصلے میں وغیرہ۔
- روزمرہ زندگی سے تعلق پیدا کرنا۔
- ریاضی سے دوسرے مضامین میں ربط پیدا کرنا۔
- مختلف ریاضیاتی (Domains) علاقوں کے تصورات میں ربط پیدا کرنا' جیسے معطیات کا اظہار اور حساب اور ان کا عمل۔
- تصورات کو مختلف طریقوں سے مربوط کرنا۔

V. نمائندگی

- جدول کے معطیات' عددی خط' تصویری ترسیم' بار گراف' 2D اشکال' 3D اشکال' تصاویر اور خاکوں کو پڑھنا اور ان کی تشریح کرنا۔
- جدول' عددی خط' تصویری گراف' بار گراف اور تصاویر کو ظاہر کرنا ریاضیاتی علامتیں اور اشکال کا اظہار۔

حصول اکتساب (Learning Outcomes)

اعداد کا نظام

- بنیادی اجزائے ضربی کے طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے طلباء دیئے گئے اعداد کا LCM (ذ۔ا۔م) اور H.C.F (ع۔ا۔م) معلوم کرسکتے ہیں۔(PS)
- ناطق اعداد و غیر ناطق اعداد پر مبنی سوالات کو حل کرسکتے ہیں۔(PS)
- روزمرہ زندگی سے حقیقی اعداد کے نظام کو مربوط کرسکتے ہیں تاکہ مسائل حل ہوں۔(Con)
- دو ناطق اعداد کے درمیان پائے جانے والے ناطق اعداد معلوم کرسکتے ہیں۔(PS)
- ناطق اور غیر ناطق اعداد کے فرق کو سمجھیں گے۔(R-P) ناطق اور غیر ناطق اعداد کی مثالیں دیں گے۔(Con)
- تکبیری طریقہ کار استعمال کرتے ہوئے عددی خط پر تکراری اور غیر تکراری اعشاری اعداد کو ظاہر کریں گے۔(R-V)

الجبراء

- کثیر رکنیوں پر مبنی سوالات کو حل کرسکیں گے (متغیر معلوم کریں گے' کثیر رکنی کے صفر' کثیر رکنی کی تقسیم اور رشتے معلوم کریں گے)(P.S)
- الجبرائی خصوصیات کی شناخت(R-P)
- کثیر رکنیوں کو ایک رکنی اور دو رکنی عبارتوں کی اساس پر مثالیں دیں گے۔(Con)
- دو درجی مساوات اور خطی مساوات دو متغیرات پر مبنی کے متعلق سوالات کو حل کرسکیں گے۔(PS)
- دو درجی مساوات اور خطی مساوات پر مبنی حل کی جانچ کرسکیں گے۔(R-P)
- روزمرہ زندگی کے مسائل کو دو درجی مساوات اور خطی مساوات سے مربوط کرسکیں گے اور حل کریں گے۔(Con)
- دو متغیرات پر مبنی خطی مساوات کے سوالات کے حل گراف پیپر پر اظہار(R-V)
- دو درجی مساوات کے حل کی وجوہات بیان کرسکیں گے۔(R-P)
- دیئے گئے اعداد کے سلسلے میں عام رکن معلوم کرسکیں گے۔(PS)

جیومٹری

- خطی جوڑ پر مبنی سوالات حل کریں گے۔ مثلثات کی متماثلت' مساوی مثلثات(PS)
- قاطع خطوط اور متوازی خطوط کے درمیان فرق(R-P)
- روزمرہ کے تجربہ کی بنا پر مفروضات کا اظہار کرنا۔(Con)
- مختلف زاویوں کی شناخت' مثلثات کی متماثلت(Con)

- مثلثات کے متماثلات (SAS, ASA, SSS, RHS) کی جانچ (R-P)
- مثلثات کی متماثلت اور مساوی مثلثات کے فرق کو سمجھنا (Con)
- جیومٹری اشکال میں استعمال کئے جانے والے اقدامات کو سمجھنا (R-P)
- دی گئی پیمائش کی بنیاد پر جیومٹری شکل کی تیاری (R-V)
- دائرہ کے Tangents اور Secants میں فرق کو سمجھنا (R-P)
- دیئے گئے مستوی میں دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا (PS)
- خطی قطعہ کا درمیانی نقطہ معلوم کرنا' نقطۂ تثلیث معلوم کرنا' خط کا Slope معلوم کرنا (PS)

مساحت

- سطح کے رقبوں پر سوالات' کوئی دو کو یکجا کرتے ہوئے حجم پر سوالات (PS)
- ایک ٹھوس دھاتی جسم کو دوسری شکل سے جوڑ کر ان کا رقبہ' حجم' معلوم کرنا اور اس کی وجہ معلوم کرنا۔ (R-P)
- دیئے گئے ضابطوں کے ارکان کو سمجھانا جیسے رقبہ' حجم اور دوسری ٹھوس اجسام کے رقبے اور حجم وغیرہ۔ (Con)
- مساحت کے سوالات کے حل میں جیومٹری' الجبراء اور علم حساب کے اصولوں کو استعمال کرنا۔ (Com)
- دیئے گئے اشکال کو اتارنا' ان کے جوڑ بنانا وغیرہ۔ (R-V)

علم حساب

- دی گئی نسبتوں کے استعمال سے مرکب نسبت معلوم کرنا (P.S)
- مرکب نسبت پر مبنی سوالات کو حل کرنا' اسی طرح نفع ونقصان' خرچ' فیصدی' ڈسکاؤنٹ' ٹیکس پر مبنی سوالات حل کرنا۔ (P.S)
- سود مفرد اور سود مرکب پر مبنی سوالات حل کرنا' اسی طرح راست رمعکوس نسبت' وقت اور کام۔ وقت اور فاصلہ پر مبنی سوالات حل کرنا وغیرہ۔ (RP)
- سود مفرد اور سود مرکب میں فرق کو سمجھنا (RP)
- نسبت اور فیصد کا علامتی اظہار (Com)
- ضابطہ کی مدد سے نفع' نقصان' نفع فیصدی' نقصان فیصدی' ڈسکاؤنٹ سود مفرد پر مبنی سوالات حل کرنا
- راست تناسب اور معکوس تناسب کا روزمرہ زندگی میں استعمال کرتے ہوئے مسائل کا حل کرنا۔ (Com)

علم مثلث

- 0^0 تا 90^0 کے زاویوں کے علم مثلث کی نسبتوں پر مبنی سوالات حل کرسکیں گے اور علم مثلث کے متماثلات پر مبنی سوالات بھی حل کریں گے۔ (PS)
- 0^0 تا 90^0 کے درمیان علم مثلث کی نسبتوں کی وجوہات ظاہر کریں گے اور دیئے گئے مثلث کے طول کو بھی ظاہر کریں گے۔ (R-P)
- علم مثلث کی نسبتوں کی عمومیت کریں گے اور ان کی جانچ کریں گے۔ (R-P)
- اصطلاحات وتر' مقابل کا ضلع' متصلہ ضلع' Sive' Cosive' Tangent کی وضاحت کرسکیں گے۔
- علم مثلث کے نسبتوں کے سوالات حل کرنے میں الجبرائی طریقہ کار کا استعمال کرسکیں گے
- 0^0 تا 90^0 علم مثلث کے نسبتوں کا جدول تیار کرسکیں گے۔ (R-P)

شماریات

- دیئے گئے معطیات سے مختلف طریقوں سے اوسط' وسطانیہ اور بہتاتیہ معلوم کرسکیں گے۔ (PS)
- دیئے گئے معطیات سے اوسط' وسطانیہ' بہتاتیہ کا تخمینہ لگائیں گے اور وجوہات دے سکیں گے۔ (R-P)
- ان کے حدود کا تخمینہ کرسکیں گے۔ (R-P)
- گروہی معطیات' غیر گروہی معطیات' اوسط' وسطانیہ اور بہتاتیہ کی تعریف کرسکیں گے۔ (Com)
- دیئے گئے معطیات کو Cummulative Table میں ظاہر کرسکیں گے۔ (R-V)
- ضابطوں میں دیئے گئے Terms کو سمجھا سکیں گے۔ (Com)
- دیئے گئے معطیات کو گراف کی شکل میں ظاہر کرسکیں گے۔ (R-V)

عنوان

اکائی
1

عددی نظام
(حقیقی اعداد کا تعارف)

سبق
1.1

طبعی اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد

Natural numbers,Whole numbers and Integers

1.1.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- طبعی اعداد، مکمل اعداد، صحیح اعداد، ناطق اعداد، غیر ناطق اعداد اور حقیقی اعداد کی ضرورت و اہمیت سمجھ سکیں۔
- طبعی اعداد کی خصوصیات کو جان سکیں۔
- صفر کی خصوصیات کی وضاحت کر سکیں۔
- صحیح اعداد کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- چاروں بنیادی اعمال کو شامل کرتے ہوئے صحیح اعداد پر مسئلوں کو حل کر سکیں۔
- جفت۔طاق اعداد، اجزائے ضربی۔اضعاف، مفرد۔مرکب اعداد، مربع ومکعب اعداد۔کامل اعداد کی شناخت اور فرق کر سکیں اور بوڈماس (BODMAS) قاعدہ کا اطلاق کر سکیں۔
- ناطق اعداد پر چاروں بنیادی اعمال (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کو انجام دے سکیں۔
- ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کر سکیں۔
- دیئے گئے ناطق عدد کی معادل شکلیں لکھ سکیں اور ناطق اعداد کا موازنہ کر سکیں۔

1.1.1 تعارف

اعداد کی ایجاد انسانی ذہانت کی علامت ہے۔ریاضی میں اعداد ریڑھ کی ہڈی کی حیثیت رکھتے ہیں۔ہم جس عددی نظام کو استعمال کرتے ہیں اسے ''ہندو۔عربک نظام'' کہا جاتا ہے۔اس نظام میں ہم 10 ہندسوں کا استعمال کرتے ہیں۔وہ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 ہیں۔اعداد ان ہندسوں کے ذریعہ تشکیل پاتے ہیں۔

اعداد ہماری زندگی کے ہر پہلو سے جڑے ہوئے ہیں۔مثال کے طور پر ڈاکٹروں کو مریضوں کی نبض کی شرح جاننا، کسانوں کو فصل کی پیداوار کا کل تخمینہ لگانا، عمارتوں کی تعمیر میں مزدوروں کے ذریعہ استعمال کردہ پیمائش، انجینئروں کے منصوبے، تحصیل داروں کے سروے، پکانے میں استعمال ہونے والے اجزاء کا تناسب، مختلف ممالک میں اور یہاں تک کہ ایک ہی ملک میں مختلف مقامات پر درجہ حرارت کا فرق، ملک کے اثاثے اور قرض، شیئر مارکٹ میں اتار چڑھاؤ، ای۔کامرس میں خریداری وغیرہ اعداد کے گرد گھومتے ہیں۔

1.1.2 طبعی اعداد اور مکمل اعداد (Natural numbers and Whole numbers)

طبعی اعداد Natural numbers (N)

اعداد .... 1, 2, 3 جسے ہم گنتی کے لئے استعمال کرتے ہیں، طبعی اعداد کہلاتے ہیں۔ ہم طبعی اعداد کو 'N' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$N = \{1, 2, 3 \ldots\ldots\}$

نوٹ: سب سے چھوٹا طبعی عدد '1' ہے۔

نوٹ: ہر طبعی عدد کا اپنا پیش رو عدد (اگلا عدد) ہوتا ہے۔ لہٰذا ہم سب سے بڑا طبعی عدد معلوم نہیں کر سکتے۔

اعداد کی چند خصوصیات (Some Properties of Numbers)

سلسلہ نمبر	خصوصیت	تعریف	مثال	تصریحات
.1	بندشی خاصیت (i) جمع کے لئے (ii) ضرب کے لئے	اگر $a, b \in N$ تب $a + b \in N$ اگر $a, b \in N$ تب $ab \in N$	$2, 3 \in N,\ 2 + 3 = 5 \in N$ $2, 3 \in N,\ 23 = 6 \in N$	عمل جمع اور ضرب میں طبعی اعداد بندشی خاصیت رکھتے ہیں۔
.2	تقلیبی خاصیت (i) جمع کے لئے (ii) ضرب کے لئے	 $a + b = b + a$ $a \times b = b \times a$	فرض کیجئے $2, 3 \in N$ $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$	عمل جمع اور ضرب میں طبعی اعداد تقلیبی خاصیت رکھتے ہیں۔
.3	تلازمی خاصیت (i) جمع کے لئے (ii) ضرب کے لئے	 $(a+b)+c = a+(b+c)$ $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$	فرض کیجئے $5, 6, 7 \in N$ $(5+6)+7 = 5+(6+7)$ $11 + 7 = 5 + 13 = 18$ $(5\times6)\times7 = 5\times(6\times7)$ $30\times7 = 5\times42$ $210 = 210$	عمل جمع اور ضرب میں طبعی اعداد تلازمی خاصیت رکھتے ہیں۔
.4	تماثلی خاصیت (i) جمع کے لئے (ii) ضرب کے لئے	 $a + 0 = 0 + a = a$ $a \times 1 = 1 \times a = a$ 1 سے ضرب کرنے پر عدد تبدیل نہیں ہوگا	 $7 + 0 = 0 + 7 = 7$ $8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$	'0' صفر جمعی تماثلی عنصر ہے۔ '1' ضربی تماثلی عنصر ہے۔ طبعی اعداد میں صفر '0' موجود نہیں ہوتا۔ لہٰذا طبعی اعداد عمل جمع کے تحت تماثلی خاصیت نہیں رکھتے۔

.5	معکوسی خاصیت (i) جمع کے لیے (ii) ضرب کے لیے	$a+(-a) = 0 = (-a)+a$ $a\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\times a$	فرض کیجیے (سٹ) $1,-2,\frac{1}{a}\in A$ $2+(-2) = 0 = (-2)+2$ $2\times\frac{1}{a}=1=\frac{1}{2}\times 2$	طبعی اعداد میں منفی اعداد اور کسور نہیں ہوتے۔ لہٰذا طبعی اعداد عمل جمع اور ضرب کے تحت معکوسی خاصیت نہیں رکھتے۔
.6	تقسیمی خاصیت	$a\times(b+c) = a\times b+a\times c$ $(a+b)\times c = a\times c+b\times c$	فرض کیجیے $2, 3, 5\in N$ $2\times(3+5) = 2\times3+2\times5$ $2\times8 = 6 + 10$ $16 = 16$ $(2+3)\times5 = 2\times5+3\times5$ $5\times5 = 10 + 15$ $25 = 25$	

مکمل اعداد (W) Whole numbers

آپ کے پاس چار ٹافیاں ہیں۔ تمام ٹافیاں آپ کے دوست کو دے دی گئیں۔ آپ کے پاس کتنی ٹافیاں باقی بچیں؟

لہٰذا $4 - 4 = 0$ جی ہاں! صفر '0'

لیکن آپ کو طبعی اعداد میں صفر '0' نہیں ملے گا۔ لہٰذا طبعی اعداد میں '0' کا اضافہ کرتے ہیں اس طرح حاصل ہونے والے اعداد کو مکمل اعداد کہتے ہیں۔ جس کو W سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ہم مکمل اعداد کو 'N' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$W = \{0, 1, 2, 3, ... \}$$

نوٹ: اقل ترین مکمل عدد صفر '0' ہے اور اعظم ترین مکمل عدد بتا نہیں سکتے۔

صفر کی خصوصیات (Properties of Zero)

(i) '0' جمعی تماثلی عضر ہے، $a + 0 = 0 + a = a$

(ii) کسی بھی متعینہ عدد کو '0' سے ضرب دینے پر نتیجہ صرف صفر ہوتا ہے۔

$$0 \times a = 0 = a \times 0$$

(iii) صفر سے تقسیم معرف نہیں ہے۔ یعنی $\frac{a}{0}$ معرف نہیں ہے۔

(iv) $\frac{0}{0}$ کا تعین نہیں کیا جاسکتا۔

صحیح اعداد (Z) Integers

ماؤنٹ ایورسٹ کی اونچائی ہے 8,848+ میٹر (مثبت)

بحرالکاہل کی گہرائی ہے 10,994– میٹر (منفی)

دنیا میں سب سے زیادہ درجہ حرارت ہے $+63.8^{o}C$ (مثبت)

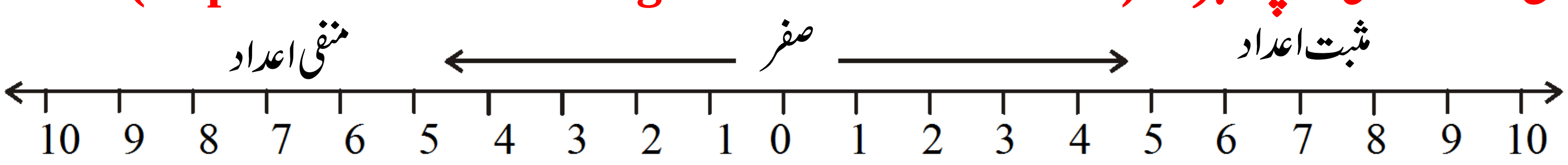
زمین پر اب تک کا سب سے کم قدرتی درجہ حرارت $-89^{o}C$ (منفی)

مندرجہ بالا حالات ہم سے منفی اعداد کے بارے میں بھی جاننے کا مطالبہ کرتے ہیں۔

ایسے اعداد کا سیٹ جس میں مثبت، صفر اور منفی اعداد یکجا ہوں صحیح اعداد کہلاتے ہیں۔ صحیح اعداد کو 'Z' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$Z = \{......, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

صحیح اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا (Representation of integers on a number line)



- مثبت اور منفی دونوں ہی لامتناہی ہے۔
- عددی خط پر دائیں طرف کے اعداد ہمیشہ بائیں طرف کے اعداد سے بڑے ہوتے ہیں۔

(i) $-1 < 0$ (ii) $-10000 < 1$ (iii) $0 > -105$ (iv) $11 > -100$ وغیرہ

(علامتیں '<' کم ہے اور '>' زیادہ ہے پڑھیں گے)
تحت سیٹ: $\subset$ تحت سیٹ کی علامت ہے۔

"N" طبعی اعداد کا ہر عدد مکمل اعداد "W" کے بھی اعداد ہیں۔

"W" مکمل اعداد کا ہر عدد صحیح اعداد "Z" کے بھی اعداد ہیں۔

- $N \subset W \subset Z$ (پڑھئے 'N' تحت سیٹ ہے 'W' کا اور 'W' تحت سیٹ ہے 'Z' کا)
- صحیح اعداد میں تمام اعداد اپنا جمعی معکوس رکھتے ہیں۔

2 کا جمعی معکوس 2– ہے۔

9– کا جمعی معکوس 9+ ہے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل میں طبعی اعداد، مکمل اعداد اور صحیح اعداد کی شناخت کیجیے۔

$$1, -1, 3, 0, -100, 8, 17, -19$$

حل :

طبعی اعداد 1, 3, 8, 17 ہیں۔

مکمل اعداد 0, 1, 3, 8, 17 ہیں۔

صحیح اعداد −100, −19, −1, 0, 1, 3, 8, 17 ہیں۔

مثال 2 : درج ذیل بیانات میں کون سے بیانات صحیح یا غلط ہیں؟

(i) ہر طبعی عدد، صحیح عدد ہے۔

(ii) ہر صحیح عدد، مکمل عدد ہے۔

(iii) '0' صفر جمعی اکائی ہے۔

(iv) صرف مثبت صحیح اعداد، طبعی اعداد ہیں۔

حل : (i) صحیح (ii) غلط (iii) صحیح (iv) صحیح

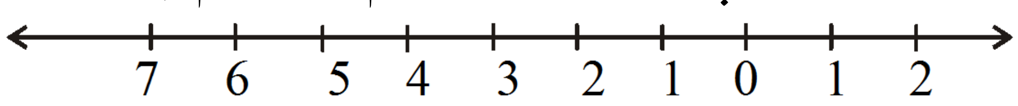
مثال 3 : مندرجہ ذیل صحیح اعداد کو صعودی اور نزولی ترتیب میں لکھئے۔......

حل : صعودی ترتیب (چھوٹے سے بڑے کی جانب) −205, −100, −76, 0, 12, 15, 117

نزولی ترتیب (بڑے سے چھوٹے کی جانب) 117, 15, 12, 0, −76, −100, −205

مثال 4 : مندرجہ ذیل عددی خط پر 2 اور 7− کے درمیان تمام صحیح اعداد معلوم کیجئے۔

حل :



اوپری شکل سے 2 اور 7- کے درمیان صحیح اعداد −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1 ہیں۔

صحیح اعداد پر چار بنیادی اعمال

جمع :

- دو مثبت صحیح اعداد کو جوڑنے پر مثبت صحیح عدد حاصل ہوتا ہے $3 + 5 = 8;\ 100 + 120 = 220$
- دو منفی صحیح اعداد کو جوڑنے پر منفی صحیح عدد حاصل ہوتا ہے $(-3) + (-5) = -8;\ (-100) + (-250) = -350$
  (دیئے گئے اعداد کو جوڑیں گے لیکن '−' کی علامت لگائیں گے)
- جب ایک مثبت اور ایک منفی عدد جوڑا جاتا ہے تب ہم تفریق کریں گے اور بڑے عدد کی علامت لگائیں گے۔

مثال 5 : $(-3) + (5)$ معلوم کیجئے۔

حل: $(-3) + (5) = 2$ [5 میں سے 3 کو تفریق کریں اور 5 کی علامت لگادیں (بڑا عدد)]

مثال 6 : $(-7) + 3$ معلوم کیجئے۔

حل: $(-7) + 3$ [7 میں سے 3 کو تفریق کریں اور 7 کی علامت لگادیں (بڑا عدد)]

تفریق :

صحیح اعداد کی تفریق ان کے جمعی معکوس کی طرح ہے۔

مثال 7 : معلوم کیجیے $(-3)-(-5)$

حل : $(-3)-(-5)$

'–' کو '+' میں تبدیل کریں۔ $= -3 + 5$

(–5 کا جمعی معکوس لکھیں جو 5+ ہے اور جمع کریں۔) $= +2$

مثال 8 : معلوم کیجیے $(-100)-(+7)$

حل : $(-100)-(+7)$

$= (-100) + (-7)$

$= -107$

ضرب:

- دو منفی صحیح اعداد کا حاصل ضرب مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

مثال: $(-4) \times (-3) = +12; \quad (-5) \times (-10) = +50$

- مثبت اور منفی صحیح عدد کا حاصل ضرب منفی صحیح عدد ہوتا ہے۔

مثال: $6 \times (-2) = -12; \quad (-9) \times (3) = -27$

- جفت تعداد میں صحیح اعداد کا حاصل ضرب مثبت ہوتا ہے۔

مثال: $(-2) \times (-3) \times (-5) \times (-6) = +180$ [Even number times of negatives 4 negatives are there in problem]

- طاق تعداد میں صحیح اعداد کا حاصل ضرب منفی ہوتا ہے۔

مثال: $(-1) \times (-2) \times (-3) = -6$ [Odd Number times of negative 3 numbers are there in problem]

تقسیم :

- اگر آپ کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں یکساں علامات پاتے ہوں تو نتیجہ (خارج قسمت) مثبت ہوگا۔

مثال: $\frac{-10}{-5} = +2$ ؛ $\frac{-15}{-3} = +5$

- اگر آپ کسی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما میں متضاد علامات پاتے ہوں تو نتیجہ (خارج قسمت) منفی ہوگا۔

مثال: $\frac{-6}{2} = -3$ ؛ $\frac{8}{-2} = \frac{-8}{2} = -4$

چند اہم حقائق (Some Important Facts)

.1 ضعف: کسی بھی عدد کا ضعف وہ عدد ہے جسے صحیح اعداد سے ضرب دے کر حاصل کیا جاتا ہے۔

7 کے اضعاف ہیں $7\times1 = 7, 7\times2 = 14, 7\times3 = 2\times1$ ... وغیرہ

7, 14, 21, 28, ... 7 کے اضعاف ہیں۔

.2 اجزائے ضربی: عدد جو کسی عدد کو مکمل طور پر تقسیم کردے (باقی نہ چھوڑے) جز ضربی کہلاتا ہے۔

نوٹ: ہر عدد اپنے دو جز ضربی رکھتا ہے' 1 اور وہ خود سوائے عدد 1 کے۔

مثال 9 : 42 کے تمام اجزائے ضربی معلوم کیجئے:

حل :

$1\times42 = 42$ $42\times1 = 42$

$2\times21 = 42$ اگر ہم تقلیبی خاصیت استعمال کرتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوگا $2\times12 = 42$

$3\times14 = 42$ $14\times3 = 42$

$6\times7 = 42$ $7\times6 = 42$

$\therefore$ 42 کے اجزائے ضربی 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 ہیں۔

.3 جفت اعداد: جفت عدد وہ عدد ہے جو 2 سے مکمل طور پر تقسیم پذیر ہو۔

جفت اعداد کے اکائی کے مقام پر 0, 2, 4, 6, 8 موجود ہوتا ہے۔

مثال: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... (جفت عدد)

.4 طاق عدد: طاق عدد وہ عدد ہے جو 2 کے ضعف نہ ہوں۔

طاق اعداد کے اکائیوں کے مقام پر 1, 3, 5, 7, 9 موجود ہوتا ہے۔

مثال: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ... (طاق عدد)

.5 مفرد عدد: وہ عدد جو 1 سے بڑا ہو' دو جز ضربی رکھتا ہو پہلا 1 اور دوسرا وہ خود' مفرد عدد کہلاتا ہے۔

نوٹ: مفرد اعداد صرف دو مختلف اجزائے ضربی رکھتے ہیں۔

نوٹ: '2' ایک جفت مفرد عدد ہے باقی تمام مفرد اعداد طاق ہیں۔

مثال: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, ... (مفرد اعداد)

مثال کے طور پر 23 کے اجزائے ضربی 1, 23 ہیں۔

.6 مرکب اعداد: ایسے اعداد جو 1 سے بڑے ہوتے ہیں اور مفرد نہیں ہوتے مرکب اعداد کہلاتے ہیں۔

مثال: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, ... (مرکب اعداد)

مثال کے طور پر 4 کے اجزائے ضربی 1, 2, 4 ہیں۔

7. **ہم مفرد / اضافی مفرد:** دو اعداد اس وقت ہم مفرد اعداد کہلائیں گے جب کہ ان کا عاد اعظم مشترک '1' ہو۔

مثال: 2, 3 ہم مفرد اعداد ہیں۔ 2, 9 ہم مفرد اعداد ہیں۔ ان کا عاد اعظم مشترک '1' ہے۔

2, 4 ہم مفرد اعداد نہیں ہیں کیونکہ 2, 4 کا عاد اعظم مشترک 2 ہے۔

8. **مربع عدد:** کسی صحیح عدد کو اسی سے ضرب دینے پر حاصل ہونے والا عدد، مربع عدد کہلاتا ہے۔

مثال: $1 \times 1 = 1^2 = 1$

$2 \times 2 = 2^2 = 4$

$3 \times 3 = 3^2 = 9$

$(-4) \times (-4) = (-4)^2 = 16$

$\vdots$

$17 \times 17 = 17^2 = 289$

مثال: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ... مربع اعداد ہیں۔

9. **مکعب عدد:** تین مساوی صحیح اعداد کا حاصل ضرب مکعب عدد کہلاتا ہے۔

$1 \times 1 \times 1 = 1^3 = 1 \qquad 2\times2\times2 = 2^3 = 8$

مثال: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 مکعب اعداد ہیں۔

10. **کامل عدد:** کامل عدد ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے جو اس کے واجب مثبت جز ضربیوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

6 کے اجزائے ضربی 1, 2, 3, 6 ہیں۔

واجب اجزائے ضربی 1, 2, 3 ہیں۔

واجب اجزائے ضربی کا مجموعہ $1 + 2 + 3 = 6$ اگلا کامل عدد 28 ہے۔

مثال 10 : مختصر کیجیے $100 + 50 \times 2$

حل : $100 + 50 \times 2$ (ضرب)

$= 100 + 100$ (جمع)

$= 200$

مثال 11 : $5000 + 500 - 50$

حل : $5000 + 500 - 50$

$= 5500 - 50$ (جمع)

$= 5450$ (تفریق)

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. حسب ذیل اعداد میں سے طبعی اعداد کی نشاندہی کیجئے۔

$5, 6, -1, 0, 3, 215, -11, -215$

2. مندرجہ ذیل میں سے ان اعداد کی نشاندہی کیجئے جو مکمل اعداد نہیں ہے۔

$6, 7, -8, -9, 0, -100$

3. محسوب کیجئے۔

(i) $(-2) + (-8) + 9$ (ii) $(-3) + (-9) + (-11)$

4. محسوب کیجئے:

(i) $(-2) - (-8)$ (ii) $(-256) + (-85)$

(iii) $(-18) + (-19) - (-110)$ (iv) $(-975) + (-120) - (-18)$

5. ہرایک کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $(-8) \times (-11) \times (-1) \times (-3)$ (ii) $(-15) \times 0 \times (-19)$

6. قدر معلوم کیجئے۔

(i) $60 \div 0$ (ii) $(-18) \div (-6)$ (iii) $(-125) \div 5$ (iv) $0 \div 200$

7. مختصر کیجئے۔

(i) $18 \times [7 + (-5)]$ (ii) $15 \times (-20) \times (-15 \div 53)$

8. عددی خط پر ظاہر کیجئے۔ $-7, -5, 0, 5, 7$

1.1.3 ناطق اعداد Rational numbers (Q)

پرساد کے پاس 1 ایکر زمین ہے۔ وہ اپنے 2 بچوں میں مساوی بانٹنا چاہتا ہے۔

ایک بچے کو کتنا حصہ ملے گا؟ $\frac{1}{2}$ ایکر

رتنماں سخت محنت کرتی ہے اور -/2,00,000 ` کماتی ہے۔

پھر وہ اس رقم کو 7 بیت المعمرین (اولڈ ایج ہومس) میں تقسیم کر دیتی ہے۔

ہرایک اولڈ ایج ہوم کو حاصل ہونے والی رقم $\frac{2,00,000}{7}$ ہوگی۔

ہرایک اولڈ ایج ہوم کو تقسیم کی جانے والی رقم $\frac{2,00,000}{7}$ `

$\frac{2,00,000}{7}, \frac{1}{2}$ بھی اعداد ہیں لیکن ایسے اعداد ہمیں صحیح اعداد کے سیٹ میں نہیں ملتے۔

اسی لئے نئے اعداد کی قسم پیش کی گئی جسے ناطق اعداد کہتے ہیں۔ اس کی وضاحت اس طرح کی جاسکتی ہے۔

اعداد جن کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$، ناطق اعداد یا کسری اعداد کہلاتے ہیں اور ان ناطق اعداد کے سیٹ کو Q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال: $\ldots, \frac{1}{7}, \frac{-100}{9}, -\frac{11}{8}, \frac{-6}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$ وغیرہ

کسی بھی صحیح عدد کو ہم ناطق عدد میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً -3 $-\frac{3}{1}$ یا $\frac{-6}{2}$ یا $\frac{-9}{3}$ یا ..... $\frac{-12}{4}$ وغیرہ

مندرجہ بالا مثالوں پر غور کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تمام طبعی اعداد، تمام مکمل اعداد اور تمام صحیح اعداد بھی ناطق اعداد ہوتے ہیں۔ $N \subset W \subset Z \subset Q$

مثال 12 : مندرجہ ذیل میں سے ناطق اعداد کون سے ہیں؟

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) 0 (iii) $\frac{-3}{-17}$ (iv) $\frac{6}{-13}$

(v) -9 (vi) $\frac{0}{0}$ (vii) $\frac{8-8}{16\times(-4)}$ (viii) $\frac{-17}{3-3}$

حل : (i) (ii) (iii) (iv) (v) (vii) ناطق اعداد ہیں (vi) (viii) ناطق اعداد نہیں ہیں۔

کیوں کہ $\frac{0}{0}$ غیر معروف ہے اور $\frac{-17}{0}$ بھی غیر معروف ہے۔

نوٹ: جب آپ ناطق اعداد کو ظاہر کرتے ہیں:

(i) نسب نما مثبت صحیح عدد ہونا چاہئے۔

(ii) شمار کنندہ اور نسب نما کو مختصر شکل میں لکھیں۔

ناطق عدد کی معیاری شکل (اقل ترین شکل)

ناطق عدد $\frac{p}{q}$، جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں نیز $q \neq 0$، جس میں q مثبت ہو (یا اسے مثبت بنایا گیا ہو) نیز p اور q ہم مفرد ہوں تو کہا جاتا ہے کہ ناطق عدد معیاری (کمترین) شکل میں ہے۔

مثال 13 : مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو معیاری شکل میں لکھئے۔

(i) $\frac{4}{8}$ (ii) $-\frac{18}{50}$ (iv) $\frac{-21}{-49}$

حل :

(i) $\frac{4}{8} = \frac{2\times2}{2\times2\times2} = \frac{1}{2}$ (شمارکنندہ اور نسب نما کا ع۔ا۔م 1 ہے)

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ناطق عدد $\frac{4}{8}$ کی معیاری (اقل ترین) شکل ہے

(ii) $-\frac{18}{50} = \frac{-2\times9}{2\times25} = \frac{-2\times9}{2\times25} = \frac{-9}{25}$

$\therefore$ $-\frac{9}{25}$ ناطق عدد $-\frac{18}{50}$ کی معیاری (اقل ترین) شکل ہے)

(iii) $\frac{-21}{-49} = \frac{-7\times3}{-7\times7} = \frac{+\cancel{7}\times3}{+\cancel{7}\times7} = \frac{3}{7}$

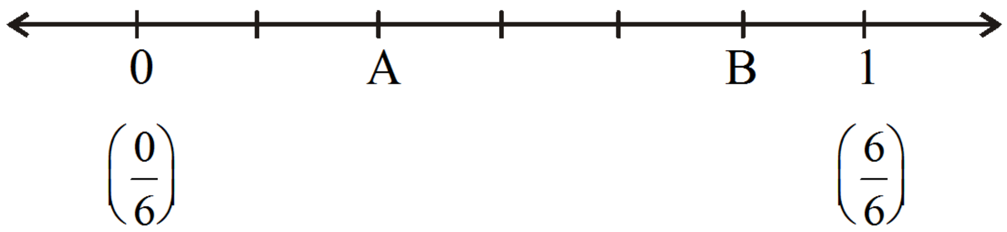
$\therefore$ $\frac{3}{7}$ ناطق عدد $\frac{-21}{-49}$ کی معیاری (اقل ترین) شکل ہے۔

ناطق اعداد کا عددی خط پر اظہار (Rational Numbers on the Number Line)

کسی بھی ناطق عدد کو عددی خط پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ناطق اعداد کے نسب نما سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ ہر اکائی کو اس عدد کے مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور اس کے شمارکنندہ سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کتنے حصوں کو لیا گیا یا ''ملحوظ'' رکھا گیا ہے۔

* کوئی بھی دو ناطق اعداد کے درمیان ہمیشہ دوسرا ناطق عدد موجود ہوتا ہے اس خاصیت کو ''کثافی خاصیت'' کہتے ہیں۔

مثال 14 : عددی خط پر A اور B کے مقام پر واقع ہونے والے ناطق اعداد کی نشاندہی کیجیے۔



حل : یہاں پر ایک اکائی ' 0 تا 1 کو 6 مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

نقطہ 'A' کل 6 حصوں میں سے 2 حصوں کو ظاہر کرتا ہے۔

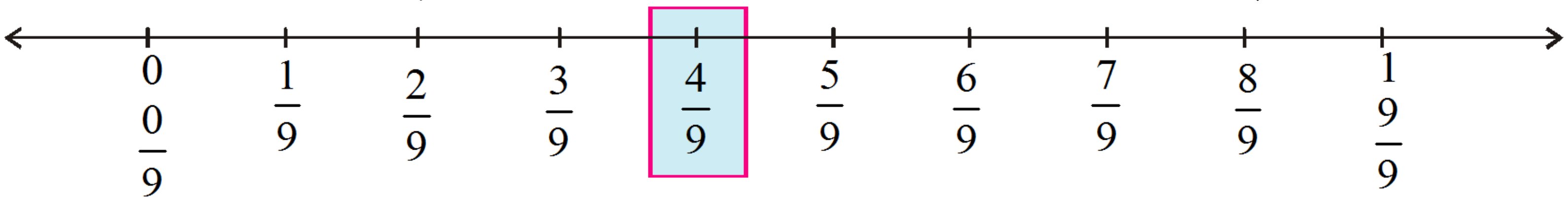
اس طرح A کو $\frac{2}{6}$ سے اور

B کو $\frac{5}{6}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 15 : $\frac{4}{9}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

حل : $\frac{4}{9}$ ' 0 اور 2 کے درمیان واقع ہے۔

لہٰذا عددی خط پر '0' اور '1' کے درمیانی حصے کو 9 مساوی حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔



'0' سے شمار کرتے ہوئے 4 چوتھے حصے کو نشاندہی (شمار کنندہ کے طور پر) کیجئے۔

جس کو $\frac{4}{9}$ لیا جاتا ہے۔ یہ نقطہ مطلوبہ ناطق عدد $\frac{4}{9}$ ہوتا ہے۔

مثال 16 : $-\frac{17}{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کریں۔

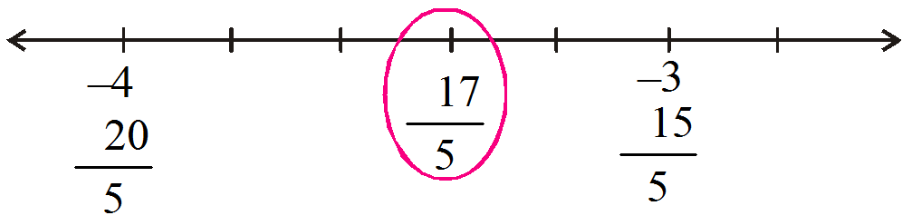
$$-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5} = -3 - \frac{2}{5}$$

حل : $-\frac{17}{5}$ ، -3 اور -4 کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

لہٰذا عددی خط پر -3 اور -4 کے درمیانی حصے کو 5 مساوی حصوں (نسب نما) میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

'-3' سے شمار کرتے ہوئے (2nd) دوسرے حصے کی نشاندہی (شمار کنندہ کے طور پر) کیجئے۔

$$-3 = \frac{-15}{5},\quad -4 = \frac{-20}{5}$$



ناطق اعداد کا موازنہ (Comparison of Rational Numbers)

ناطق اعداد (جن کا موازنہ کرنا ہو) جن کے نسب نما یکساں ہوں تو موازنہ آسانی کے ساتھ کیا جاسکتا ہے۔ عدد جس کا شمار کنندہ سب سے بڑا ہو وہ سب سے بڑا ناطق عدد کہلائے گا۔

مثال 17 : $\frac{5}{13}$ اور $\frac{8}{13}$ کا موازنہ کیجئے۔

حل : یہاں دونوں ناطق اعداد کے نسب نما 13 ہیں اور شمار کنندوں میں $8 > 5$ ،

لہٰذا $\frac{8}{13} > \frac{5}{13}$

نوٹ: اگر دو ناطق اعداد کے نسب نما مختلف ہوں تو پہلے ان کے نسب نما کو مساوی بناتے ہیں٬ اس کے لئے انھیں ان کی معادل شکل میں لکھتے ہیں۔ اس کے بعد ان کے شمار کنندہ کا موازنہ کرتے ہیں۔ جس عدد کا شمار کنندہ بڑا ہوگا وہی سب سے بڑا ناطق عدد کہلائے گا۔

مثال 18 : $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{7}$ کا موازنہ (تقابل) کیجیے۔

حل : یہاں دونوں ناطق اعداد کے نسب نما یکساں (مساوی) نہیں ہیں۔

لہٰذا ہم ان دونوں اعداد کے نسب نماؤں کو مندرجہ ذیل طریقہ سے یکساں بناتے ہیں۔

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{7} = \frac{14}{35} \quad \left[\text{پہلا ناطق عدد} \times \frac{\text{دوسرے ناطق عدد کا نسب نما}}{\text{دوسرے ناطق عدد کا نسب نما}}\right]$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{15}{35} \quad \left[\text{دوسرا ناطق عدد} \times \frac{\text{پہلے ناطق عدد کا نسب نما}}{\text{پہلے ناطق عدد کا نسب نما}}\right]$$

اس طرح $\frac{15}{35} > \frac{14}{35}$

$\therefore \quad \frac{3}{7} > \frac{2}{5}$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے۔

1. مندرجہ ذیل میں کونسے ناطق اعداد ہیں؟

(i) $\frac{3+3}{3-3}$ (ii) $\frac{0}{8}$ (iii) $-\frac{8}{11}$ (iv) -6

2. مندرجہ ذیل میں کونسے ناطق اعداد، صحیح اعداد ہیں؟

(i) -24، $\frac{-6}{11}$، $\frac{-18}{19}$، $\frac{21}{7}$، $\frac{-19}{-38}$

3. مندرجہ ذیل میں ناطق اعداد کو معیاری (اقل ترین) شکل میں لکھیے۔

(i) $\frac{6}{12}$ (ii) $\frac{18}{50}$ (iii) $\frac{-6057}{2019}$

4. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کے معادل پانچ ناطق اعداد لکھیے۔

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $-\frac{6}{11}$ (iii) $\frac{18}{5}$

5. $\frac{5}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

6. $\frac{1}{6}$ ، $\frac{5}{8}$ اور $\frac{3}{5}$ کو عددی خط پر ظاہر کیجیے۔

7. $\frac{3}{7}$ اور $\frac{4}{9}$ کا تقابل (موازنہ) کیجیے۔

1.1.4 ناطق اعداد پر چار بنیادی اعمال (Four Fundamental operations on Rational Numbers)

ناطق اعداد کی جمع

(i) جب نسب نما یکساں (مساوی) ہو تو شمار کنندوں کو جمع کریں۔

مان لیجئے کہ $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{b}$ ناطق اعداد ہیں۔ جہاں $(b \neq 0)$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

ہم کبھی بھی نسب نماؤں کو جمع نہیں کرتے کیونکہ نسب نما صرف مساوی حصوں کو ظاہر کرتے ہیں۔

(ii) جب نسب نما غیر مساوی ہو تو پہلے ان کے نسب نماؤں کو مساوی (یکساں) بناتے ہیں۔ اس کے لئے انہیں معادل شکل میں لکھتے ہیں۔

غور کیجئے $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ دو ناطق اعداد ہیں

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{cb}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

مثال 19 : مختصر کیجئے $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}$

حل : $\frac{4}{7}+\frac{9}{7}=\frac{4+9}{7}=\frac{13}{7}$

مثال 20 : مختصر کیجئے $\frac{5}{8}+\frac{7}{9}$

حل :

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{9}=\frac{5}{8}\times\frac{9}{9}+\frac{7}{9}\times\frac{8}{8}$$

$$=\frac{45}{72}+\frac{56}{72}$$

$$=\frac{45+56}{72}$$

$$=\frac{101}{72}$$

مثال 21 : مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو جمع کیجئے۔

(i) $\frac{2}{5}$ اور $\frac{3}{7}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ اور $\frac{6}{17}$ (iii) $-\frac{9}{11}$ اور $-\frac{11}{12}$

حل: $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$ اور $\frac{3}{7}$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2\times7+3\times5}{5\times7}$$
$$= \frac{14+15}{35}$$
$$= \frac{29}{35}$$

(ii) حل: $-\frac{3}{5}$ اور $\frac{6}{17}$

$$= -\frac{3}{5} + \frac{6}{17}$$
$$= -\frac{3}{5}\times\frac{17}{17}+\frac{6}{17}\times\frac{5}{5}$$
$$= -\frac{51}{85}+\frac{30}{85}$$
$$= \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

(یا)

متبادل طریقہ:

$$-\frac{3}{5} \quad \frac{6}{17}$$

$$-\frac{3}{5} + \frac{6}{17} = \frac{-3\times17+6\times5}{5\times17} = \frac{-51+30}{85} = -\frac{21}{85}$$

(iii) $-\frac{9}{11}$ اور $-\frac{11}{12}$

حل: $\left(-\frac{9}{11}\right)+\left(-\frac{11}{12}\right)$

$$= \left(-\frac{9}{11}\times\frac{12}{12}\right)+\left(-\frac{11}{12}\times\frac{11}{11}\right)$$
$$= -\frac{108}{132}+\frac{-121}{132}$$
$$= \frac{-108-121}{132} = \frac{229}{132}$$

(یا)

متبادل طریقہ:

$$\frac{9}{11} + \frac{11}{12}$$

$$\frac{-9\times12+-11\times11}{11\times12} = \frac{-108-121}{132} = \frac{-229}{132}$$

ناطق اعداد کی تفریق (Subtraction of Rational Numbers)

ناطق اعداد کی تفریق کے لئے ہم وہی طریقہ استعمال کریں گے جسے ناطق اعداد کی جمع کے لیے کیا تھا۔

مثال 22 : مندرجہ ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $-\frac{8}{5}+\frac{7}{9}$ (ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{5}\right)$ (iii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

حل: (i) $-\frac{37}{45} = \frac{-72+35}{45} = \frac{-8\times9+7\times5}{5\times9} = \frac{8}{5}\;\frac{7}{9}$

(ii) $-\frac{8}{7}-\left(-\frac{9}{5}\right)$

$$= -\frac{8}{7}+\frac{9}{5}$$

$$= -\frac{8}{7}\times\frac{5}{5}+\frac{9}{5}\times\frac{7}{7}$$

$$= -\frac{40}{35}+\frac{63}{35}$$

$$= \frac{-40+63}{35} = \frac{23}{35}$$

(ii) $\frac{11}{12}-\frac{9}{5}$

حل: $\frac{11}{12}\times\frac{5}{5}-\frac{9}{5}\times\frac{12}{12}$

$$= \frac{55}{60}-\frac{108}{60} = \frac{55-108}{60} = -\frac{53}{60}$$

متبادل طریقہ :

$$\frac{11}{12}-\frac{9}{5} = \frac{11\times5-9\times12}{12\times5} = \frac{55-108}{60} = -\frac{53}{60}$$

مثال 23 : $-\frac{3}{5}$ میں سے $\frac{2}{7}$ کو تفریق کیجئے۔

حل:
$$-\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = -\frac{3}{5}\times\frac{7}{7} - \frac{2}{7}\times\frac{5}{5}$$
$$= -\frac{21}{35} - \frac{10}{35} = \frac{-21-10}{35} = -\frac{31}{35}$$

ناطق اعداد کا ضرب

(i) دو ناطق اعداد $\left(\frac{a}{b}\right)$ اور $\left(\frac{c}{d}\right)$ ، $b \neq 0$ ، $d \neq 0$ کا ضرب ایک ناطق عدد $\left(\frac{ac}{bd}\right)$ ہے جہاں $bd \neq 0$

یعنی $\dfrac{\text{شمار کنندوں کا حاصل ضرب}}{\text{نسب نماؤں کا حاصل ضرب}}$

نوٹ: ناطق عدد ہمیشہ اقل ترین شکل میں لکھا جائے گا۔

مثال 24 : مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو ضرب دیجئے۔

(i) $\frac{4}{5}$ اور $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{7}{8}$ اور $\left(-\frac{6}{15}\right)$ (iii) $\frac{5}{12}$ اور $\left(\frac{-3}{-7}\right)$

حل:

(i) $\frac{4}{5} \times \frac{11}{2} = \frac{4\times 11}{5\times 2} = \frac{2\times 2\times 11}{5\times 2} = \frac{22}{5}$

(ii) $\frac{7}{8} \times -\frac{6}{15} = \frac{7\times(-6)}{8\times 15} = \frac{7\times(-3)\times 2}{2\times 4\times 3\times 5} = \frac{7\times(-1)}{4\times 5} = -\frac{7}{20}$

(iii) $\frac{5}{12}\times\left(\frac{-3}{-7}\right) = \frac{5\times(-3)}{12\times(-7)}$

$$= \frac{5\times(-3)}{3\times 4\times(-7)} = \frac{5\times(-1)}{4\times(-7)} = \frac{5}{28} = \frac{5}{28}$$

ناطق اعداد کی تقسیم

ناطق عدد کی تقسیم مساوی ہوتی ہے، جب ناطق عدد کو دوسرے ناطق عدد کے مقلوب سے ضرب دیتے ہیں۔

نوٹ: $\frac{a}{b}$ کا مقلوب $\frac{b}{a}$ ہے ؛ $-\frac{a}{b}$ کا مقلوب $-\frac{b}{a}$ ہے

فرض کیجئے کہ $\frac{a}{b}$ اور $\frac{c}{d}$ دو ناطق اعداد ہیں، جہاں $b \neq 0$ اور $d \neq 0$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال 25 : مندرجہ ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11}$ (ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

حل: $\frac{4}{5} \div \frac{6}{11} = \frac{4}{5} \times \frac{11}{6}$ [$\frac{6}{11}$ کا مقلوب $\frac{11}{6}$ ہے]

دوسرے ناطق عدد کا مقلوب لکھئے × پہلا ناطق عدد ÷ تبدیل کیجئے

$$= \frac{4 \times 11}{5 \times 6} = \frac{2 \times 2 \times 11}{5 \times 2 \times 3} = \frac{2 \times 11}{5 \times 3} = \frac{22}{15}$$

(ii) $\frac{51}{111} \div \frac{34}{37}$

حل: $\frac{51}{111} \times \frac{37}{34}$ ($\frac{37}{34}$ کا مقلوب $\frac{34}{37}$ ہے)

$$\frac{51 \times 37}{111 \times 34} = \frac{17 \times 3 \times 37}{37 \times 3 \times 17 \times 2} = \frac{1}{2}$$

مثال 26 : مختصر کیجئے (i) $5 \div 5\frac{2}{3}$ (ii) $4 \div \frac{1}{2}$ (iii) $\frac{7}{8} \div 5$

حل: $5 \div 5\frac{2}{3}$

$5 \div \frac{17}{3}$ $5\frac{2}{3} = \frac{5 \times 3 + 2}{3} = \frac{17}{3}$

$= \frac{5}{1} \times \frac{3}{17}$ $\frac{17}{3}$ کا مقلوب $\frac{3}{17}$ ہے

$= \frac{15}{17}$

(i) $4 \div \frac{1}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{1} = \frac{8}{1} = 8$

(ii) $\frac{7}{8} \div 5 = \frac{7}{8} \div \frac{5}{1} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{40}$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. مختصر کیجئے۔

(i) $\frac{1}{7} + \frac{2}{7}$ (ii) $\frac{8}{15} - \frac{2}{15}$ (iii) $\frac{3}{5} - \left(-\frac{8}{5}\right)$

2. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو جمع کیجئے۔

(i) $\frac{3}{7}, \frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{8}{11}$ (iii) $\frac{7}{6}, \frac{11}{12}$

3. تفریق کیجیے۔

(i) $\frac{7}{5}$ سے $\frac{8}{9}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ سے $\frac{9}{14}$

4. مختصر کیجیے۔

(i) $4 \times \frac{3}{2}$ (ii) $5 \times 2\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{5}{6} \times \frac{7}{11}$ (iv) $\frac{18}{35} \times \frac{7}{108}$

5. مندرجہ ذیل کسور کو مقلوب کیجیے۔

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $-\frac{13}{7}$

6. مختصر کیجیے۔

(i) $18 \div \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{7} \div \frac{8}{15}$ (iii) $3 \div 2\frac{1}{7}$

مشق

1. مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $(-7) + 10 + (-12) + 6$ (ii) $(-3) - (9) + (-9)$

(ii) $(-230) - (-70) + 175 - 30$ (iv) $(-675) + (-130) - (-180) + 200$

2. درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $(-3) \times (-10) \times (-2) \times 5$ (ii) $(-100) \times (-1) \times 0 \times 3$

(ii) $(-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-1)$ (iv) $(-1) \times (-10) \times (-1) \times (-10)$

(v) $0 \div 20$ (vi) $(-56) \div (-7)$

(vii) $-625 \div 5$

3. مختصر کیجیے۔

(i) $20 \times [10 - (-5)]$ (ii) $25 \times (-10) \times (21 \div (-3))$

4. مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$ (ii) $\frac{7}{13} - \frac{3}{13}$ (iii) $\frac{6}{7} + \frac{5}{9}$ (iv) $-\frac{3}{8} + \frac{2}{5}$

(v) $\frac{5}{7} - \frac{4}{6}$ (vi) $\frac{5}{13} - \frac{2}{4}$

5. مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $8 \times \frac{5}{2}$ (ii) $5 \times 3\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{13}$ (iv) $\frac{21}{35} \times \frac{7}{66}$

آیئے خلاصہ کریں

- N (طبعی اعداد) : $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- W (مکمل اعداد) : $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
- جمع اور ضرب کے تحت طبعی اعداد کی خصوصیات

  '0' جمعی اکائی/جمعی تماثلی عنصر ہے۔

  'a' کا جمعی معکوس '$-a$' ہے

  اور اسی طرح $-a$ کا جمعی معکوس 'a' $(a \neq 0)$
- (i) $0 \times$ کوئی معروف عدد $= 0$ (ii) $\dfrac{0}{\text{کوئی معروف عدد}} = 0$

  (iii) $\dfrac{\text{معروف عدد}}{0}$ معروف نہیں ہے۔   (iv) $\dfrac{0}{0}$ کو بیان نہیں کیا جاسکتا
- Z (صحیح اعداد) $Z = \{\ldots.-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots.\}$

  ہم اکاؤنٹ سے منہا کی گئی رقم کے لئے، $0^{o}C$ سے نیچے حرارت کے لیے، سطح سمندر سے نیچے گہرائی کے لئے منفی اعداد کا استعمال کرتے ہیں۔

  صحیح اعداد پر چاروں بنیادی اعمال (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کو انجام دے سکتے ہیں اور انھیں عددی خط پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔
- ضعف، جز ضربی، جفت و طاق اعداد، مفرد اور مرکب اعداد، مربع اور مکعب اعداد، کامل اعداد، ہم مفرد اعداد اور بوڈ ماس (BODMAS) کے قاعدہ کے بارے میں جانا۔
- ایسے اعداد جو — شکل میں ہو، ($q \neq 0$، p اور q صحیح اعداد ہیں) ناطق اعداد کہلاتے ہیں اور انہیں 'Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- جب q مثبت بنایا گیا ہو نیز p اور q ہم مفرد ہوں تو کہہ سکتے ہیں کہ ناطق عدد معیاری شکل یا اقل ترین (کمترین) شکل میں ہے۔
- ناطق عدد کے شمار کنندے اور نسب نما دونوں کو ایک ہی عدد سے ضرب/تقسیم کر کے معادل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔
- ناطق اعداد کو عددی خط پر ظاہر کرنا۔
- ناطق اعداد پر چاروں بنیادی اعمال (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کو انجام دیا جاسکتا ہے۔

ناطق اعداد۔غیرناطق اعداد
Rational Numbers - Irrational Numbers

CHAPTER 1.2

1.2.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے کہ:

- دوناطق اعداد کے درمیان ناطق اعداد معلوم/لکھ سکیں گے۔
- دیئے ہوئے اعداد کے ذ۔ا۔م اور ع۔ا۔م معلوم کرسکیں گے۔
- ناطق اعداد کومختتم اور غیرمختتم اعشاریہ کی شکل میں ظاہر کرسکیں گے۔
- غیرناطق اعداد کی چند خصوصیات کی وضاحت کرسکیں گے۔
- حقیقی اعداد کے تصور کو سمجھیں گے۔

1.2.1 تعارف

اعداد کی تشکیل انسانی تہذیب کی تاریخ کی عظیم اور اہم ترین ایجادات میں سے ایک ہے۔آپ تصور کرسکتے ہیں کہ اعداد کا علم نہ ہونے کی صورت میں اگر ''کتنے؟ (How many?)'' اور کتنا؟ (How much?) جیسے سوالوں کا جواب نہ ملے تو کتنی الجھن ہوگی۔

عددی نظام اور صفر کی ایجاد نیز جمع (جوڑ) کرنے کے قاعدوں کی مدد سے ہی لوگ مندرجہ ذیل قسم کے سوالوں کے جواب معلوم کرنے میں کامیاب ہو پائے۔

(i) ٹوکری میں کتنے سنترے ہیں؟

(ii) امرناتھ یاترا کے دوران کشمیر میں پہلگام کے مقام پر درجہ حرارت کیا ہوسکتا ہے؟

(iii) گھر سے آپ کے دفتر (آفس) جانے میں کتنا وقت لگتا ہے؟

(iv) کھیت سے کتنے تھیلے گندم کی پیداوار رہی؟

اور دیئے ہوئے حالات اور اعداد پر کئے جانے والے چاروں بنیادی اعداد کا علم شامل ہے۔ $\frac{4}{2}$ کی قدر 2 ہے جو ایک ناطق عدد ہے اور $\frac{4}{5}$ کی قدر ایک ناطق عدد ہے نیز $\frac{4}{5} = 0.8$ اعشاری عدد ہے۔

$\frac{4}{3}$ کی قدر معلوم کیجئے۔اس کی قدر ہمیں ....1.333 حاصل ہوگی۔اس قسم کے اعداد کو ہم $1.\overline{3}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

اور آپ نے $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، ..... وغیرہ جیسے اعداد بھی دیکھے ہوں گے۔

ان اعداد کو کیا کہیں گے؟ اس سبق میں ہم ناطق اور غیر ناطق اعداد کے متعلق بحث کریں گے۔

دو ناطق اعداد کے درمیان ناطق اعداد

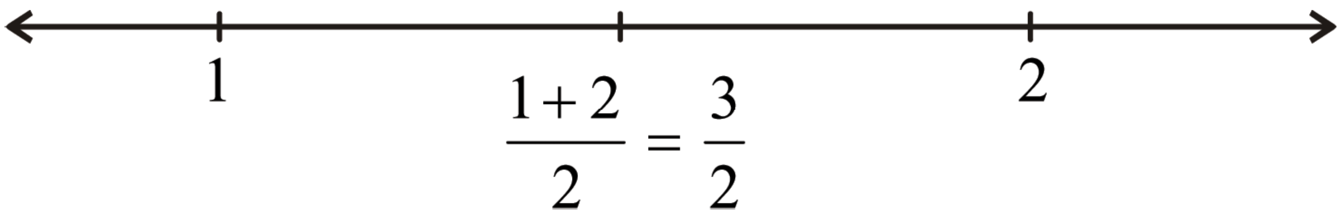
کیا آپ 1 اور 2 کے درمیان میں کوئی طبعی اعداد بتا سکتے ہیں؟

کیا آپ 1 اور 2 کے درمیان میں کوئی مکمل اعداد بتا سکتے ہیں؟

کیا 1 اور 2 کے درمیان میں کوئی صیح اعداد موجود ہیں؟

چلیئے 1 اور 2 کے درمیان میں موجود ناطق اعداد لکھیں۔

اگر a اور b کوئی دو ناطق اعداد ہیں تب $\frac{a+b}{2}$ (یہ a اور b کا اوسط ہے) بھی ایک ناطق عدد ہوگا جو a اور b کے درمیان (وسط) میں واقع ہوگا۔ یعنی $\frac{1}{2}(a+b)$



اس طرح $1 < \frac{3}{2} < 2$

اب ہم 1 اور $\frac{3}{2}$ کے درمیان میں موجود ناطق اعداد معلوم کرنے کی کوشش کریں گے۔

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1\times 2+1\times 3}{1\times 2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2+3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{4}$$

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں $1 < \frac{5}{4} < \frac{3}{2} < 2$

اسی طرح $\frac{3}{2}$ اور 2 کے درمیان میں موجود ناطق اعداد ہیں۔

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\times 1+2\times 2}{2\times 1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3+4}{2}\right] = \frac{7}{4}$$

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ $1 < \frac{3}{4} < \frac{3}{2} < \frac{7}{4} < 2$

اس طریقہ سے ہم دو صحیح اعداد کے درمیان کئی ناطق اعداد کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ بلکہ کسی بھی دو ناطق اعداد کے درمیان لامتناہی ناطق اعداد موجود ہوتے ہیں۔

متبادل طریقہ:

ناطق اعداد کو معادل شکل میں بدلنے کے طریقہ سے ہم کوئی دو ناطق اعداد کے درمیان میں موجود ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1 : $\frac{1}{2}$ اور $\frac{2}{3}$ کے درمیان 9 ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

حل:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6};$$

یہاں ناطق اعداد کے نسب نما مساوی ہیں۔ اب آپ زیادہ سے زیادہ ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{3}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{30}{60}; \qquad \frac{4}{6} \times \frac{10}{10} = \frac{40}{60}$$

$\frac{30}{60}$ اور $\frac{40}{60}$ کے درمیان ناطق اعداد ہوں گے۔

$$\frac{31}{60}, \frac{32}{60}, \frac{33}{60}, \frac{34}{60}, \frac{35}{60}, \frac{36}{60}, \frac{37}{60}, \frac{38}{60}, \frac{39}{60}$$

مثال 2 : $-\frac{7}{8}$ اور $-\frac{2}{3}$ کے درمیان 12 ناطق اعداد معلوم کیجئے۔

حل:

$$-\frac{7}{8} = -\frac{7}{8} \times \frac{3}{3} = \frac{-21}{24}$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \times \frac{8}{8} = \frac{-16}{24}$$

یہاں ناطق اعداد کے نسب نما مساوی ہیں لیکن ابھی ہم $\frac{-21}{24}$ اور $\frac{-16}{24}$ کے درمیان 12 ناطق اعداد معلوم نہیں کر سکتے۔

لہٰذا ہم انہیں دوبارہ معادل شکلوں میں لکھیں گے۔

$$\frac{-21}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-63}{72}$$

$$\frac{-16}{24} \times \frac{3}{3} = \frac{-48}{72}$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ $-\frac{7}{8}$ اور $-\frac{2}{3}$ کے درمیان 12 ناطق اعداد ہیں۔

$-\frac{49}{72}, -\frac{50}{72}, -\frac{51}{72}, -\frac{52}{72}, -\frac{53}{72}, -\frac{54}{72}, -\frac{55}{72}, -\frac{56}{72}, -\frac{57}{72}, -\frac{58}{72}, -\frac{59}{72}, -\frac{60}{72}, -\frac{61}{72}, -\frac{62}{72}$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے:

1. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کے درمیان ناطق عدد معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{4}$ (ii) $-\frac{3}{5}$ اور $\frac{1}{8}$

2. $\frac{2}{7}$ اور $\frac{4}{9}$ کے درمیان 9 ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

3. $-\frac{3}{5}$ اور $\frac{4}{11}$ کے درمیان 10 ناطق اعداد معلوم کیجیے۔

1.2.2 حساب کا بنیادی مسئلہ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ہر مرکب عدد (غیر مفرد عدد) کو مفرد اعداد کے اجزا کے حاصل ضرب سے ظاہر کیا جاتا ہے' نیز دیئے گئے مفرد عدد کو مفرد اعداد کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کو منفرد طریقہ پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح دیئے گئے مرکب عدد (غیر مفرد عدد) x کو ہم اس طرح سے اجزاء بناتے ہیں۔ $x = p_1 p_2 p_3 .... p_n$

جہاں $p_1 p_2 .... p_n$ مفرد عدد ہیں اور انہیں نزولی ترتیب میں لکھا جاتا ہے جیسا کہ $p_1 \leq p_2 \leq .... \leq p_n$ اگر ہم مساوی مفرد اعداد کو جوڑتے ہیں تو ہم کو مفرد اعداد کے قوت نما حاصل ہوتے ہیں جب ہم یقین کر لیتے ہیں کہ اعداد کا تسلسل صعودی (بڑھتی) ہے تب اجزاء میں تبدیل ہونے والا عدد ایک منفرد عدد ہے۔

مثال 3 : 210 کو مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

حل: دیئے گئے عدد کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے کے لئے صرف مفرد اعداد لینا ہوگا۔

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{210} \\ 3 & \underline{105} \\ 5 & \underline{35} \\ 7 & \underline{7} \\ & 1 \end{array}$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

اس طرح ہر مرکب عدد (غیر مفرد عدد) کو مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جاسکتا ہے جو منفرد ہے۔

نوٹ: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47 ... مفرد اعداد ہیں۔

مثال 4 : 2310 کومفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے۔

حل :

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{2310} \\ 3 & \underline{1155} \\ 5 & \underline{385} \\ 7 & \underline{77} \\ 11 & \underline{11} \\ & 1 \end{array}$$

$$\therefore\ 2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$$

مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے ع۔ا۔م اورذ۔ا۔م معلوم کرنا۔

ع۔ا۔م (HCF) : عاد اعظم مشترک (بڑے سے بڑا مشترک جز وضربی)

ذ۔ا۔م (LCM): ذواضعاف اقل ترین مشترک (چھوٹے سے چھوٹا مشترکہ ضعف)

عاد اعظم مشترک: دو یا دو سے زائد اعداد کا ع۔ا۔م وہ بڑے سے بڑا (اعظم ترین) عدد ہوتا ہے جو ان میں سے ہر ایک مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

ذواضعاف اقل ترین مشترک: وہ چھوٹے سے چھوٹا (اقل ترین) عدد جو دئے گئے اعداد سے مکمل طور پر تقسیم پذیر ہو ذ۔ا۔م کہلاتا ہے۔

مثال 4 : اعداد 6 اور 20 کا ذ۔ا۔م اور ع۔ا۔م مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کیجئے۔

حل :

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{\mathbf{20}} \\ 2 & \underline{\mathbf{10}} \\ 5 & \underline{\mathbf{5}} \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & \underline{\mathbf{6}} \\ 3 & \underline{\mathbf{3}} \\ & 1 \end{array}$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1 \qquad 6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3^1$$

[6, 20] کا ع۔ا۔م = دیئے گئے اعداد کا مفرد اجزائے ضربی میں مشترک سب سے چھوٹے قوت نماؤں کا حاصل ضرب

= 2^1 (یہاں 2^1 سب سے چھوٹی قوت نما والا مشترکہ مفرد جز ضربی ہے)

= 2

[6, 20] کا ذ۔ا۔م = دیئے گئے اعداد کے مفرد اجزائے ضربی میں بڑی قوت نماؤں کا حاصل ضرب

= $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ (یہاں آپ کو سب سے چھوٹی قوت نما والا مشترکہ مفرد جز ضربی کو چھوڑ کر تمام مفرد اجزائے ضربی لینا ہوگا)

= $4 \times 3 \times 5$

= 60

مشاہدہ کیجئے کہ   دیئے گئے اعداد کا حاصل ضرب = $6 \times 20 = 120$

اور ان کے ع۔ا۔م اور ذ۔ا۔م کا حاصل ضرب = $2 \times 60 = 120$

مندرجہ بالا سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ

ع۔ا۔م (a, b) × ذ۔ا۔م $(a, b) = a \times b$

مثال 6 : 96 اور 404 کا ع۔ا۔م (HCF) مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کیجئے۔
نیز ان کا ذ۔ا۔م (LCM) بھی معلوم کیجئے۔

حل : 96 اور 404 کو مفرد اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے پر

$$\begin{array}{r|l} 2 & 96 \\ 2 & 48 \\ 2 & 24 \\ 2 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 3 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 404 \\ 2 & 202 \\ & 101 \end{array}$$

$$96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$$

$$404 = 2 \times 2 \times 101 = 2^2 \times 101$$

ع۔ا۔م کا $\text{HCF}[96, 404] = 2^2 = 4$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{HCF}[a, b] \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$$

$$\therefore \text{LCM}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{HCF}[a, b]} = \frac{96 \times 404}{4}$$

$$= \frac{4 \times 14 \times 404}{4}$$

$$= 14 \times 404$$

$$= 5656$$

مثال 7 : 90,54,12 کا ع۔ا۔م(HCF)اور ذ۔ا۔م(LCM) مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجئے۔

حل : دیئے گئے اعداد 12، 54، 90

2 | 90	2 | 54	2 | 12
3 | 45	3 | 27	2 | 6
3 | 15	3 | 9	3 | 3
5 | 5	3 | 3	1
1	1	

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$$

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^3$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^1 \times 3^2 \times 5$$

یہاں بالترتیب 2^1 اور 3^1 بالترتیب 2 اور 3 کے سب سے چھوٹے قوت نما والے مشترک اجزائے ضربی ہیں۔

(12،54،90) کا ع۔ا۔م (HCF) = $6 = 2^1 \times 3^1$

یہاں بالترتیب 2^2 ، 3^3 ، 5^1 بالترتیب 2، 3 اور 5 کے سب سے بڑے قوت نما والے مشترک اجزائے ضربی ہیں۔

(12،54اور90) کا ذ۔ا۔م (LCM) = $2^2 \times 3^2 \times 5^1$

$$= 4 \times 27 \times 5$$

$$= 20 \times 27$$

$$= 540$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. مندرجہ ذیل میں دیئے گئے اعداد کو مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کیجئے

(i) 256 (ii) 3825 (iii) 7429

2. مندرجہ ذیل صحیح اعداد کے ذ۔ا۔م(LCM)اور ع۔ا۔م(HCF) مفرد اجزائے ضربی کے طریقے سے معلوم کیجئے۔

(i) 12، 15 اور 21 (ii) 72 اور 108

(iii) 306 اور 657 (iv) 84 اور 180

3. وضاحت کیجئے کہ کیوں $7 \times 11 \times 13 + 17$ اور $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ مرکب اعداد ہیں؟

4. 42 اور 98 کا ذ۔ا۔م(LCM) معلوم کیجئے اور پھر ع۔ا۔م(HCF) بھی معلوم کیجئے۔

1.2.3 ناطق عدد کا اعشاری اظہار

I. اعشاری کسور: ایسے کسور جس کے نسب نما 10 یا 10 کی قوت والے ہوں اعشاری کسور کہلاتے ہیں۔

مثلاً $\frac{3}{10}$ ، $\frac{45}{100}$ ، $\frac{156}{1000}$ ، ....

$\frac{3}{10}$ = 3 دسواں = 0.3

$\frac{3}{10}$ = 45 سواں = 0.45

$\frac{156}{1000}$ = 156 ہزارواں = 0.156

II. اعشاری اعداد کی ناطق اعداد (کسر) میں تبدیلی

اعشاری عدد کے نسب نما میں '1' لکھیں۔ ہندسہ 1 کے ساتھ اتنے ہی صفر لگایئے جتنے اعشاریہ کے بعد ہندسوں کی تعداد ہو۔ اب اعشاری عدد کے اعشاریہ کو حذف کر دیجئے اور اسے بطور شمار کنندہ کے لکھیے۔ حاصل کردہ ناطق عدد (کسر) کو اس کی اقل ترین شکل میں لکھیے۔

$\therefore \quad 0.37 = \frac{37}{100}$

$1.235 = \frac{1235}{1000} = \frac{247}{200}$

آیئے مختتم اعشاری اعداد اور غیر مختتم اعشاری اعداد کے بارے میں معلومات حاصل کرتے ہیں۔

مختتم اعشاری اعداد اور غیر مختتم اعشاری اعداد

ہم یہ جانتے ہیں کہ ہر ناطق عدد $\frac{p}{q}$ کی شکل میں پایا جاتا ہے جہاں p اور q صحیح اعداد ہیں اور $q \neq 0$

اگر $q = 2^m \times 5^n$ جہاں پر 'm' اور 'n' مثبت صحیح اعداد ہیں، 2 یا 5 یا دونوں q کے اجزائے ضربی ہونے چاہئیں۔ تب ناطق عدد مختتم اعشاری عدد ہو جائے گا۔ اگر نہیں تب اسے غیر مختتم تکراری اعشاریہ کہیں گے۔

مثال 8 : ناطق عدد $\frac{11}{10}$ مختتم اعشاری عدد ہے یا نہیں معلوم کیجئے اور تصدیق کیجئے۔

حل: دیئے گئے ناطق عدد کا نسب نما = $20 = 2\times2\times 5$

نسب نما میں اجزائے ضربی کے طور پر صرف 2 اور 5 ہیں۔

$\therefore$ یہ ایک مختتم اعشاری عدد ہوگا۔

تصدیق: تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے تصدیق کریں گے۔

$$\begin{array}{r l} 20)\,11 & (0.55 \\ \underline{0} & \\ 110 & \\ \underline{100} & \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

$\frac{11}{20} = 0.55$

یہاں باقی 0 ہے

$\therefore$ یہ ایک مختتم اعشاری عدد ہے

مثال 9 : $\frac{128}{70}$ کو اعشاری عدد میں ظاہر کیجئے اور معلوم کیجئے کہ یہ مختتم ہے یا نہیں؟

مرحلہ 1: شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کیجئے۔(اقل ترین شکل)

$$\frac{128}{70} = \frac{2 \times 64}{2 \times 35} = \frac{128}{70}$$

مرحلہ 2: نسب نما کو مفرد اعداد کے اجزائے ضربی کی شکل میں لکھئے۔غور کیجئے کہ کیا یہ 5^n . 2^m کی شکل میں ہیں۔یہ 5^n . 2^m کی شکل میں ہیں۔

چونکہ یہ 5^n . 2^m کی شکل میں نہیں ہیں۔

لہٰذا یہ ایک مختتم اعشاری عدد نہیں ہے۔

مرحلہ 3: تقسیمی عمل اس وقت تک جاری رکھیں جب تک کہ باقی، مقسوم علیہ سے چھوٹا حاصل ہو جائے۔

$29 < 35$

مرحلہ 4: اعشاریہ کو مقسوم میں اور خارج قسمت کے آخر میں لگایا جائے۔

مرحلہ 5: صفر کو مقسوم میں اور ساتھ ہی ساتھ باقی میں اعشاریہ کی سیدھی جانب لگایا جائے۔دوبارہ اس کو مکمل عدد کی طرح تقسیم کریں۔

مرحلہ 6: مرحلہ نمبر 5 کو تب تک جاری رکھیں جب تک کہ باقی '0' نہ حاصل ہو جائے یا محصلہ عدد کا اعشاری مقام حاصل ہو۔

```
35)64.0000000...  (1.828571
   35
   290
   280
    100
     70
     300
     280
     200
     175
      250
      245
        50
        35
        150
        140
       10   دوہرانا شروع ہوا۔
```

یہاں اعشاری کسر جاری ہے ....

$$\frac{64}{35} = 1.8285714285714...$$

جہاں 285714 تکراری یا بار بار دہرایا جا رہا ہے۔

اسے ہم اس طرح لکھتے ہیں۔ $\frac{64}{35} = 1.8\overline{285714}$

اور اسے ایک اعشاریہ آٹھ بار دو آٹھ پانچ سات ایک چار پڑھیں گے۔

ایسے اعداد کو ہم غیر مختتم تکراری اعشاریہ کہتے ہیں۔

نوٹ: اگر نسب نما 5^n . 2^m کی شکل میں نہ ہو تو وہ غیر مختتم تکراری اعشاری عدد ہو گا۔

مثال 10 : مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں لکھئے اور ان میں سے کون سے مختتم اور غیر مختتم تکراری اعشاری اعداد ہیں؟ معلوم کیجئے۔

(i) $\frac{11}{60}$ (ii) $\frac{3}{75}$

حل: (i) $\frac{11}{60}$

$$
\begin{array}{l}
60)11\ (0.1833 \\
0 \\
\hline
110 \\
60 \\
\hline
500 \\
480 \\
\hline
200 \\
180 \\
\hline
20
\end{array}
$$

$0.18\bar{3} = \frac{11}{60}$ ایک غیر مختتم تکراری اعشاری عدد ہے۔

(ii) $\frac{3}{75} = \frac{3}{3\times5\times5} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25}$ (اقل ترین شکل)

$$
\begin{array}{l}
25)\ 1\ (0.04 \\
\ 0 \\
\hline
10 \\
0 \\
\hline
100 \\
100 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$0.04 = \frac{1}{25}$ ایک مختتم اعشاری عدد ہے۔

مثال 11 : مندرجہ ذیل میں دیے گئے ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے بتایئے کہ کون سے مختتم اعشاری اعداد ہیں اور کون سے غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں۔

(i) $\frac{51}{170}$ (ii) $\frac{77}{210}$ (iii) $\frac{129}{2^3.3^1.5^2}$

حل: (i) $\frac{51}{170}=\frac{17\times3}{17\times10}=\frac{3}{10}$ $\frac{3}{10} = \frac{17\times3}{17\times10} = \frac{51}{170}$ $\frac{51}{170}=\frac{17\times3}{17\times10}=\frac{3}{10}$ $\frac{3}{2\times5}$ مختتم اعشاری ہے

(ii) $\frac{77}{210}=\frac{7\times11}{7\times2\times3\times5}=\frac{11}{2\times3\times5}$ $= \frac{7\times11}{7\times2\times3\times5} =$ $\frac{77}{210}=\frac{7\times11}{7\times2\times3\times5}=\frac{11}{2\times3\times5}$ (اقل ترین شکل)

ناطق عدد کو اقل ترین شکل میں لکھنے کے بعد آپ نسب نما پر غور کیجئے۔

یہاں نسب نما 3 ہے۔

$\therefore \dfrac{77}{210}$ ایک غیر مختتم تکراری اعشاری ہے۔

(iii) $\dfrac{129}{2^3.3^1.5^2} = \dfrac{3\times 43}{2^3\,.\,3.5^2} = \dfrac{43}{2^3.5^2}$

$\therefore$ مختتم اعشاری ہے۔

مثال 12 : مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کئے اعشاری پھیلاؤ میں لکھئے۔

(i) $\dfrac{7218}{3^2.5^2}$ (ii) $\dfrac{9}{80}$

مرحلہ1: دیئے ہوئے ناطق عدد کو اقل ترین شکل میں لکھیں۔

مرحلہ2: نسب نما کو دیکھئے۔نسب نما کو $2^m \times 5^n$ کی شکل میں بدلئے جو 10^n کے مساوی ہو۔

مرحلہ3: اعشاری شکل میں لکھئے۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 7218 \\ 3 & 3609 \\ 3 & 1203 \\ 401 & 401 \\ & 1 \end{array}$$

$$7218 = 2\times 3\times 3\times 401$$
$$= 2\times 3^2\times 401$$

(i) $\dfrac{7218}{3^2.5^2}$

$$\frac{7218}{3^2.5^2} = \frac{2\times 3^2\times 401}{3^2.5^2}$$
$$= \frac{2\times 401}{5^2}$$
$$= \frac{802}{5^2}$$
$$= \frac{802}{5^2}\times\frac{2^2}{2^2}$$
$$= \frac{802\times 4}{(5\times 2)^2}$$
$$= \frac{3208}{(10)^2}$$
$$= \frac{3208}{100}$$
$$= 32.08$$

(ii) $\frac{9}{80}$

$$\frac{9}{80} = \frac{9}{2^4 \times 5}$$

$$= \frac{9}{2^4 \times 5} \times \frac{5^3}{5^3}$$

$$= \frac{9 \times 125}{2^4 \times 5^4} = \frac{1125}{10^4} = 0.1125.$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 80 \\ \hline 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 2^4 \times 5$$

غیر مختتم تکراری اعشاری اعداد

خالص تکراری اعشاری اعداد: ایسی اعشاری کسر جس میں اعشاریہ کے بعد آنے والے تمام ہندسوں کی دوریت ہو یا اعشاریہ کے بعد تمام ہندسوں کی تکرار ہو خالص تکراری اعشاری اعداد کہلاتے ہیں۔

مثال: $0.\overline{5}$ ، $0.\overline{27}$ ، $0.\overline{675}$ ، ···· وغیرہ

خالص تکراری اعشاری کی ناطق عدد (کسر) میں تبدیلی

مرحلہ 1 : شمارکنندہ میں دہرائے جانے والے ہندسوں کو صرف ایک بار لکھیں۔

مرحلہ 2 : تکراری ہندسوں کی تعداد کے برابر نسب نما میں 9 لکھئے۔

مثال: (i) $\frac{3}{9} = 0.\overline{3}$

(ii) $\frac{49}{99} = 0.\overline{49}$

(iii) $\frac{5067}{99999} = \frac{05067}{99999} = 0.\overline{05067}$

مرکب تکراری اعشاری عدد: ایسی اعشاری کسر جس میں اعشاریہ کے بعد چند ہندسے دہرائے ہوئے (تکراری) ہوتے ہیں اور بعض نہیں، مرکب تکراری اعشاری عدد کہلاتے ہیں۔

مثال: $0.25\overline{7} = 0.25777...$

مرکب تکراری اعشاری کی ناطق عدد (کسر) میں تبدیلی

اگر دی گئی اعشاری شکل اس صورت میں ہو۔

(i) $\frac{xyz - x}{990} = 0.x\overline{yz}$

(ii) $\frac{xyzd - xy}{990} = x.y\overline{zd}$

$$\frac{xyzdab - xyz}{9990} = xy.z\overline{dab} \quad \text{(iii)}$$

مثال: i) $\frac{754}{495} = \frac{1508}{990} = \frac{1523 - 15}{990} = 1.5\overline{23}$

$$\frac{2257}{9900} = \frac{2279 - 22}{9900} = 0.22\overline{79}$$

غیر مختتم، غیر تکراری اعشاری اعداد

مندرجہ ذیل اعشاری اعداد پر غور کیجئے

(i) 0.0234567891011 ....

(ii) 4.56777888899999

جی ہاں! مندرجہ بالا اعداد نہ تو مختتم ہیں اور نہ ہی تکراری بلکہ یہ غیر مختتم غیر تکراری اعشاری اعداد ہیں۔

ہم اوپر دیئے گئے اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھ سکتے۔

لہٰذا یہ اعداد غیر ناطق اعداد ہیں۔

مذکورہ بالا کی روشنی میں ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایسا اعشاری پھیلاؤ جو غیر مختتم اور غیر تکراری ہو؛ غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔

ناطق اعداد کا ناکافی ہونا

ذیل کی مساوات کو حل کیجئے۔ (i) $x^2 = 4$ (ii) $x^2 = 2$

مساوات (i) کے لئے

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$ (ناطق عدد ہے)

مساوات (ii) کے لیے

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

ہم $\sqrt{2}$ کو ناطق اعداد کے سٹ میں نہیں پاتے۔ لہٰذا ہمیں ایسے اعداد کی ضرورت محسوس ہوئی جو ناطق اعداد کے علاوہ ہوں۔

نوٹ: اگر n ایسا طبعی عدد ہے جو کامل مربع نہیں تب $\sqrt{n}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

اب ہم $\sqrt{2}$ کی قدر طویل تقسیم کے طریقہ سے معلوم کریں گے۔

1	2.00,00,00,00,00 ...	1.41421
	1......................	
24	100	
	96	
281	400	
	281	
2824	11900	
	11296	
28282	60400	
	56564	
282841	383600	
	282841	
	100759	

مرحلہ 1 : 2 کے بعد اعشاریہ لگائیے۔اعشاریہ کے بعد اتنے ہی صفر لگائیے جتنے ہندسوں تک آپ دئے گئے غیر ناطق عدد کی قیمت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ اعشاریہ کے دونوں جانب دو ہندسوں کے بعد کاما لگا کر جوڑیاں بنالیں۔صحیح عددی حصے کے لئے دائیں سے بائیں کی طرف اور اعشاری حصے کے لئے بائیں سے دائیں طرف جوڑیاں بنائیے۔

مرحلہ 2 : اعشاریہ کے بائیں طرف موجود ہندسہ کو دیکھئے۔

مرحلہ 3 : 2 سے قریب تر کامل مربع لیجئے۔

یہاں $1 \times 1 = 1^2 = 1$ ‘2 سے قریب تر کامل مربع ہے۔

مرحلہ 4 : تقسیم کے مراحل کو پورا کیجئے۔

مرحلہ 5 : اب ایک صفر کی جوڑی نیچے اتاریئے۔

مرحلہ 6 : پچھلے خارج قسمت کا دوگنا کیجئے اور اسے دوسرے قدم (مرحلہ) میں لکھئے۔

یہاں $2 \times 1 = 2$

مرحلہ 7 : اب آپ خارج قسمت اور مقسوم علیہ میں ایسا عدد لکھیں گے جو تقسیم کے عمل کو پورا کرتا ہو۔

$2\boxed{1} \times \boxed{1} = 21$ ہمارے پاس موجود مقسوم (100) سے بہت زیادہ چھوٹا ہے اور باقی مقسوم علیہ 21 سے بڑا ہوگا۔

$2\boxed{2} \times \boxed{2} = 44$ مقسوم (100) سے بہت چھوٹا ہے۔

$2\boxed{3} \times \boxed{3} = 69$ مقسوم (100) سے چھوٹا ہے۔

$2\boxed{4} \times \boxed{4} = 96$ مقسوم (100) سے قریب تر ہے (لیجئے)

مرحلہ 8 : اسی طرح اسے کرتے جائیں/ جاری رکھیں۔

یہاں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ..... $\sqrt{2} = 1.41421$ جو ایک غیر مختتم اور غیر تکراری اعشاری عدد ہے۔

لہٰذا یہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

مسئلہ 1: فرض کیجئے کہ p ایک مفرد عدد ہے۔اگر P‘ a^2 کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے (جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے)
تب p‘ a کو بھی مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔

اس طرح کہ

اگر $\frac{a^2}{p}$ تب $\frac{a}{p}$ ('1' تقسیم کو بتلاتا ہے)

مثال: $p = 2$ ؛ $a = 4$

$$8 = \frac{16}{2} = \frac{4^2}{2}$$

اب ہمیں ثابت کرنا ہوگا کہ $\frac{4}{2} = 2$ (2‘4 کو بھی تقسیم کرتا ہے)

مثال 13 : ثابت کیجئے $\sqrt{3}$ کہ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

حل: فرض کرو کہ $\sqrt{3}$ ایک ناطق عدد ہے۔

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3}b$$

دونوں جانب مربع کرنے پر

$$a^2 = 3b^2$$

$$\therefore \frac{3}{a^2} = b^2$$

مسئلہ کے تحت، $\frac{3}{a}$ ـــــ (1)

$\therefore a = 3c$ کوئی c کے لئے

دونوں جانب مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوگا۔

$$a^2 = (3c)^2$$

$$a^2 = 9c^2$$

لیکن $a^2 = 3b^2$

$$\therefore \quad 3b^2 = 9c^2$$

$$b^2 = \frac{9}{3}c^2$$

$$b^2 = 3c^2$$

$$\therefore \quad \frac{b^2}{3} = c^2$$

مسئلہ کی رو سے

$$\frac{3}{b} \quad \dots (2)$$

مساوات (1) اور (2) سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ a اور b کا مشترکہ جز ضربی 3 ہے۔

لیکن یہ ایک تضاد ہے کیونکہ حقیقتاً a اور b ہم مفرد اعداد ہیں۔

یہ تضاد اس لئے وجود میں آیا کیوں کہ ہم نے $\sqrt{3}$ کو ناطق عدد فرض کیا ہے جو غلط ہے۔لہٰذا ہم اس بات کی تصدیق کرتے ہیں کہ $\sqrt{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

نوٹ 1 : ایک ناطق عدد اور غیر ناطق عدد کا مجموعہ یا فرق غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

نوٹ 2 : ایک ناطق اور غیر ناطق عدد کا حاصل ضرب یا خارج قسمت بھی غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

مثلاً: $5+\sqrt{3}$، $3\sqrt{2}$، $4-\sqrt{5}$، $\frac{4}{\sqrt{5}}$ غیر ناطق اعداد ہیں۔

حقیقی اعداد (R)

ناطق اور غیر ناطق اعداد مل کر ایک عددی خط کا احاطہ کرتے ہیں۔ان دونوں کا یکجا کیا جانا اعداد کی ایک نوعیت کو ظاہر کرتا ہے جس کو حقیقی اعداد (R) کہتے ہیں۔اور اس کو R سے ظاہر کرتے ہیں۔ہر حقیقی عدد ایک منفرد نقطہ کو عددی خط پر ظاہر کرتا ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو p/q کی شکل میں لکھیے۔

(i) 0.275 (ii) 0.0125 (iii) 32.25

2. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں لکھیے۔

(i) $\frac{2}{25}$ (ii) $\frac{41}{90}$ (iii) $\frac{18}{125}$ (iv) $\frac{5}{11}$

3. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں لکھیے اور ان میں سے کون سے مختتم اور غیر مختتم تکراری اعشاری اعداد ہیں؟ معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{5}{16}$ (ii) $\frac{343}{400}$ (iii) $\frac{216}{600}$ (iv) $\frac{3}{7}$

4. مندرجہ ذیل میں دیے گئے ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کئے بتائیں کہ کون سے مختتم اعشاری ہیں اور کون سے غیر مختتم تکراری اعشاریہ ہیں:

(i) $\frac{27}{625}$ (ii) $\frac{91}{1300}$ (iii) $\frac{441}{2^3.5^2.7^2}$ (iv) $\frac{21}{24}$

5. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے اعشاری پھیلاؤ میں ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{41}{25}$ (ii) $\frac{56}{2^3 5}$ (iii) $\frac{143}{110}$

6. کوئی چار غیر ناطق اعداد لکھیے اور انہیں اعشاری شکل میں ظاہر کیجیے۔

7. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھیے۔

(i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{256}$ (iii) $0.\overline{2375}$

8. مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو p/q کی شکل میں لکھیے۔

(i) $15.7\overline{25}$ (ii) $1.37\overline{5}$ (iii) $20.00\overline{11}$ (iv) $3.\overline{42}$

مشق

1. مندرجہ ذیل صحیح اعداد کے ذ۔ا۔م(LCM) اور ع۔ا۔م(HCF) مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کیجئے۔

(i) 8, 24, 56 (ii) 108 اور 144

(iii) 5, 50, 625 (iv) 72 اور 180

2. دیئے گئے اعشاری اعداد کو p/q کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) 0.675 (ii) 0.018 (iii) 2.375

3. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری شکل میں لکھئے۔

(i) $\frac{14}{25}$ (ii) $\frac{22}{7}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{52}{250}$

4. مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو بغیر تقسیم کیے بتایئے کہ ان میں سے کون سے مختتم اعشاری ہوں گے اور کون سے غیر مختتم، تکراری ہوں گے؟

(i) $\frac{29}{125}$ (ii) $\frac{23}{150}$ (iii) $\frac{333}{2^3 5^3}$ (iv) $\frac{27}{2^4 5^4 7^2}$

5. مندرجہ ذیل کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) $0.\overline{7}$ (ii) $0.\overline{13}$ (iii) $0.\overline{435}$ (iv) $1.2\overline{3}$

(v) $12.\overline{23}$ (vi) $3.\overline{143}$

6. ثابت کیجئے کہ $5\sqrt{3}$ ، $4\sqrt{6}$ ، $3+\sqrt{7}$ غیر ناطق ہیں۔

آیئے خلاصہ کریں

- کوئی دو ناطق اعداد کے درمیان ہم لامتناہی ناطق اعداد معلوم کر سکتے ہیں۔
- ناطق اعداد کا موازنہ کرنے کے لئے نسب نما کو مساوی بناتے ہیں اس کے لئے انہیں معادل شکل میں لکھتے ہیں۔اس کے بعد ان کے شمار کنندہ کا موازنہ کیا جاتا ہے۔جس ناطق عدد کا شمار کنندہ بڑا ہوگا وہ ناطق عدد بڑا ہوگا۔
- حساب کا بنیادی مسئلہ یہ بتلاتا ہے کہ ہر غیر مفرد عدد (مرکب عدد) کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کر سکتے ہیں جو ایک منفرد جز ضربی رکھتا ہے۔
- ع۔ا۔م(HCF) اور ذ۔ا۔م(LCM) مفرد اجزائے ضربی کے طریقہ سے معلوم کرنا۔

- ❖ ع۔ا۔م (HCF) (a, b) × ذ۔ا۔م (LCM) $(a, b) = a \times b$
- ❖ اگر $x = p/q$ ناطق عدد ہے اس طرح کہ q کے مفرد اجزائے ضربی $2^m.5^n$ کی شکل میں ہوتے ہیں جہاں m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں تب x کی اعشاری پھیلاؤ مختتم ہوتا ہے۔
- ❖ اگر q ، $2^m.5^n$ کی شکل میں نہ ہو تب x کی اعشاری پھیلاؤ غیر مختتم اور تکراری ہوتا ہے۔
- ❖ اگر $'p'$ ایک مفرد عدد ہے اور p ، q کو مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے جہاں a ایک مثبت صحیح عدد ہے تب p ، a کو بھی مکمل طور پر تقسیم کرتا ہے۔
- ❖ ناطق اور غیر ناطق اعداد کا مجموعہ (Collection) کو حقیقی اعداد کہتے ہیں۔ حقیقی اعداد کو R سے ظاہر کیا جا تا ہے۔

سبق
1.3

قوت اور قوت نما
Powers and Exponents

1.3.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- مکرر ضرب کو قوت نما کی شکل میں اور قوت نما کو مکرر ضرب کی شکل میں لکھ سکیں۔
- قوت نما کی شکل میں لکھے ہوئے عدد کی اساس اور قوت کی نشاندہی کر سکیں۔
- طبعی عدد کو مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کر سکیں۔
- قوت نما کے قوانین کو بیان کر سکیں۔
- a^0 اور a^{-m} کے معنی واضح کر سکیں۔
- قوت نما کے قوانین کا استعمال کر کے قوت نما پر مشتمل عبارتوں کو حل کر سکیں۔

1.3.1 تعارف

فرض کیجئے کہ آپ اپنے شہر میں شجر کاری کرنا چاہتے ہیں۔ شہر میں آپ تنہا جتنے پودے لگا سکتے ہیں اس سے کئی گنا زیادہ پودے دیکھنا چاہتے ہیں۔ آپ کو زنجیری شجر کاری کا منصوبہ بنانا ہوگا۔

آپ ایک پودا لگائیں گے اور تین ممبروں کو ایک ایک پودا لگانے کے لئے اکسائیں گے اور ساتھ ہی یہ بھی بتلائیں گے کہ ان میں سے ہر ایک ممبر مزید تین ممبروں کو پودا لگانے کے لئے راغب کریں۔ اس طرح اگر یہ سلسلہ اسی طرح چلتا رہا تب

10 ویں مرحلے میں لگائے گئے پودوں کی تعداد کیا ہوگی؟

30 ویں مرحلے میں لگائے گئے پودوں کی تعداد کیا ہوگی؟

سہولت کے لیئے آپ کا لگایا ہوا پودا حساب میں شامل نہیں کریں گے۔

چلئے پودوں کی تعداد کا حساب لگائیں:

پہلا مرحلہ ← 3 پودے = 3

دوسرا مرحلہ ← 9 پودے = 3 x 3

تیسرا مرحلہ ← 27 پودے = 3 x 3 x 3

چوتھا مرحلہ ← 81 پودے = 3 x 3 x 3 x 3

اسی طرح دسویں مرحلے میں 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 جس کی قدر 59049 ہوگی۔

30 ویں مرحلے میں ممبروں کی تعداد ...3 x 3 x 3 (30 مرتبہ) جو 205891132094649 کے برابر ہوگی جسے پڑھنا اور یاد رکھنا آسان نہ ہوگا۔

تب آپ ان جیسے اعداد (قدروں) کو آسان (سادہ) طریقہ سے کیسے ظاہر کر سکتے ہیں؟

اس طرح، ہم بہت ساری صورتوں میں اس قسم کے اعداد کے نمونوں کا سامنا کیا ہے۔ پچھلے سبق میں ہم دو یا دو سے زائد حقیقی اعداد کی ضرب کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آپ مندرجہ ذیل کو بآسانی لکھ سکتے ہیں۔

$64 = 4 \times 4 \times 4$

$14641 = 11 \times 11 \times 11 \times 1$

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

ذرا سوچئے، اگر 13 کو 15 مرتبہ ضرب دیا جائے تو اسے لکھنا کتنا مشکل ہوگا؟

$13 \times 13 \times 13 \times$ ...... 15 مرتبہ

ہم اس مشکل کو قوت نما کے ذریعہ حل کر سکتے ہیں۔

اس سبق میں ہم اس قوت نما کی علامتوں کے معنی کی وضاحت کریں گے، قوت نما کے قوانین کو بیان کریں گے اور انہیں ثابت کریں گے نیز حقیقی اعداد کو مفرد اعداد کے قوتوں کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کریں گے۔

1.3.2 قوت نمائی شکل، قوت نما کا معنی

یاد کیجئے، سبق کے تعارف میں دی ہوئی شجر کاری کی مثال چلیئے پودوں کی تعداد کا حساب لگائیں:

پہلا مرحلہ ← 3 پودے $= 3$

دوسرا مرحلہ ← 9 پودے $= 3 \times 3$

تیسرا مرحلہ ← 27 پودے $= 3 \times 3 \times 3$

چوتھا مرحلہ ← 81 پودے $= 3 \times 3 \times 3 \times 3$

اسی طرح دسویں مرحلے میں ← $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ جس کی قدر 59049 ہوگی۔

30 ویں مرحلے میں ممبروں کی تعداد (30 مرتبہ) ...... $3 \times 3 \times 3 \times$ جس کی قدر 205891132094649 ہوگی جس کا پڑھنا اور یاد رکھنا آسان نہ ہوگا۔

لیکن ریاضی اسے آسان بناتا ہے۔

مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کیجئے۔

3×3 کو 3^2 لکھا جاتا ہے (3^2 کو تین کی قوت 2 یا تین کا مربع پڑھا جاتا ہے)

$3 \times 3 \times 3$ کو 3^3 لکھا جاتا ہے (3^3 کو تین کی قوت 3 یا تین کا مکعب پڑھا جاتا ہے)

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ کو 3^4 لکھا جاتا ہے (3^4 کو 3 کی قوت 4 پڑھا جاتا ہے)

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ کو 3^5 لکھا جاتا ہے (3^5 کو 3 کی قوت 5 پڑھا جاتا ہے)

اسی طرح $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ کو 3^{10} لکھا جاتا ہے (3^{10} کو 3 کی قوت 10 پڑھا جاتا ہے)

تب $3 \times 3 \times 3 \times \ldots\ldots$ (30 مرتبہ) کو کیسے لکھیں گے؟

بالکل صحیح ! آپ کا خیال درست ہے......

$3 \times 3 \times 3 \times \ldots\ldots$ (30 مرتبہ) کو 3^{30} لکھا جائے گا۔

لہٰذا ریاضی نے بڑے اعداد کے اظہار کو آسان بنادیا‘ جیسے کہ 205891132094649 کو سادہ انداز میں 3^{30} لکھا جائے گا۔

آیئے اصطلاحات کو جانیں

ہم 3^5 کو 3 کی قوت 5 یا 3 کی پانچویں قوت پڑھتے ہیں۔ جہاں 3 اساس ہے‘ 5 قوت یا قوت نما یا اشاریہ ہے۔

مذکورہ بالا بیان کی بنیاد پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ

کسی عدد کو اسی عدد سے کئی مرتبہ ضرب کر کے لکھنے کا طریقہ قوت نمائی کی شکل کہلاتی ہے۔

اس طرح $5^{20} = 5 \times 5 \times \ldots\ldots$ 20 مرتبہ اور $(-7)^{10} = (-7) \times (-7) \times \ldots\ldots$ 10 مرتبہ

5^{20} میں‘ 5 اساس اور 20 قوت نما ہے۔

$(-7)^{10}$ میں‘ (-7) اساس اور 10 قوت نما ہے۔

اسی طرح قوت نمائی شکل کا استعمال خود سے کئی مرتبہ ضرب ہونے والے ناطق عدد کے حاصل ضرب کو لکھنے کے لیے کیا جاسکتا ہے۔

اس طرح،

$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^6$ جب کوئی ناطق عدد بار بار ضرب ہوتا ہے تب قوت نمائی شکل میں لکھنے کے لئے قوسین کا استعمال کیا جاتا ہے جہاں پر $\frac{4}{7}$ اساس اور 6 قوت یا قوت نما ہے۔

اور $-\frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} \times \ldots\ldots\ldots\ldots$ (13 مرتبہ) $= \left(-\frac{3}{4}\right)^{13}$

عمومی طور پر اگر 'a' ناطق عدد ہے جو خود سے 'm' مرتبہ ضرب ہوتا ہے تو اسے a^m کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

یہاں 'a' **اساس** اور 'm' **قوت نما** کہلاتا ہے۔

آیئے مذکورہ بالا کی وضاحت کے لئے چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے:

(i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5)$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times \ldots\ldots\ldots$ (50 مرتبہ)

حل : (i) $(-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = (-5)^7$

(ii) $-\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times -\frac{2}{5} \times \ldots\ldots\ldots$ (50 مرتبہ) $= \left(-\frac{2}{5}\right)^{50}$

مثال 2 : مندرجہ ذیل کو قوت نمائی شکل میں لکھئے نیز ان کے اساس اور قوت نما بھی لکھئے۔

(i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$ (100 مرتبہ)

حل : (i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^9$

اساس = $\frac{2}{3}$ ، قوت نما = 9

(ii) $(-27) \times (-27) \times (-27) \times \ldots$ (100 مرتبہ) $= (-27)^{100}$

اساس = -27، قوت نما = 100

مثال 3 : مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $(2)^5$ (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (iii) $(1)^{2019}$

حل : (i)

$$(2)^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 4 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$= 8 \times 2 \times 2$$
$$= 16 \times 2$$
$$= 32$$

(ii)

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{9}{25} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{27}{125} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{81}{625}.$$

(iii) $(1)^{1947} = 1 \times 1 \times 1\times \ldots\ldots$ (1947مرتبہ)

یہاں $1 \times 1 = 1$

اور $1 \times 1 \times 1 = 1$

اسی طرح $1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots$ (1947مرتبہ) $= 1$

لہٰذا $(1)^{1947} = 1$

1 کی قوتیں :

مندرجہ ذیل کا مشاہدہ کیجئے۔

$(-1)^2 = -1\times -1= 1$

$(-1)^3 = -1\times -1\times -1= -1$

$(-1)^4 = -1\times -1\times -1\times -1=1$

$(-1)^5= -1\times -\times -1\times -1\times -1= -1$

$(-1)^6 = -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = 1$

$(-1)^7 = -1\times -1\times -1 \times -1 \times -1 \times -1 \times -1 = -1$

جب ہم مندرجہ بالا نمونوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

ہم کہہ سکتے ہیں:

اگر n جفت عدد ہے تب $(-1)^n = 1$

اگر n طاق عدد ہے تب $(-1)^n = -1$

n جفت ہے؛ $(-1)^n = 1$
n طاق ہے؛ $(-1)^n = -1$

عدد کی قوت کا مقلوب

یاد کیجئے کہ $\frac{2}{3}$ کا مقلوب $\frac{3}{2}$ ہے۔

4 کا مقلوب $\frac{1}{4}$ ہے

عام طور پر، $\frac{p}{q}$ کا مقلوب $\frac{q}{p}$ ہے جہاں $p,q \neq 0$

مثال 4 : مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کا مقلوب لکھیے اور انہیں قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) 5^{20} (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

حل:

(i) ہم جانتے ہیں کہ 5 کا مقلوب $\frac{1}{5}$ ہے۔

لہٰذا 5^{20} کا مقلوب $\frac{1}{5^{20}}$ ہے یا ہم اسے $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{3}{4}$ کا مقلوب $\frac{4}{3}$ ہے۔

اس طرح $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ کا مقلوب $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ ہے۔

(iii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$

ہم جانتے ہیں کہ $-\frac{5}{6}$ کا مقلوب $-\frac{6}{5}$ ہے۔

اس طرح $\left(-\frac{5}{6}\right)^9$ کا مقلوب $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$ ہے۔

1.3.3 اعداد کا مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب میں ظاہر کرنا

عدد کا مفرد اجزائے ضربی کی قوت نما شکل

یاد کیجیے کہ کسی بھی مرکب عدد کو مفرد اعداد کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

آیئے 16، 243 اور 72 جیسے مرکب اعداد پر غور کرتے ہیں۔

(i) $16 = 2 \times 8$

$= 2 \times 2 \times 4$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

2	16
2	8
2	4
	2

3	243
3	81
3	27
3	9
	3

(ii) $243 = 3 \times 81$

$= 3 \times 3 \times 27$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 9$

$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(iii) $72 = 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

آیئے ان تمام مفرد اجزائے ضربیوں کو قوت نما کی شکل میں لکھیں۔

(i) $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$16 = 2^4$

(ii) $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$243 = 3^5$

(iii) $72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$72 = 2^3 \times 3^2$

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ 1 کے علاوہ کسی بھی طبعی عدد کو مفرد انداز میں مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب (اجزائے ضربی کی ترتیب کا لحاظ کیے بغیر) کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔

آیئے کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 5 : مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں لکھئے۔

(i) 360 (ii) 5445 (iii) 24300

حل :

2	360
2	180
2	90
3	45
3	15
	5

(i) $360 = 2 \times 180$

$= 2 \times 2 \times 90$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 45$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$= 2^3 \times 3^2 \times 5^1$

(ii) $5445 = 3 \times 1815$

$= 3 \times 3 \times 605$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 121$

$= 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11$

$= 3^2 \times 5^1 \times 11^2$

(iii) $24300 = 2 \times 12150$

2	24300
2	12150
3	6075
3	2025
3	675
3	225
3	75
5	25
	5

$= 2 \times 2 \times 6075$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 2025$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 675$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 225$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 75$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 25$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 2^2 \times 3^5 \times 5^2$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. مندرجہ ذیل کو قوت نما شکل میں ظاہر کیجئے

(i) $(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)$

(ii) 15 مرتبہ $\left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) \times \ldots\ldots$

(iii) 25 مرتبہ $\left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times \left(-\frac{2}{11}\right) \times \ldots\ldots$

2. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کا اساس اور قوت نما لکھئے۔

(i) $(-3)^5$ (ii) $(7)^4$ (iii) $\left(-\frac{6}{5}\right)^9$

3. مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$ (iv) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

4. مندرجہ ذیل کے مقلوب معلوم کیجئے۔

(i) $(3)^5$ (ii) $(-7)4$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{3}{11}\right)^{15}$

5. مندرجہ ذیل کو مفرد اعداد کی قوتوں کے حاصل ضرب یعنی قوت نما کی شکل میں لکھئے۔

(i) 429 (ii) 648 (iii) 1512

6. مندرجہ ذیل میں سے ہر ایک کو قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) 729 (ii) 512 (iii) 2592 (iv) $\frac{1331}{4096}$ (v) $-\frac{243}{32}$

1.3.4 قوت نما کے قوانین

حاصل ضرب کا اصول مندرجہ ذیل پر غور کیجیے۔

یاد کیجیے ہم ابتداء میں جان چکے ہیں کہ $3^2 = 3 \times 3$ اور $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

اوپر دی گئی قوتوں کا حاصل ضرب کیا ہوگا؟ یعنی 3^2 اور 3^4 کا حاصل ضرب؟

$$3^2 \times 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$$

آیئے مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں

$$3^2 \times 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^7$$
$$3^2 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$$
$$3^2 \times 3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^9$$
$$3^2 \times 3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{10}$$

یہاں ہر صورت میں، جب ہم یکساں اساس کے قوتوں کو ضرب دیتے ہیں تو ہمیں اسی اساس کے ساتھ قوت (جو دونوں اساسوں کی قوتوں کا مجموعہ ہوتی ہے) حاصل ہوتی ہے۔

دوسرے لفظوں میں کہیں تو جب یکساں اساس والی قوتوں کو ضرب دیا جاتا ہے تو قوتیں جمع ہوتی ہیں۔ آیئے اس کا عام اصول معلوم کریں:

$$a^2 \times a^3 = a \times a \times a \times a \times a = a^5$$
$$a^2 \times a^4 = a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$
$$a^2 \times a^5 = a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$$

.

.

.

$$a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \ldots m \text{ مرتبہ}) \times (a \times a \times a \times \ldots n \text{ مرتبہ})$$
$$= a \times a \times a \times \ldots (m+n) \text{ مرتبہ} = a^{m+n}$$

لہٰذا

قانون 1 : اگر a کوئی ناطق عدد ہے نیز m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں تو $a^m \times a^n = a^{m+n}$

مثال 6 : مختصر کیجئے

(i) $5^3 \times 5^4$ (ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$

حل :

(i) $(5)^3 \times (5)^4$ یہاں قوتوں کے اساس یکساں ہیں اور قوتیں ضرب ہورہی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{m+n}$

لہٰذا

$$(5)^3 \times (5)^4 = (5)^{3+4} = (5)^7$$

(ii) $(-7)^{13} \times (-7)^7$ یہاں قوتوں کے اساس یکساں (یعنی -7) ہیں اور قوتیں ضرب ہورہی ہیں، ہم جانتے ہیں کہ قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{m+n}$

لہٰذا

$$(-7)^{13} \times (-7)^7 = (-7)^{13+7} = (-7)^{20}$$

(iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40}$ یہاں قوتوں کے اساس یکساں (یعنی $\frac{4}{5}$) ہیں اور قوتیں ضرب ہورہی ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ قانون (1) کی رو سے، $a^m \times a^n = a^{m+n}$

لہٰذا

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{60} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{60+40} = \left(\frac{4}{5}\right)^{100}$$

تقسیم کا اصول

مندرجہ ذیل پر غور کیجئے۔

ہم جانتے ہیں کہ $3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ اور $3^2 = 3 \times 3$

لیکن جب ہم 3^7 کو 3^2 سے تقسیم کرتے ہیں تو خارج قسمت کیا ہوگا؟

$$\frac{3^7}{3^2} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

آیئے مزید چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

$$\frac{3^7}{3^3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times \cancel{3 \times 3 \times 3}}{\cancel{3 \times 3 \times 3}}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3} = \frac{3\times3\times3\times\cancel{3\times3\times3\times3}}{\cancel{3\times3\times3\times3}} = 3\times3\times3 = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{3\times3\times\cancel{3\times3\times3\times3\times3}}{\cancel{3\times3\times3\times3\times3}} = 3\times3 = 3^2$$

یہاں ہر ایک صورت میں، جب ہم **یکساں اساس والی قوتوں کو تقسیم کرتے ہیں** تو ہمیں **اسی اساس کے ساتھ قوت** (جو دونوں اساسوں کی قوتوں کا فرق ہوتی ہے)، حاصل ہوتی ہیں۔

$$\frac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$$

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{3^7}{3^6} = 3^{7-6} = 3^1$$

خارج قسمت میں لکھی جانے والی قوت نما کو مقسوم کی قوت نما میں سے مقسوم علیہ کی قوت نما کو تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

آیئے اس کا عام اصول معلوم کریں

$$\frac{a^7}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a\times a\times\cancel{a\times a}}{\cancel{a\times a}} = a^{7-2} = a^5$$

$$\frac{a^7}{a^3} = \frac{a\times a\times a\times a\times\cancel{a\times a\times a}}{\cancel{a\times a\times a}} = a^{7-3} = a^4$$

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a\times a\times a\times\cancel{a\times a\times a\times a}}{\cancel{a\times a\times a\times a}} = a^{7-4} = a^3$$

.

.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a\times a\times a\times\ldots(m \text{ مرتبہ})}{a\times a\times a\times a\times\ldots(n \text{ مرتبہ})} = \frac{a\times a\times a\times\ldots\times\cancel{a\times a\times a\times a\ldots\ldots}(m \text{ مرتبہ})}{\cancel{a\times a\times a\times a\ldots\ldots}(n \text{ مرتبہ})}$$

$$= a\times a\times a\times\ldots\ldots(m-n) \text{ مرتبہ} = a^{m-n}.$$

قانون 2 : اگر a کوئی غیر صفری ناطق عدد ہے تب $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ یا $a^m \div a^n = a^{m-n}$

مثال 7 : مختصر کیجیے

(i) $7^5 \div 7^3$ (ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ (iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$

حل :

(i) $7^5 \div 7^3$ میں اساس (یعنی 7) یکساں ہیں

ہم جانتے ہیں کہ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

لہٰذا $7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

(ii) $\frac{5^{10}}{5^6}$ میں اساس (یعنی 5) یکساں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

لہٰذا $\frac{5^{10}}{5^6} = 5^{10-6} = 5^4$

(iii) $\frac{13^{100}}{13^{25}}$ میں اساس (یعنی 13) یکساں ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

لہٰذا $\frac{13^{100}}{13^{25}} = 13^{100-25} = 13^{75}$

قوت نما کا اصول

$(5^2)^3$ پر غور کیجیے

$$(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$

اسی طرح $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$$= 5^6$$

اسی طرح

$$(5^2)^4 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$

اسی طرح $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$$= 5^8$$

$$(5^2)^5 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2 \times 5^2$$

اسی طرح $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$$= 5^{10}$$

یہاں ہر ایک صورت میں جب ہم قوت پر قوت لکھتے ہیں تب نتیجتاً قوت نما ان **قوتوں کا حاصل ضرب** ہوتی ہے۔

آ یئے ان مثالوں کے لیے عام اصول لکھتے ہیں۔

$$(5^3)^6 = 5^{3\times6} = 5^{18}$$

$$(5^3)^7 = 5^{3\times7} = 5^{21}$$

$$(5^3)^8 = 5^{3\times8} = 5^{24}$$

$$(5^3)^9 = 5^{3\times9} = 5^{27}$$

اسی طرح

$$(a^m)^n = a \times a \times a \times \ldots \quad (n \text{ مرتبہ})$$

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \quad (mn \text{ مرتبہ})$$

$$= a^{m\times n}$$

قانون 3 : اگر a ایک غیرصفری ناطق عدد ہے، تب $(a^m)^n = a^{m\times n}$

مثال 8 : مندرجہ ذیل کومختصر کیجئے۔

(i) $(3^5)^4$ (ii) $(1947^{10})^7$ (iii) $(1729^{100})^{13}$ (iv) $[(-5)^{11}]^5$

حل:

(i) $(3^5)^4 = 3^{5\times4} = 3^{20}$

(ii) $(1947^{10})^7 = 1947^{10\times7} = 1947^{70}$

(iii) $(1729^{100})^{13} = 1729^{100\times13} = 1729^{1300}$.

(iv) $[(-5)^{11}]^5 = (-5)^{11\times5} = (-5)^{55}$

صفر قوت نما:

ہم جانتے ہیں کہ

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$3^0 = 3^{1-1} = \frac{3^1}{3^1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$4^0 = 4^{1-1} = \frac{4^1}{4^1} = \frac{4}{4} = 1$$

.

.

.

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر غیر صفری ناطق عدد پر '0' قوت ہو تب اس کی قدر 1 ہوگی۔

قانون 4 : اگر a کوئی غیر صفری ناطق عدد ہے تب $a^0 = 1$ جہاں $(a \neq 0)$

منفی قوت نما:

دوبارہ اس پر غور کیجئے کہ $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$

اوپر دیئے ہوئے رشتے میں $m = 0$ درج کیجئے۔

تب $a^{0-n} = \dfrac{a^0}{a^n}$ اور ہم قانون (3) کی رو سے یہ بھی جانتے ہیں کہ $a^0 = 1$

اس طرح $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

قانون 5 : اگر a کوئی غیر صفری ناطق عدد ہے تب $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

یاد کیجئے کہ 2 کا مقلوب $\frac{1}{2}$ ہے اور 2^{-1} کا مقلوب $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

اسی طرح، 3 کا مقلوب $\frac{1}{3}$ ہے اور 3^{-1} کا مقلوب $\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$

4 کا مقلوب $\frac{1}{4}$ ہے اور 4^{-1} کا مقلوب $\frac{1}{4} = \frac{1}{4^1}$

لہٰذا عام طور پر ہم کہہ سکتے ہیں کہ **a کا مقلوب a^{-1}** ہوتا ہے۔

اسی طرح 2^3 کا مقلوب 2^{-3} ہے۔

3^5 کا مقلوب 3^{-5} ہے۔

7^{10} کا مقلوب 7^{-10} ہے۔

$\left(\frac{7}{3}\right)^4$ کا مقلوب $\left(\frac{7}{3}\right)^{-4}$ ہے۔ جو $\left(\frac{3}{7}\right)^4$ کے مساوی ہے۔

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ کا مقلوب $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ہے۔

اگر a کوئی غیر صفری ناطق عدد ہے اور m مثبت صحیح عدد ہے تب a^m کا مقلوب (یعنی $1/a^m$) کو a^{-m} لکھا جاتا ہے

اور a^{-m} کا مقلوب a^m لکھا جاتا ہے۔

مثال 9 : مندرجہ ذیل کو کسری عدد یا صحیح عدد میں ظاہر کیجئے۔

(i) 10^{-3} (ii) $(-2)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ (iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$

حل:

(i) $10^{-3} = \frac{1}{10^3}$ (کیونکہ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ قانون (5) کی رو سے)

$10^{-3} = \frac{1}{1000}$

(ii) $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5}$ (کیونکہ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ قانون (5) کی رو سے)

$(-2)^{-5} = \frac{1}{-2\times-2\times-2\times-2\times-2} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

(iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ (کیونکہ $a^{-1} = \frac{1}{a}$ قانون (5) کی رو سے)

اور $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

لہٰذا $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = (5^{-1})^{-3} = 5^{-1\times-3} = 5^3 = 125$

(iv) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}$ لہٰذا $\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}$ (جس طرح ہم نے اوپر بحث کی)

لہٰذا $\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1\times4} = \left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}\right]^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{4} = \frac{81}{625}$

اب تک ہم ایک اساس کے ساتھ قوتوں کے اُصول کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے کچھ مزید مختلف اساسوں کی قوتوں کے اُصولوں کے بارے میں جانیں گے۔

قانون 6 : $(a.b)^m = a^m.b^m$

قانون 7 : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^n}$ ، $(b \neq 0)$

ہم جانتے ہیں کہ $8 = 2^3$، کیا ہمارے پاس 2 کی قوت 3 کے علاوہ کوئی اور قوت نما ہے جو 8 کے مساوی ہو؟ اسی طرح ہمارے پاس کوئی عدد کی قوت کے برابر قدر اور مختلف قوت نمائی شکل نہیں ہے۔ لہٰذا ہم کہہ سکتے ہیں کہ:

قانون 8 : اگر $a^m = b^n$، تب $m = n$ جہاں $a > 0$ اور $a \neq 1$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

.1 (i) $x^3 \times x^5$ (ii) $a^{55} \times a^{45}$ (iii) $\left(\frac{x}{y}\right)^{70} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{130}$ (iv) $\left(\frac{p}{q}\right)^{500} \times \left(\frac{p}{q}\right)^{200}$

.2 (i) $\frac{x^{10}}{x^7}$ (ii) $a^{50} \div a^{20}$ (iii) $(xy)^{25} \div (xy)^{12}$ (iv) $\frac{(ab)^{300}}{(ab)^{200}}$

.3 (i) $(x^5)^2$ (ii) $(a^{10})^5$ (iii) $(x^3)^2 \times (x^2)^3$ (iv) $(a^5)^2 - (a^2)^5$

مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $2 + 2^{-1}$ (ii) $1 + 3^{-2}$ (iii) $2^{-3} + 5^{-2}$ (iv) $3^{-2} + 3^{-2} + 3^0$

1.3.5 قوت نما کے قوانین کا اطلاق (Applications of laws of exponents)

آیئے مزید قوت نما کے قوانین کے اطلاق کے بارے میں پڑھیں گے۔ مندرجہ ذیل سوالات کو آنے والے اور اوپر سیکھے ہوئے قوانین کے استعمال سے حل کئے گئے ہیں۔

مثال 10 : مختصر کیجیے اور ان میں سے ہر ایک کو قوت نمائی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $5x^3 \times 3x^7$ (ii) $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$ (iii) $\frac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

حل: (i) دیا گیا ہے $5x^3 \times 3x^7$

(مختصر کرنے کے دوران پہلے مستقل اعداد کو ضرب دیں پھر قوت نما کے قوانین کا اطلاق کریں)

$= 5x^3 \times 3x^7$ [قانون (1) کی رو سے: $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 15\,x^{10}$

(ii) دیا گیا ہے $(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$

$(2x^2y)^4 \times (25x^3y^2)^2$

$= (2^4x^{2\times4}y^4) \times (25^2\,x^{3\times2}\,y^{2\times2})$ [قانون (3) کی رو سے $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (16x^8y^4) \times (625x^6\,y^4)$

$= 16 \times 625\,x^{8+6}\,y^{4+4}$ [قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 10000x^{14}\,y^8$

(i) دیا گیا ہے $\dfrac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

$= \dfrac{(6a^3b^2)^4}{(36a^2b^3)^2}$

$= \dfrac{(6^4 a^{3\times4} b^{2\times4})}{(36^2 a^{2\times2} b^{3\times2})}$ [قانون (3) کی رو سے $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= \dfrac{1296\ a^{12}b^8}{1296a^4b^6}$

$= a^{12-4}b^{8-6}$ [قانون (2) کی رو سے $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= a^8b^2.$

مثال 11 : مختصر کیجئے اور ہر ایک کو قوت نما کی شکل میں لکھئے۔

(i) $\{(2^3)^4 \times 2^8\} \div 2^{12}$

$= \{2^{12} \times 2^8\} \div 2^{12}$ [قانون (3) کی رو سے $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= 2^{(12+8)} \div 2^{12}$ [قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 2^{20} \div 2^{12}$ [قانون (2) کی رو سے $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 2^{(20-12)}$

$= 2^8$

(ii) $(8^2 \times 8^4) \div 8^3$

$(8^2 \times 8^4) \div 8^3$ [قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 8^{(2+4)} \div 8^3$

$= 8^6 \div 8^3$ [قانون (2) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 8^{(6-3)}$

$= 8^3$ [8 کے مفرد اجزائے ضربی]

$= (2^3)^3$

$= 2^9$

(iii) دیا گیا ہے $\frac{5^7}{5^2} \times 5^3$

$= 5^{(7-2)} \times 5^3$ [قانون (2) کی رو سے $a^m \div a^n = a^{m-n}$]

$= 5^5 \times 5^3$ [قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= 5^{(5+3)} = 5^8$

(iv) دیا گیا ہے $\frac{5^4 \times x^{10} y^5}{25^2 \times x^7 y^4}$

$\frac{5^4 \times x^{10} y^5}{(5^2)^2 \times x^7 y^4}$ [شمار کنندہ میں 25 کے مفرد اجزائے ضربی]

$= \frac{5^4 \times x^{10} y^5}{5^4 \times x^7 y^4}$ [قانون (3) کی رو سے $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (5^{4-4} \times x^{10-7} y^{5-4})$ [قانون (2) کی رو سے $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= 5^0 x^3 y^1$ [چونکہ $5^0 = 1$]

$= 1x^3 y = x^3 y.$

مثال 12 : مختصر کیجیے اور مندرجہ ذیل کو قوت نما کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

(i) $(x^6 y^4 z^{x-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$

(ii) $\frac{a^7 b^{-5} c^{-4}}{a^{-3} b^3 c^4}$

(iii) $(p^2 q^2 r^2)^3 \times (p^3 q^3 r^3)^{-2}$

حل:

(i) دیا گیا ہے $(x^6 y^4 z^{-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$

$(x^6 y^4 z^{-2}) \times (x^{-3} y^{-5} z^{-1}) \times (x^2 y z^3)$

$= (x^{6+(-3)+2} y^{4+(-5)+1} z^{-2+(-5)+1})$ [قانون (1) کی رو سے $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$]

$= x^{8-3} y^{5-5} z$

$= x^5 y^0 z = x^5 \times 1 \times 1$ [کیونکہ $y^0 = 1$ اور $2^0 = 1$]

$= x^5$

(i) دیا گیا ہے $\dfrac{a^7b^{-5}c^{-4}}{a^{-3}b^3c^4}$

$$\frac{a^7b^{-5}c^{-4}}{a^{-3}b^3c^4}$$

$$= a^{7-(-3)}b^{5-3}c^{-4-(-4)}$$ [قانون (2) کی رو سے $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$$= a^{7+3}b^{5-3}c^{-4+4}$$

$$= a^{10}b^2c^0$$ [چونکہ $c^0 = 1$]

$$= a^{10}b^2$$

(iii) دیا گیا ہے $(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$

$$(p^2q^2r^2)^3 \times (p^3q^3r^3)^{-2}$$

$$= (p^{2\times3}q^{2\times3}r^{2\times3}) \times (p^{3\times-2}q^{3\times-2}r^{3\times-2})$$

$$= (p^6q^6r^6) \times (p^{-6}q^{-6}r^{-6})$$

$$= (p^{6-6}\, q^{6-6}r^{6-6})$$

$$= (p^0q^0r^0) = 1$$

مثال 13 : ثابت کیجئے کہ $\dfrac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2} = 1$

حل:

$$\text{LHS} = \frac{x^{m+n} \times x^{n+l} \times x^{l+m}}{(x^m \times x^n \times x^l)^2}$$

$$= \frac{x^{m+n+n+l+l+m}}{(x^{2m+2n+2l})}$$

(شمار کنندہ میں $(a^m)^n = a^{mn}$ اور نسب نما میں $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$)

$$= \frac{x^{2m+2n+2l}}{(x^{2m+2n+2l})} = 1 = \text{RHS}$$ لہٰذا ثابت ہوا

مثال 14 : ثابت کیجئے کہ $\left(\dfrac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\dfrac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\dfrac{x^r}{x^p}\right)^q = 1$

حل:

$$\text{LHS} = \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^r \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^p \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^q$$

$$= \left(\frac{x^{pr}}{x^{qr}}\right) \times \left(\frac{x^{qp}}{x^{rp}}\right) \times \left(\frac{x^{rq}}{x^{pq}}\right)$$ [کیونکہ $(a^m)^n = a^{mn}$]

$= (x^{pr-qr}) \times (x^{pq-rp}) \times (x^{rq-pq})$ [کیونکہ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$]

$= x^{pr-qr+qp-rp+rq-pq}$

$= x^0 = 1$

مثال 15 : اگر $3^{x+2} = 729$ تب 3^{x-2} کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: $3^{x+2} = 729$ دیا گیا ہے۔

729 کے مفرد اجزائے ضربی نکالنے پر ہمیں $729 = 3^6$ حاصل ہوتا ہے۔

قانون (8) کی رو سے اگر $a^m = b^n$ تب $m = n$

$x + 2 = 6$ تب $x = 4$

اگر $x = 4$ تب $3^{x-2} = 3^2 = 9$

1.3.6 معیاری شکل (سائنٹفک اظہار) Standard form (Scientific notation)

فرض کیجئے کہ آپ کے والد نے آپ کے لئے ایک موٹر سائیکل 1,61,688 روپیوں میں خریدی۔ آپ کا دوست آپ سے پوچھتا ہے، کتنے میں خریدی؟ تب آپ اسے سادہ انداز میں کسے بیان کریں گے؟

آپ یوں کہیں گے کہ 1.61 لاکھ یا ایک لاکھ اکسٹھ ہزار چھ سو اٹھاسی روپئے، معیاری شکل ایک ایسا طریقہ ہے جس میں بڑے اعداد اور بہت چھوٹے اعداد کو سادہ و آسان انداز میں لکھا جاتا ہے۔ فرض کیجئے کہ آپ 4,00,000 کو معیاری شکل میں لکھنا چاہتے ہیں۔

$10^5 = 100000$ اس لئے $1.61 = 1.61 \times 100000 = 1.61 \times 10^5$ لاکھ

اس لیے 1.61 لاکھ کو 1.61×10^5 لکھا جاسکتا ہے۔

اس طریقہ کو بہت بڑے اعداد کو بھی معیاری شکل میں آسانی کے ساتھ لکھنے کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔

جب ہم کسی عدد کو معیاری شکل میں لکھنا چاہتے ہیں تو سب سے پہلے 1 اور 10 کے درمیان ایک عدد لکھئے باقی تمام ہندسوں کو اعشاریہ کے بعد لکھئے۔ اس کے بعد 10 کی قوت کے ساتھ ضرب دیں۔

دوسرے لفظوں میں کسی عدد کی معیاری شکل کو دئے گئے عدد کو 10 کی صحیح عددی قوت اور 1 تا 10 کے درمیان واقع ہونے والے اعشاری عدد کے حاصل ضرب کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ بہت چھوٹے اعداد کو بھی معیاری شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ تاہم، قوت نما مثبت کے بجائے (اوپر دی ہوئی مثال میں قوت 5 تھی) منفی ہوگی۔

$\frac{125}{1000} = 0.125$ معیاری شکل میں ظاہر کرنے کے لئے ہم عددی حصہ اور پہلا ہندسہ لیتے ہیں۔ لہٰذا یہاں پہلا ہندسہ 1 ہے۔ہم اسے 1.25 کی شکل میں لکھیں گے۔اس کا معنی اعشاریہ بائیں جانب دو مقامات کو منتقل ہوتا ہے۔تب 0.125 کی معیاری شکل $0.125 = 1.25 \times 10^{-2}$ ہوگی۔

مثال 16 : عدد 81900000000000 کو معیاری شکل میں لکھئے۔

حل: یہ 10^{13} ہے کیونکہ اعشاریہ کو بائیں جانب 13 مقامات تک منتقل کردیا گیا تاکہ عدد 8.19 بن جائے۔

$$81\ 900\ 000\ 000\ 000 = 8.19 \times 10^{13}$$

مثال 17 : عدد 0.0000012 کو معیاری شکل میں لکھئے۔

حل: یہ 10^{-6} ہے کیونکہ اعشاریہ کو دائیں جانب 6 مقامات تک منتقل کردیا گیا ہے تاکہ عدد 1.2 حاصل ہوجائے۔

$$0.0000012 = 1.2 \times 10^{-6}$$

مشق (Exercise)

.1 مندرجہ ذیل کو مختصر کیجئے۔

(i) $x^7 \times x^0$ (ii) $-3a^5 \times 2a^7$

(iii) $8a^2x - 4a^3$ (iv) $32(a^2)^5 \div (2a^5)^2$

(v) $(x^5)^2 + (y^3)^3 + (z^4)^2$ (vi) $(2a^3)^2 - (-3b)^3$

(vii) $(2x^4)^3 + (-3y^2)^2$ (viii) $x^{a-b} \times x^{b-c} \times x^{c-a}$

.2 محسوب کیجئے:

(i) $2^3 \times 2^5$ (ii) $3^2 \times 3^{-2}$

(iii) $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$ (iv) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{6}$

(v) $\left[\left\{\left(\frac{-1}{3}\right)^2\right\}^{-2}\right]^{-1}$ (vi) $2^{-1} + 2^{-1}$

(vii) 4×2^{-2} (viii) $2^2 \times 2^3 \div 2^5$

.3 اگر $2^m = 32$ تب 2^{m+3} کی قدر کیا ہوگی؟

.4 اگر $\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{16}{81}$ تب $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ کی قدر کیا ہوگی؟

.5 اگر $5^{2x+1} \div 25 = 125$ تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

.6 اگر $a = 3$ اور $b = 2$ تب $a^b + b^a$ اور $a^b - b^a$ کی قدر معلوم کیجئے۔

.7 ثابت کیجئے کہ $(a + b)(a^{-1} + b^{-1})^{-1} = ab$

8. قدر معلوم کیجئے $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}$

9. سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ 149597870 کیلومیٹر ہے اس فاصلہ کو معیاری شکل میں لکھئے۔

10. کرونا وائرس کا قطر اندازاً 0.0000005 سم (سنٹی میٹر) ہے اس قطر کو معیاری شکل میں ظاہر کیجئے۔

آیئے خلاصہ کریں

- m مرتبہ $a \times a \times a \times .....$، جہاں a^m میں 'a' اساس اور 'm' قوت نما ہے اور a^m وقوت نما شکل یا قوت نمائی شکل کہتے ہیں۔
- قوت نما کے قوانین:
  - قانون-1 : $a^m \times a^n = a^{m+n}$
  - قانون-2 : $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (OR) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - قانون-3 : $(a^m)^n = a^{m\times n}$
  - قانون-4 : $a^0 = 1\ (a \neq 0)$
  - قانون-5 : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  - قانون-6 : $(a\,.\,b)^m = a^m\,.\,b$
  - قانون-7 : $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{a^n},\ (b \neq 0)$
  - قانون-8 : اگر $a^m = b^n$ تب $m = n$ جہاں $a > 0$ اور $a \neq 1$
- a کا مقلوب $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ہے اور a^m کا مقلوب a^{-m} اور a^{-m} کا مقلوب a^m ہے۔

اکائی 2

الجبراء Algebra

سبق 2.1

بنیادی الجبراء Algebra

2.1.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے کہ:

- الجبرائی عبارتوں میں متغیرات کی شناخت کرسکیں گے۔
- الجبرائی عبارتوں کی وضاحت کرسکیں گے۔
- دیئے ہوئے ارکان کا مشاہدہ کرنے کے بعد مشابہ اور غیر مشابہ ارکان کی نشاندہی کرسکیں گے۔
- الجبرائی عبارتوں کی درجہ بندی (یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی، متعدد رکنی اور کثیر رکنی) کرسکیں گے۔
- الجبرائی عبارتوں کو مختصر کرنا سیکھیں گے۔
- الجبرائی عبارتوں پر ریاضی کے چار بنیادی اعمال جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم پر مبنی سوالات کو حل کریں گے۔
- الجبرائی عبارت کی قدر معلوم کرسکیں گے۔
- کثیر رکنیوں کے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔
- کثیر رکنیوں کے درجے اور کثیر رکنیوں کی اقسام کی شناخت کرسکیں گے۔
- کثیر رکنیوں کی قدر معلوم کرسکیں گے۔

2.1.1 تعارف (Introduction)

پچھلے اسباق میں ہم اعداد اور ان کے اشکال سے متعلق مطالعہ کرچکے ہیں۔ جس کو ہم علم حساب اور علم ہندسہ (جیومٹری) کے تحت سیکھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم ریاضی کی ایک اور شاخ کے بارے میں پڑھیں گے۔

الجبرا میں بنیادی طور پر اعداد کو ظاہر کرنے کے لئے حروف یا حروف تہجی کا استعمال کرتے ہیں۔ یہ حرف کسی بھی عدد کو ظاہر کرتا ہے نہ کسی مخصوص عدد کو۔ یہ کسی نامعلوم مقدار کو ظاہر کرتے ہیں۔ نامعلوم مقداروں کو معلوم کرنے کے طریقے کو سیکھ کر ہم زندگی سے متعلق کئی معمولی اور پیچیدہ مسائل کو حل کرنے کے لیے طاقتور احتسابی آلات (ضابطے) کو فروغ دے سکتے ہیں۔

حسب ذیل ارچنا اور انجلی کی گفتگو پر غور کیجیے۔

ارچنا : آپ 1 تا 10 کے درمیان کوئی عدد سوچ لیجیے۔

انجلی : ٹھیک ہے میں نے سوچ لیا۔

ارچنا : اب اسے دوگنا کردیجئے۔

انجلی : ٹھیک ہے۔ کردیا۔

ارچنا : اب اس میں 10 جوڑیے۔

انجلی : میں نے جوڑ دیا۔

ارچنا : اسے 2 سے تقسیم کر دیجئے۔

انجلی : ہاں میں نے تقسیم کیا۔

ارچنا : اب اس میں سے سوچے ہوئے عدد کو تفریق کر دیجئے۔

انجلی : ہاں میں نے تفریق کر لیا۔

ارچنا : اب آپ کے پاس جو عدد بچا ہے وہ 5 ہے۔

انجلی : بہت خوب! آپ کو یہ کیسے معلوم ہوا؟

انجلی حیران ہوگئی اور سوچنے لگی کہ ارچنا نے آخر کیسے جواب کا پتا لگایا۔

2.1.2 الجبرائی عبارتیں

اس مثال پر غور کیجئے جہاں ہم دئے ہوئے پیٹرن (نمونہ) پر غور کریں گے اور اسے الجبرائی عبارت کے طور پر ظاہر کرنے کی کوشش کریں گے۔

ایک رضا کارانہ تنظیم نے یہ فیصلہ کیا کہ وہ ہر اسکول کے تمام غریب، ذہین طلباء کو 6 چھ چھ کاپیاں تقسیم کریں گے۔

فی طالب علم کے لئے مطلوبہ کاپیاں = 6

دو طالب علموں کے لئے مطلوبہ کاپیاں = 12

تین طلباء کے لئے مطلوبہ کاپیاں = 18

ہم مذکورہ بالا معلومات کو ذیل کی جدول میں مرتب کریں گے۔

طلباء کی تعداد	1	2	3	4	-
مطلوبہ کاپیاں	6	12	18	24	-
مشاہدہ (نمونہ/پیٹرن)	6x1	6x2	6x3	6x4	-

یہاں کاپیوں کی تعداد اور طلباء کی تعداد کے درمیان رشتہ پر غور کیجئے۔

ہم اوپر دئے گئے جدول میں مشاہدہ کرتے ہیں کہ طلباء کی تعداد میں اضافہ (تبدیلی) کے ساتھ ساتھ درکار کاپیوں کی تعداد میں بھی اضافہ (تبدیلی) ہوتا ہے۔ اور ہم یہ بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ درکار (مطلوبہ) کاپیوں کی تعداد، طلباء کی تعداد کا چھ گنا ہے۔

دی ہوئی طلباء کی تعداد کے لئے درکار کاپیوں کی تعداد کو اس طرح معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$6 \times a$ یا $6a$ جہاں 'a' طلباء کی تعداد ہے۔

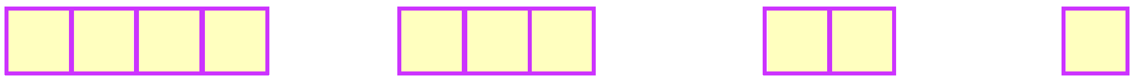
مثال کے طور پر 35 طلباء کے لئے مطلوبہ/درکار کاپیاں = $6 \times 35 = 210$ کاپیاں

مندرجہ بالا مثال سے یہ بات واضح ہوجاتی ہے کہ مطلوبہ کاپیوں کی تعداد طلبا کی کسی بھی تعداد کے لئے ضابطہ '$6a$' کے ذریعہ معلوم کی جاسکتی ہے۔ جہاں a طلباء کی تعداد ہے جس کی قدر کچھ بھی ہوسکتی ہے یعنی ......1,2,3,4 وغیرہ۔

یہاں a ایک متغیر ہے۔ a کی قدر متعین نہیں ہوتی بلکہ اس کی قدریں مختلف ہوسکتی ہے۔ a کی قدر (طلباء کی تعداد) کے مطابق درکار کاپیوں کی تعداد میں تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

آیئے دوسری مثال پر غور کرتے ہیں۔

نیچے دیئے ہوئے دیا سلائی کی تیلیوں کے نمونوں (پیٹرن) کی ترتیب کا مشاہدہ کیجئے۔



نمونہ 1 نمونہ 2 نمونہ 3 نمونہ 4

مندرجہ بالا اشکال بنانے کے لئے درکار دیا سلائی کی تیلیوں کی تعداد

بننے والی شکل	1	2	3	4
درکار دیا سلائی کی تیلیوں کی تعداد	4	7	10	13
نمونہ (پیٹرن)	(3 x 1)+1	(3 x 2)+1	(3 x 3)+1	(3 x 4)+1

درکار دیا سلائی کی تیلیوں کی تعداد معلوم کرنے کا ضابطہ

= 3 x (مربعوں کی تعداد)+1

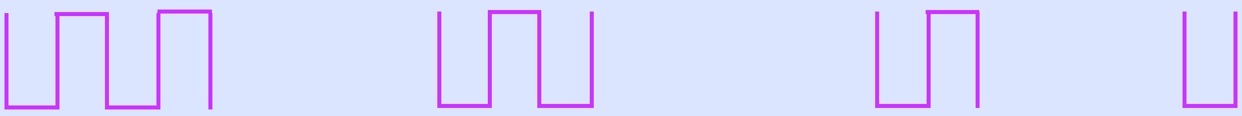
$= 3p + 1$

جہاں p ایک متغیر ہے اور یہ مربعوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ اوپر دی گئی مثالوں میں $6a$ اور $3p + 1$ الجبرائی عبارتیں کہلاتی ہیں۔

نوٹ: اگر کسی عبارت میں کم از کم ایک الجبری رکن ہو تو اس کو الجبری عبارت کہتے ہیں۔

اپنے اکتساب کو جانچئے۔

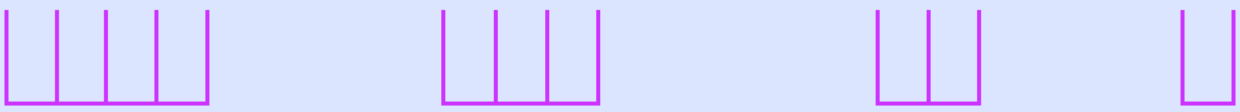
1. اگر مڈڈے میلس کے تحت ہر بچے کو 150 گرام چاول دیئے جاتے ہیں تب کل چاول کی مقدار کے لئے ضابطہ (اصول) لکھئے۔
2. مندرجہ ذیل نمونوں (پیٹرن) کے لئے درکار دیا سلائی کی تیلیوں کی تعداد کو معلوم کرنے کے لئے ضابطہ (اصول) تحریر کیجئے۔



(i) (ii) (iii) (iv)

3. مندرجہ ذیل نمونوں (پیٹرن) کے لئے درکار دیا سلائی کی تیلیوں کی تعداد کو معلوم کرنے کے لئے ضابطہ (اصول) لکھئے۔

(i)



(a) (b) (c) (d)

ہم مشاہدہ کر چکے ہیں کہ الجبرائی عبارتیں' متغیرات پر ریاضی کے بنیادی اعمال جیسے جمع' تفریق' ضرب اور تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے اخذ کی گئی ہیں۔ آیئے جدول میں دی ہوئی مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں:

نشانِ سلسلہ	حالت	متغیر	عبارت کو ظاہر کرنے والا بیان
.1	x کو 5 سے ضرب دینے پر	x	$5x$
.2	y کو 4 سے تقسیم کرنے پر	y	$--$
.3	z کو 6 سے تفریق کرنے پر	z	$z - 6$
.4	بڑا بھائی' چھوٹے بھائی سے 3 سال بڑا ہے	چھوٹے بھائی کی عمر $= n$	بڑے بھائی کی عمر $n + 3$
.5	پٹرول کی قیمت ڈیزل کی قیمت سے 10 زیادہ ہے۔	ڈیزل کی قیمت $= r$	پٹرول کی قیمت $r + 10$
.6	نرجا کے پاس رانی سے 3 گنا کو 10 کم ہے	رانی کے پاس $= n$	نرجا کے پاس $3n - 10$
.7	روی' راجو کے حاضر ہونے کے دنوں کی تعداد کا......حصہ حاضر ہوتا ہے	راجو کے کام کے دنوں کی تعداد $= a$	روی کی حاضری (دنوں میں) —
.8	y کو 5 سے تقسیم کرنے اور 3z کو جمع کرنے پر	y, z	$— + 3z$
.9	m کے 4 گنا میں n کا ایک تہائی حصہ جمع کرنے پر	m, n	$4m + —$
.10	z کے چوتھائی حصہ میں سے y کو تفریق کرنے پر	y, z	$— - y$

2.1.3 مشابہ اور غیر مشابہ ارکان

عبارت $3x + z$ کو بہ غور دیکھئے۔

یہاں 2 کو 3 سے ضرب دے کر 2 جمع کر دیا گیا ہے۔ یہاں $3x$ اور 2 دونوں ارکان ہیں۔ عبارت $3x+2$ میں $3x$ الجبرائی رکن (الجبری رکن) اور 2 عددی رکن ہے۔

ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کیجئے۔

(i) $8x$ اور $6x$ (ii) $7x^2y$ اور $3x^2y$ (iii) $\frac{5}{3}b^2$ اور $4a^2$

(iv) $7ab^2$ اور $7a^2b$ (v) $\frac{9}{5}mn$ اور $4mn$ (vi) $7x^3y$ اور $6x^2y^2$

1. پہلی مثال کے دونوں ارکان کے متغیر ایک ہی ہیں یعنی x اور ان کی قوت بھی ایک ہے۔
2. دوسری مثال میں دونوں ارکان کے متغیرات x^2 اور y ہیں۔ پہلے رکن میں کی x قوت 2 اور y کی قوت 1 ہے اور دوسرے رکن میں x کی قوت 2 اور y کی قوت 1 ہے۔
3. تیسری مثال میں دونوں ارکان میں متغیرات a اور b ہیں۔ اور دونوں متغیرات کی قوت 2 ہے۔
4. چوتھی مثال کے دونوں ارکان کے متغیرات a اور b ہیں۔ پہلے رکن میں کی a قوت 2 اور b کی قوت 1 ہے۔ اور دوسرے رکن میں a کی قوت 1 اور b کی قوت 2 ہے۔
5. پانچویں مثال کے دونوں ارکان میں متغیرات m اور n ہیں۔ اور دونوں m اور n کی قوت 1 ہے۔
6. چھٹی مثال میں دونوں ارکان کے متغیرات x اور y ہیں۔ پہلے رکن میں x اور y کی قوت 2 ہے اور دوسرے رکن میں x کی قوت 3 اور y کی قوت 1 ہے۔ مذکورہ بالا مثالوں میں 1' 2 اور 5 ویں مثالیں ایک جیسے متغیرات اور مساوی قوت کے ساتھ ہیں۔ ایسے ارکان مشابہ ارکان کہلاتے ہیں۔ اور مثال 4,3 اور 6 غیر مشابہ ارکان کہلاتے ہیں۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. مشابہ ارکان کا گروپ بنایئے۔

$5xy, 4x^2, 3xy, 12x^2y, 6xy^2, 7xy, 8x^2, 9y^2, 10x^2y, 14xy^2, 12xy, 15x^2, 12xy^2$

2. ان میں سے ہر ایک رکن کے لئے 5 مشابہ ارکان لکھئے۔

(i) $3xz$ ...., ..., ..., ..., ...

(ii) $4m^2n$ ...., ..., ..., ..., ...

(iii) $5pq^2$ ...., ..., ..., ..., ...

(iv) $7a^3b^3$ ...., ..., ..., ..., ...

(v) $-6p^2$ ...., ..., ..., ..., ...

2.1.4 الجبری عبارتوں کی اقسام

عبارتوں کا نام ان میں موجود ارکان کی تعداد کے اعتبار سے رکھا جاتا ہے۔

ارکان کی تعداد	عبارت کا نام	مثالیں
ایک رکن	ایک رکنی	(i) x (ii) $3xy$ (iii) $4pqr$ (iv) $4z^2xy$ (v) $6mn^2$
دو غیر مشابہ ارکان	دو رکنی	(i) $x + y$ (ii) a^2+b^2 (iii) $mn + n^2$ (iv) $x^2 - xy$ (v) $p^2 + q^2$
تین غیر مشابہ ارکان	تین رکنی یا سہ رکنی	(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $m^2 - 2mn + n^2$ (iii) $pq + xy - mn$
ایک سے زائد غیر مشابہ ارکان	متعدد رکنی	(i) $3x^2 + 4xy + 2x^2 + 5$ (ii) $6p^2 + 7q^2 + 6pq + 8$ (iii) $7x^2 - 2xy - y^2 + 5$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. ہر قسم کے الجبری عبارتوں کی پانچ مثالیں دیجئے۔
2. ذیل میں دی گئی عبارتوں کو ایک رکنی، دو رکنی، تین رکنی (سہ رکنی) اور متعدد رکنی (کثیر رکنی) الجبری عبارتوں کی حیثیت سے نشاندہی کیجئے۔

(i) $3xyz + 2xy$ (ii) $2pq^2$ (iii) $4x + 3p + q + 1$

(iv) $3m^2 + 2m - 5$ (v) $2p^2 - 5p$

2.1.5 الجبری عبارتوں پر اعمال

الجبری عبارتوں کو مختصر کرنا

عبارت $7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$ کیجئے۔

ہم مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ اس عبارت میں کچھ مشابہ ارکان موجود ہیں۔ انہیں جمع کرنے پر اس عبارت کی مختصر شکل حاصل ہوتی ہے۔

نشان سلسلہ	اقدامات	طریقہ کار
.1	عبارت کو لکھئے	$7x^2 + 3y^2 - 6x^2y + 4xy + 5x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy$
.2	مشابہ ارکان کو یکجا کیجئے	$(7x^2 - 3x^2) + (3y^2+2y^2)+(-6x^2y+5x^2y) + (4xy-6xy)$
.3	مشابہ ارکان کو جمع کرنے پر	$4x^2 + 5y^2 - 1x^2y - 2xy$

نوٹ: اگر عبارت میں دو بشابہ ارکان نہیں ہیں تب ہم اس کو مختصر شکل کہتے ہیں۔

دوسری مثال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

مختصر کیجیے $7x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

قدم 1 : $7x^2y - 3xy^2 + 4xy^2 - 2x^2y - 8 + 5xy^2 + 6x^2y + 5$

قدم 2 : (مشابہ ارکان کو یکجا کرنے پر) $(7x^2y - 2x^2y + 6x^2y) + (-3xy^2 + 4xy^2 + 5xy^2) + (-8 + 5)$

قدم 3 : (مشابہ ارکان کو جمع کرنے پر) $11x^2y + 6xy^2 - 3$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

ذیل کی عبارتوں کو مختصر کیجیے

(i) $3xy + 7xy - 9xy$

(ii) $10x^2 - 5x^2 + 4x$

(iii) $3x^2y - 5xy^2 + 7xy^2$

(iv) $4a^2 - 5b^2 + 4a^2b - 7ab^2 + 5a^2 - 4b^2$

(v) $6x^2 + 7q^2 - 7pq + 4 - 3p^2 - 6q^2 + 5$

(vi) $7xy^2 + 3xy - 6xy - 4xy^2$

(vii) $3m^3 + 4m^2 + 5m - 4m^3 + 2m$

الجبری عبارتوں کا حاصل جمع

الجبری عبارتوں کا حاصل جمع مشابہ ارکان کے جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔اس کو دو طرح سے کیا جاسکتا ہے۔

(i) کالم یا افقی طریقہ

(ii) صف یا انتصابی طریقہ

کالم یا افقی طریقہ

مثال 1 :

$5x^2 - 4x - 6,\ 7x + 5 + 3xy$ اور $8x^2 + 3x - 1$ کو جمع کیجیے۔

مرحلہ 1 : الجبری عبارتوں کو معیاری شکل میں لکھیے (اگر ضرورت ہو تو)

$$5x^2 - 4x - 6 = 5x^2 - 4x - 6$$
$$7x + 5 + 3x^2 = 3x^2 + 7x + 5$$

مرحلہ 2 :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x - 6 \\ \underline{3x^2 + 7x + 5} \end{array}$$

ایک الجبری عبارت کو ایک کے نیچے ایک اس طرح لکھیں کہ مشابہ ارکان ایک دوسرے کے نیچے آجائیں۔

مرحلہ 3 :

$$
\begin{array}{r}
5x^2 - 4x - 6 \\
3x^2 + 7x + 5 \\
\hline
8x^2 + 3x - 1 \\
\hline
\end{array}
$$

کالم اور صف کے لحاظ سے مشابہ ارکان کو ایک کے نیچے ایک لکھیں اور ان کو جمع کیجئے۔

(ii) صف یا انتصابی طریقہ:

مثال 2 : $6x^2 + 4 - 3x$ اور $7x^2 - 8x + 5$ کو جمع کیجئے۔

مرحلہ 1 : تمام عبارت کو جمع اور تفریق کے لحاظ سے لکھئے۔

$$6x^2 + 4 - 3x + 7x^2 - 8x + 5$$

مرحلہ 2 : عبارت کو مشابہ ارکان کے لحاظ سے ایک گروپ میں لکھئے۔

$$(6x^2 + 7x^2) + (-3x - 8x) + (4 + 5)$$

مرحلہ 3 : $(6 + 7)x^2 + (-5 - 8)x + 9$ عددی سروں کو مختصر کیجئے۔

مرحلہ 4 : نتیجہ کو معیاری شکل میں لکھئے

$$13x^2 - 11x + 9$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

ذیل کی عبارتوں کو جمع کیجئے۔

(i) $6x^2 - 3x + 4$ اور $7x + 8x^2 - 9$

(ii) $9x - 5x^2 + 11$ اور $8 + 6x + 4x^2$

(iii) $7x - 8x^2 - 7$ اور $8x^2 + 8x$

(iv) $6x^2 + 4x - 3$ اور $9x^2 + 9$

(v) $4x + 5$ اور $6x^2 - 8$

الجبری عبارتوں کی تفریق

الجبری عبارتوں کی تفریق سیکھنے سے پہلے ہم الجبری عبارت کا جمعی معکوس کی تعریف بیان کریں گے۔

الجبری عبارت کا جمعی معکوس: الجبری عبارت کا جمعی معکوس، عبارت میں موجود تمام ارکان کی علامتوں کو تبدیل کر کے (یعنی مثبت رکن کو منفی اور منفی رکن کو مثبت بنا کر) حاصل کیا جاتا ہے۔

$6x$ کا جمعی معکوس ہے $-6x$ اور $-2x^2 + 1$ کا جمعی معکوس $-(-2x^2 + 1)$ ہے جو $2x^2 - 1$ کے برابر ہوگا۔ اس طرح 5 کا جمعی معکوس -5 ہے۔

یعنی $6x + (-6x) = 0$

$$-2x^2 + (2x^2) = 0$$

$$5 + (-5) = 0$$

مثال 3 : عبارت $3x^2 + 2x - 6$ کا جمعی معکوس معلوم کیجئے۔

حل: $3x^2 + 2x - 6$ کا جمعی معکوس $-(3x^2 + 2x - 6) = -3x^2 - 2x + 6$ ہے

الجبری عبارتوں کی تفریق کے لئے ہمارے پاس پھر سے دو طریقے ہیں۔

کالم یا افقی طریقہ

مثال 4 : $5x^2 - 4x + 3$ کو $3x^2 + 2x - 6$ میں سے تفریق کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1 : دونوں عبارتوں کو معیاری شکل میں لکھئے (اگر ضرورت ہو تو)

$$3x^2 + 2x - 6 = 3x^2 + 2x - 6$$

$$5x^2 - 4x + 3 = 5x^2 - 4x + 3$$

مرحلہ 2 : عبارتوں کو ایک کے نیچے دوسری اس طرح لکھئے کہ مشابہ ارکان ایک دوسرے کے نیچے ہوں۔

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 6 \\ 5x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

مرحلہ 3 : دوسری عبارت کے تمام ارکان کی علامتوں کو تبدیل کیجئے تا کہ عبارت کا جمعی معکوس حاصل ہو۔

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & + 2x & - 6 \\ 5x^2 & - 4x & + 3 \\ - & + & - \end{array}$$

مرحلہ 4 : مشابہ ارکان کو جمع کیجئے اور نتیجہ مناسب کالم میں لکھئے۔

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & + 2x & - 6 \\ 5x^2 & - 4x & + 3 \\ - & + & - \\ \hline -2x^2 & + 6x & - 9 \end{array}$$

صف یا انتصابی طریقہ:

مثال 5 : $8y + 4y^2 - 6$ کو $5y^2 - 6y + 9$ میں سے تفریق کیجئے۔

مرحلہ 1 : عبارتوں کو ایک صف میں لکھئے اور دوسری عبارت جس کو تفریق کرنا ہے قوسین اور منفی علامت کے ساتھ لکھئے۔

$$5y^2 - 6y + 9 - (8y + 4y^2 - 6)$$

مرحلہ 2 : دوسری عبارت کا جمعی معکوس جمع کیجئے۔

$$5y^2 - 6y + 9 - 8y - 4y^2 + 6$$

مرحلہ 3 : مشابہ ارکان کو یکجا کر کے جمع یا تفریق کیجیے

$$(5y^2 - 4y^2) + (-6y - 8y) + (9 + 6)$$
$$= y^2 - 14y + 15.$$

مرحلہ 4 : عبارت کو معیاری شکل میں لکھئے $y^2 - 14y + 15$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

دوسری عبارت کو پہلی عبارت میں سے تفریق کیجیے

1. $6a - 7b + c\ ;\ 8a + 9b - 6c$
2. $7a^2 - 3 + 4a\ ;\ 3a^2 - 5a + 13$
3. $14x^2 - 15;\ \ 12x^2 - 4x + 14$
4. $6p^2 - 7p + 4\ ;\ 5p^2 - 8$
5. عبارت $-7m^2 + 5m - 9$ کو $3m^2 + 5m - 6$ اور $5m^2 - 4m + 3$ کے مجموعے میں سے تفریق کیجیے۔

الجبری عبارتوں کا حاصل ضرب

دو ایک رکنیوں کا حاصل ضرب

مثال 6 : $3x$ اور $4y$ کو ضرب دیجیے۔

مرحلہ 1 : دی ہوئی یک رکنیوں کا حاصل ضرب، ضرب کی علامت (x) کو استعمال کرتے ہوئے لکھئے۔

$$= 3x \times 4y$$

مرحلہ 2 : عددی سروں اور متغیرات کے درمیان ضرب کی علامت (x) کو استعمال کر کے لکھئے

$$= 3 \times x \times 4 \times y$$

مرحلہ 3 : عددی سروں اور متغیرات کو ضرب دے کر ان کا حاصل ضرب لکھئے۔

$$= (3 \times 4)\ (x \times y)$$
$$= 12\ xy.$$

مثال 7 : $3p$ اور $5pqr$ کو ضرب دیجیے۔

$$= 3p \times 5pqr$$
$$= 3 \times p \times 5 \times p \times q \times r$$
$$= (3 \times 5)\ (p \times p \times q \times r)$$
$$= 15p^2qr \quad (\because\ p \times p = p^2)$$

مثال 8 : ضرب دیجئے $5m^2n \times (-6)mn$

$= 5 \times m^2 \times n \times -6 \times m \times n$

$= (5 \times -6)\ (m^2 \times n \times m \times n)$

$= -30m^3n^2 (\ m^2 \times m = m^3$ اور $n \times n = n^2)$

تین یا تین سے زائد یک رکنیوں کا ضرب:

مثال 9 : $3xy$، $4y$ اور $5x$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل: $3xy \times 4y \times 5x$

$= 3 \times x \times y \times 4 \times y \times 5 \times x$

$= (3 \times 4 \times 5)\ (x \times y \times y \times x)$

$= 60x^2y^2.$

مثال 10 : $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل: $4a^2b \times 5ab^2c \times 6abc$

$= (4 \times 5 \times 6) \times (a^2 \times a \times a) \times (b \times b^2 \times b) \times (c \times c)$

$= 120a^4 \times b^4c^2$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

مندرجہ ذیل یک رکنیوں کے حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

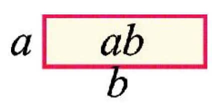
(i) $3xy, 4x$ (ii) $3xy, 4x$ (iii) $-8p^2q, 2qr^2$

(iv) $-5mn, -3m^2n$ (v) x, xy, xyz (vi) pqr, pq^2, qr^2

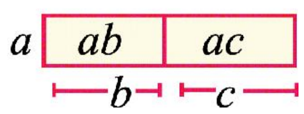
(vii) lm, mn, ln (vii) $5abc, 6a^2b^2c^2, 2abc$

(viii) $3x^2y^2z^2, -2xyz, -3x^3y^3z^3$ (ix) $4xy^2z^3, 2x^2y, 3x^3y^2z^2$

یک رکنی کو دو رکنی سے ضرب:



یک رکنی اور دو رکنی کے ضرب کو جیومتریائی مثال کے ذریعہ سمجھا جا سکتا ہے۔
مستطیل کا رقبہ جہاں لمبائی b اور چوڑائی a ہے
اگر مستطیل کی لمبائی میں c اکائیوں کا اضافہ کیا جائے۔



تب مستطیل کا رقبہ $= a(b + c)$

$$(a(b + c)) = ab + ac$$

ایک طرف رقبہ $a(b + c)$ ہے لیکن مستطیل کے بائیں حصے کا رقبہ $'ab'$ اور دائیں حصے کا رقبہ $'ac'$ ہے۔ لہٰذا مشترکہ (دونوں حصوں کا) رقبہ $ab + ac$ ہوگا۔

مثال 11 : $3x$ ‘$(4y + 5z)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1 : یک رکنی اور دو رکنی کو حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے۔

$$3x \times (4y + 5z)$$

مرحلہ 2 : تقلیبی قانون کو استعمال کریں‘ یک رکنی کو دو رکنی کے پہلے رکن کے ساتھ ضرب دیجئے اور پھر دوسرے رکن کے ساتھ ضرب دیجئے اور ان کے حاصل ضرب کو جمع کیجئے۔

$$(3x \times 4y) + (3x \times 5z)$$

مرحلہ 2 : مختصر کیجئے۔

$$12xy + 15xz$$

مثال 12 : $2a(3ab - 4ac)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:
$$2a(3ab - 4ac) = 2a \times (3ab - 4ac)$$
$$= (2a \times 3ab) + (2a \times -4ac)$$
$$= (2 \times 3 \times a \times a \times b) + (2 \times a \times (-4) \times a \times c)$$
$$= (6 \times a^2 \times b) + (-8 \times a^2 \times c)$$
$$= 6a^2b - 8a^2c.$$

* اس طرح مندرجہ ذیل مثالوں کے ذریعہ دو رکنی کا سہ رکنی کے ساتھ ضرب کو سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 13 : $(6m + 2n - mn)(-3mn)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:
$$(6m + 2n - mn)(-3mn) = (6m \times -3mn) + (2n \times -3mn) + ((-mn) \times (+3mn))$$
$$= (6 \times -3 \times m \times m \times n) + (2 \times -3 \times n \times m \times n) + (-m \times n \times -3 \times m \times n)$$
$$= -18m^2n - 6mn^2 + 3m^2n^2.$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

مندرجہ ذیل کے حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

(i) $2x, (3xy + 4xz)$ (ii) $5m, (3mn - 2)$

(iii) $(4abc - 6a^2c^2b^2), 3(-abc)$ (iv) $3p, (4pq - 2pr - pqr)$

(v) $(5x - 6y - 7z), (-xyz)$ (vi) $(mn - 2lm - ln), 3lm$

دو رکنی کا دو رکنی سے ضرب

ہم یک رکنی کا دو رکنی کے ساتھ تقلیبی قانون کے استعمال سے ضرب کرنا سیکھ چکے ہیں۔

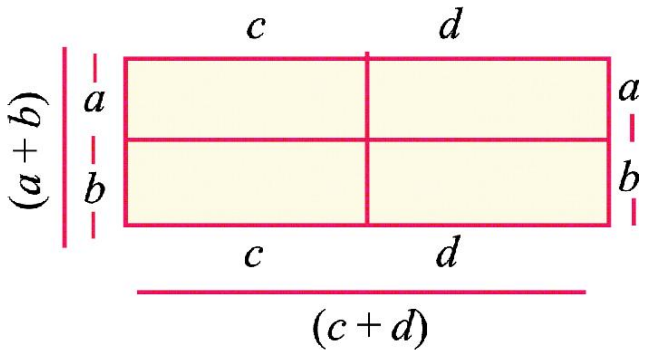
$$(a + b)e = ae + be$$

اب اگر ہم e کی جگہ پر $(c + d)$ درج کرتے ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$

$$\therefore \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

جیومتریائی اظہار کی مدد سے مستطیل کا رقبہ جس کے ضلع $(a + b)$ اور $(c + d)$ ہیں کو اس طرح دکھایا جاسکتا ہے۔



مستطیل کا رقبہ $= (a + b) \times (c + d)$

لیکن اوپر دی ہوئی تصویر کے مطابق مستطیل کا کل رقبہ

$$= ac + ad + bc + bd$$

$$\therefore \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

مثال 14 : $(2x + 3y)$ اور $(5x + 4y)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1 : دونوں دورکنیوں کو حاصل ضرب کی شکل میں لکھئے۔

$$(2x + 3y) \times (5x + 4y)$$

مرحلہ 2 : تقلیبی قانون کا استعمال کیجئے۔ پہلی دورکنی کے پہلے رکن کو دوسری دورکنی سے ضرب دیجئے، پہلی دورکنی کے دوسرے رکن کو دوسری دورکنی کے ساتھ ضرب دیجئے اور حاصل ضربوں کو جمع کر دیجئے۔

$$= 2x \times (5x + 4y) + 3y(5x + 4y)$$

مرحلہ 3 : مختصر کیجئے۔

$$(2x \times 5x + 2x \times 4y) + (3y \times 5x + 3y \times 4y)$$

$$= 10x^2 + 8xy + 15xy + 12y^2$$

مرحلہ 4 : مشابہ ارکان کو جمع کیجئے۔

$$= 10x^2 + 23xy + 12y^2$$

مثال 15 : $(4a + 2b)$ اور $(2a - 3b)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:

$$(4a + 2b)(2a - 3b) = 4a(2a - 3b) + 2b(2a - 3b)$$

$$= (4a \times 2a) + (4a \times -3b) + (2b \times 2a) + (2b \times -3b)$$

$$= 8a^2 - 12ab + 4ab - 6b^2$$

$$= 8a^2 - 8ab - 6b^2.$$

* اسی طرح ہم مندرجہ ذیل مثال کے ذریعہ دورکنی کا سہ رکنی کے ساتھ ضرب کو سمجھ سکتے ہیں۔

مثال 16 : $(3m-2l)$ اور $(m-2n-lmn)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

حل:
$$(3m+2l)(m-2n-lmn) = 3m(m-2n-lmn)+2l(m-2n-lmn)$$
$$= (3m\times m)+(3m\times -2n)+(3m\times -lmn)+(-2l\times m)$$
$$+(-2l\times -2n)+(-2l\times -lmn)$$
$$= 3m^2-6mn-3lm^2n-2lm+4ln+2l^2mn\,.$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

مندرجہ ذیل کے حاصل ضرب معلوم کیجئے۔

1. $(2p+3q),\ (3q+2p)$
2. $(3a-2b),\ (4a-5b)$
3. $(6x^2y-3xy^2),\ (x^2y-xy^2)$
4. $(x-y)\ (3xy-2x^2y+2xy^2)$
5. $(3l-2m)\ (3lm-2nl-lmn)$
6. $(x+y+z)\ (2x^2+3y^2+4z^2)$

2.1.6 الجبری عبارت کی قدر

اب ہم عبارت $3x^2-2x+1$ پر غور کرتے ہیں' یہاں $x=0, 1, 2, -1, \ldots$ کسی x کی خاص قدر کے لئے عبارت کی قدر کیا ہوگی؟

اس کے لئے ہمیں x کی جگہ پر '0' یا '1' یا '2' یا $3x^2-2x+1$ درج کرنا ہوگا۔

مثال 17 : $4x+1$ کی قدر معلوم کیجئے اگر $x=2$ ہو تو

حل:

مرحلہ 1 : $4x+1$ (عبارت کو لکھئے)

مرحلہ 2 : $4(2)+1$ (متغیر کی دی ہوئی قدر کو درج کیجئے۔ یعنی 2)

مرحلہ 3 : $8+1=9$

مثال 18 : اگر 0 اور $m=-1$ ہو تب m^2-2m+3 کی قدر معلوم کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1 : m^2-2m+3 (عبارت کو لکھئے)

مرحلہ 2 : $(-1)^2-2(-1)+3$ (متغیر کی دی ہوئی قدر کو عبارت میں درج کیجئے یعنی $m=-1$)

مرحلہ 3 : $1+2+3=6$

(اب متغیر کی دوسری قدر یعنی $m=0$ درج کیجئے)

مرحلہ 1 : $(0)^2-2(0)+3$

مرحلہ 2 : $0-0+3=3$

مثال 19 : مستطیل کا رقبہ دیا گیا ہے $A = l \times b$ اگر $b = 6$ تب اس کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل:

مرحلہ 1 : مستطیل کا رقبہ $= l \times b$

(دی ہوئی قدریں $(l = 8 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm})$

مرحلہ 2 : $A = 8 \times 6$ (متغیرات کی قدریں درج کرنے پر)

مرحلہ 2 : $A = 48 \text{ cm}^2$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

.1 مستطیل کا احاطہ $p = 2(l + b)$ ہے اگر $l = 6\text{cm}, \ b = 4 \text{ cm}$ تب اس کا احاطہ کیا ہوگا۔

.2 اگر $x = -1, \ y = 2$ تب مندرجہ ذیل عبارتوں کی قدریں معلوم کیجئے۔

(i) $2x + 3y - 5$ (ii) $5x - 2y + 1$ (iii) $3xy - 4x + 2$ (iv) $7x - 3y - 2xy$

2.1.7 کثیر رکنیاں

پچھلے ابواب میں ہم نے مختلف الجبرائی عبارتوں جیسے یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی، متعدد رکنی کے متعلق مطالعہ کیا۔ آیئے اب ہم کثیر رکنیوں کے بارے میں جانیں گے۔

کثیر رکنیاں کیا ہیں: کثیر رکنی متغیر x میں ایک عبارت ہوتی ہے جو محدود ارکان رکھتی ہے اور ہر رکن $a \neq 0$ کی شکل میں ہوتا ہے جہاں a حقیقی عدد اور n مکمل عدد ہے اور $a \neq 0$

$2x$	$4x^{1/2}$ or $4\sqrt{x}$
$\frac{1}{3}x - 4$	$3x^2 + 4x^{-1} + 5$
$x^2 - 2x - 1$	$4 + \frac{1}{x}$
$4x^3 + 6x^2 - 3x + 2$	$\frac{x^2 + 2}{x} - 6$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

مندرجہ ذیل میں سے کون سی کثیر رکنیاں ہیں؟ کون سی کثیر رکنیاں نہیں ہیں؟ وجوہات بتلایئے۔

1. $3x - 4$
2. $4y^2 - \frac{1}{y} + 2$
3. $\sqrt{5}p^2 - 4$
4. $\frac{1}{z} + 2$
5. $(3x + 4)(x - y)$
6. $(2x^2 - 2x)\left(\frac{1}{x}\right)$
7. $3\sqrt{p}$
8. $z^2 - xyz$
9. $4x - 2y - \sqrt{xy}$
10. $5x^3y^2z$

کثیر رکنی کا درجہ

کثیر رکنی کا ہر ایک رکن مستقلوں اور متغیرات کے استعمال سے تشکیل پاتا ہے۔ عددی ضریب متغیرات پر عمل پذیر ہوتے ہیں۔ جن کو غیر منفی صحیح عدد کے مختلف قوت نماؤں کے ساتھ لکھا جاتا ہے۔ رکن کا درجہ: رکن میں موجود متغیرات کے قوتوں کا مجموعہ اُس رکن کا درجہ کہلاتا ہے اور کثیر رکنی کا درجہ: کثیر رکنی میں موجود تمام ارکان میں سے اعظم ترین درجہ رکھنے والے رکن کا درجہ ہی کثیر رکنی کا درجہ کہلاتا ہے۔

مثال 20 : .1 $2x^2 - 3x + 4$ .2 $2p^2q^2 + 3pq^2 - 4p^3$

کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 4$ میں عبارتیں $2x^2$ ، $-3x$ اور 4 ارکان ہیں۔

رکن $2x^2$ کا درجہ 2 ہے؛ رکن $-3x$ کا درجہ 1 ہے اور رکن 4 کا درجہ 0 ہے $(4x^0 = 4)$

اس لئے کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 4$ میں رکن $2x^2$ سب سے اعظم ترین درجہ رکھتا ہے۔ لہٰذا کثیر رکنی $2x^2 - 3x + 4$ کا درجہ 2 ہے۔

دوسری کثیر رکنی $2p^2q^2 + 3p^2 - 4p^3$ میں پہلے دو ارکان دو مختلف متغیرات رکھتے ہیں۔ اس لئے ہمیں ان متغیرات کے قوتوں کے مجموعہ کو دیکھنا چاہئے۔

رکن $2p^2q^2$ میں $2 + 2$ (قوتیں) $= 4$ درجہ ہے۔ رکن $3p^1q^2$ میں $2 + 1$ (قوتیں) $= 3$ درجہ ہے۔

رکن $4p^3$ میں درجہ 3 ہے۔ مذکورہ بالا کی روشنی میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ اعظم ترین درجہ 4 ہے۔

لہٰذا کثیر رکنی $2p^2q^2 + 3p^2 - 4p^3$ کا درجہ 4 ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

درج ذیل کثیر رکنیوں کے درجے لکھئے۔

(i) $9x^2 - 3x + 4$ (ii) $5m^2 + 6m - 6$ (iii) $2p^3 - 3pq + 4p^3q$

(iv) $6x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ (v) $m^3 - 2mn^2 + 3mn$ (vi) $6a^2b + 3ab^2 - 4ab - 5$

(vii) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (viii) $x^2 + 2xy + y^2$

درجہ کے لحاظ سے کثیر رکنیوں کی اقسام

کثیر رکنی کا نام	کثیر رکنی کا درجہ	مثال
صفر کثیر رکنی	غیر معروف	0
مستقل کثیر رکنی	صفر	$5, -3, 1/2\ x^0$ وغیرہ
خطی کثیر رکنی	1	$x + 2, y - 3, 2p - 1, 3n - 4$ وغیرہ
دو درجی کثیر رکنی	2	$x^2 - 3x + 4, a^2 - b, 3m^2 + 4m$ وغیرہ
مکعبی کثیر رکنی	3	$x^3 - y^3, 3x + 4y^3, 9x^3 - 2x^2 + b$ وغیرہ

ارکان کی تعداد کے لحاظ سے کثیر رکنیوں کی اقسام

ارکان	مثال	کثیر رکنی کا نام	غیر صفری ارکان کی تعداد
$5xy$	$5xy$	یک رکنی	1
$-2m, 6n$	$-2m + 6y$	دو رکنی	2
$4a^2, ab, 3$	$4a^2 + ab + 3$	سہ رکنی	3
$5x^2$, $3y^2$, $-6xy$, 7	$5x^2 + 3y^2 - 6xy + 7$	متعدد رکنی / کثیر رکنی	تین سے زائد

نوٹ: ایک کثیر رکنی، متعدد رکنی ہو سکتی ہے لیکن ہر متعدد رکنی ضروری نہیں کہ کثیر رکنی ہو۔

2.1.8 کثیر رکنی کی قدر

.1 اب ہم کثیر رکنی $p(x) = 4x^2 - 2x + 3$ پر غور کرتے ہیں۔

اگر یہاں $x = 1$ ، 2، 3 تب $p(x)$ کی قدر کیا ہوگی؟

اس کے لئے ہمیں $p(x)$ میں جہاں کہیں x ہو 1، 2 یا 3 درج کرنا ہوگا۔

درج ذیل جدول کا مشاہدہ کیجئے۔

x	$p(x) = 4x^2 - 2x + 3$	قدر $p(x)$
1	$p(1) = 4(1)^2 - 2(1) + 3$	5
	$= 4 - 2 + 3$	
2	$p(2) = 4(2)^2 - 2(2) + 3$	15
	$= 4(4) - 4 + 3$	
	$= 16 - 4 + 3$	
3	$p(3) =$	...

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

دیئے ہوئے متغیرات کی قدروں کے لئے مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کی قدر معلوم کیجئے۔

1. $p(x) = 3x^2 - x - 5$ جب کہ $x = 2$
2. $p(m) = 4m^2 - 5m + 6$ جب کہ $m = 0$
3. $p(n) = 2n^3 - 3n - 2$ جب کہ $n = 1$
4. $p(a) = 3a^3 - 4a^2 + 2$ جب کہ $a = 1$ اور $a = -2$
5. $p(t) = 4t2 + 2t - 6$ جب کہ $t = -1$

مشق :

1. کوئی پانچ الجبری عبارتیں لکھئے۔
2. مشابہ ارکان کے گروپ بنائیے۔

$5x, 4xy, -3x^2, 10x^2y, 12x^2y^2, -x, 7x^2, 4xy^2, -5x^2y, -3xy, 2x, 4x^2, -x^2y^2, xy.$

3. ان میں سے کون سے یک رکنی، دو رکنی، سہ رکنی اور متعدد رکنی ہیں؟ نشاندہی کیجئے۔

(i) $3m - 2n$ (ii) $2xy$ (iii) $4x - 3xy - 2$ (iv) $5x^2 + 3xy$
(v) $4pqr$ (vi) $ax + by - cxy$

4. $5x^2 - 4xy + 2y^2$ کو $3x^2 + 2xy - y^2$ تفریق کیجئے۔
5. $2x^2 - 4xy + 3y^2$ اور $3x^2 + 2xy - y^2$ کے مجموعے کو $4x^2 - 3xy - 2y^2$ اور $-3x^2 + xy + 2y^2$ کے مجموعے میں سے تفریق کیجئے۔
6. $(3xy - 2x)$ اور $\left(4x + \sqrt{x}\,y\right)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔
7. $(5a^2 - ab + b^2)$ اور $(a^2 + 6ab + 3b^2)$ کا حاصل ضرب معلوم کیجئے۔
8. مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کا درجہ معلوم کیجئے۔

(i) $3x^2 - xy + y$ (ii) $m^2 - mn + n^3$ (iii) $3x^2 + y^2 - 3xyz$
(iv) $a^3 - a^2b^2 + b^2$ (v) $x^5 - 3x^2y^2$ (vi) $x^5 - 4z - y^6$

9. مندرجہ ذیل کثیر رکنیوں کے لئے $p(0)$، $p(1)$، $p(2)$، $p(-1)$ اور $p(-2)$ معلوم کیجئے۔

(i) $p(x) = x^2 - 4x + 2$ (ii) $p(m) = 3m^2 - 4$ (iii) $p(y) = y^3 - 3y^2 - 5$
(iv) $p(t) = 4t^2 - 3t - 2$ (v) $p(n) = n^3 - 4n - 3$ (vi) $p(x) = 3x - 4 + 5x^2$

آیئے خلاصہ کریں

1. متغیر کو ظاہر کرنے کے لئے ہم حروف a، b، c، m، n، p، q، r، s، t، x، y، z وغیرہ کو استعمال کر سکتے ہیں۔
2. متغیر کی قدر متعین نہیں ہوتی یہ حالات اور متعلقہ صورتوں کے ساتھ بدلتی رہتی ہیں۔
3. مشابہ ارکان ایسے ارکان کو کہا جاتا ہے جس میں یکساں متغیرات مساوی قوت والے ہوں یعنی جن کے متغیرات اور قوتیں یکساں ہوں۔
4. وہ الجبری عبارت جو صرف ایک رکن پر مشتمل ہو یک رکنی کہلاتی ہے، جس میں دو غیر مشابہ ارکان ہوں وہ دو رکنی، تین غیر مشابہ ارکان پر مشتمل ہو سہ رکنی اور جو تین سے زائد غیر مشابہ ارکان پر مشتمل ہو اسے متعدد رکنی کہتے ہیں۔
5. کثیر رکنیوں کو ان کے درجہ کے لحاظ سے خطی کثیر رکنی، دو درجی کثیر رکنی، مکعبی کثیر رکنی کہا جاتا ہے۔
6. صحیح عدد a کثیر رکنی $p(x)$ کا صفر ہے اگر $p(a) = 0$ ہو۔ اس صورت میں 'a' کو بھی کثیر رکنی کا صفر کہا جاتا ہے۔

سبق 2.2

مخصوص ضرب اوراجزائے ضربی

Special Products and Factorization

2.2.0 اکتسابی مقاصد

اس باب کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہوں گے:

- دیئے گئے اعداد کا مربع، اکائیوں کے استعمال سے معلوم کرسکیں گے۔
- دیئے گئے سوالات کو اکائیوں کی مدد سے حل کرسکیں گے۔
- اجزائے ضربی معلوم کرسکیں گے (سادہ طریقہ کار پر)
- اجزائے ضربی معلوم کرسکیں گے مشترک جز وضربی لیتے ہوئے۔
- اجزائے ضربی معلوم کرسکیں گے ارکان کی درجہ بندی (گروپ) کرتے ہوئے۔
- اجزائے ضربی معلوم کرسکیں گے اکائیوں کے استعمال سے۔
- ناطق اعداد پر چاروں بنیادی اعمال (جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم) کو انجام دے سکیں۔

2.2.1 تعارف

الجبرائی عبارتوں کو ہم جمع کر سکتے ہیں جس کو ہم نے پچھلے باب میں سیکھ چکے ہیں۔

مثلاً $3x$ اور $5x$ کو جمع کرنے پر $3x + 5x = 8x$ حاصل ہوتا ہے اور $5x$ اور $3y$ کو جمع کرنے پر $5x + 3y$ حاصل ہوتا ہے۔

الجبرائی عبارتوں کو جمع یا تفریق کرنے کے لئے پہلا مرحلہ یہ ہوتا ہے کہ ایک جیسے (مشابہہ) ارکان کو جمع یا تفری کیا جائے۔ ہمیں اس بات کو خیال رکھنا چاہیے کہ غیر مشابہہ ارکان کو جمع (یکجا) نہیں کیا جاسکتا ہے۔ بلکہ ان کے جوڑ کو علامت کے ذریعہ علیحدہ ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔اس طرح $3x^2$ اور $6x^2$ کی جمع $9x^2$ ہوں گی۔ لیکن $5x$ اور $3x^2$ کی جمع صرف $5x + 3x^2$ ہی ہوگا۔

آیئے عبارت $5xy + 8x + 9y + 3xy$ کی جمع پر غور کریں۔اس عبارت میں صرف مشابہہ ارکان $5xy$ اور $5xy$ ہیں جن کو ہم جمع کر سکتے ہیں اور ان کا مجموعہ $8xy$ ہوگا جب کہ باقی ارکان عبارت میں علامتوں کے ساتھ اس ہی طرح ظاہر کئے جائیں گے۔

اس طرح عبارت کی قدر $8xy + 8x + 94$ ہوگی۔

ہم جانتے ہیں کہ الجبرائی عبارت انگریزی حروف (متغیرات) اور اعداد (مستقل) پر مشتمل ہوتی ہے اور مزید ہم جانتے ہیں کہ کس طرح ان کو جمع یا ضرب کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً $y \times y = y^2$

$x \times y = xy$

$5x \times 3y = 15xy$ اور

$5(x + y) = 5x + 5y$

آیئے چند مثالوں پر غور کریں۔

(i) $x(x + 4) = x^2 + 4x$

(ii) $(m + 3)(m + n) = m\times(m + n) + 3\times(m + n)$

$= m^2 + mn + 3m + 3n.$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

.1 ان کو حل کیجئے۔

(i) $(m + 3)(m + 3)$ (ii) $(y - 3) \times (y - 3)$

(iii) $(p + 5) \times (p - 5)$ (iv) $(2m + 4) \times (3m + 6)$

(v) $(x - 5) \times (3y - 6)$ (vi) $(5x - 2y) \times (3y - 2x)$

2.2.2 الجبرائی اکائیاں

چند مخصوص حاصل ضرب جو حروف واعداد پر مشتمل ہوتے ہیں یعنی کسی مدد سے مزید آسانی کے ساتھ سوالات کو حل کرتے ہیں مدد ملتی ہے۔ آیئے اب ہم ان چند مخصوص الجبرائی عبارتوں کی عملی شکل کی شناخت کریں گے جن کو الجبرائی اکائیاں کہا جاتا ہے۔

یہ الجبرائی اکائیاں عام طور پر حروف (متغیرات) اور اعداد (مستقل) پر مشتمل ہوتے ہیں اور ان میں کوئی بھی حروف واعداد لئے جاسکتے ہیں۔ آیئے الجبرائی اکائیں حاصل کرنے کے لئے ان چند حاصل ضرب پر غور کریں $(a+b) \times (a+b)$۔ مزید یہ کہ a اور b کے بجائے کوئی بھی حروف m اور n یا x اور y یا p اور q وغیرہ وغیرہ لئے جاسکتے ہیں

$$(a + b)(a + b) = a \times (a + b) + b(a + b)$$
$$= (a \times a) + (a \times b) + (b \times a) + (b \times b)$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2$$

اس طرح $a^2 + 2ab + b^2$

$$\boxed{\therefore\ (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2} \Rightarrow \boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

اسی طرح $(a - b)$ کو $(a - b)$ سے ضرب کرنے پر

$(a - b) \times (a - b)$

$$(a - b) \times (a - b) = a(a - b) - b(a - b)$$
$$= (a \times a) - (a \times b) - (b \times a) + (b \times b)$$
$$= a^2 - ab - ba + b^2$$

اس طرح $(a - b)(a - b)$ کا حاصل ضرب $a^2 - 2ab + b^2$ ہوگا۔

$$\therefore\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

آیئے $(a+b)\times(a-b)$ کا حاصل ضرب پر غور کریں۔

$$(a+b)\ (a-b) = a \times a - b) + b \times (a-b)$$

$$= (a \times a) - (a \times b) + (b \times a) - (b \times b)$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. مندرجہ ذیل کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $(x+y)\,(x+y)$ (ii) $(x-z)\ (x-z)$

(iii) $(c-d)\,(c+d)$ (iv) $(m-n)\,(m-n)$

آیئے اب ہم ان سوالات کو الجبرائی اکائیوں کی مدد سے حل کریں گے۔

مثال 1 : $(5x+3)^2$ کا مناسب الجبرائی اکائی مدد سے حاصل ضرب کیجئے۔

حل : $(5x+3)^2$ اکائی $(a+b)^2$ کی شکل میں ہے۔ اس طرح یہاں پر $a = 5x$ اور $b = 3$ ہے

اور a اور b اکائی میں درج کرنے پر

$(5x+3)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + (3)^2$ $[\because\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$

$(5x+3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$

مثال 2 : $(y-8)\quad(y-8)$ کا حاصل ضرب مناسب الجبرائی اکائی کی مدد سے معلوم کیجئے۔

حل : $(y-8)\quad(y-8)$ یعنی $(y-8)^2$

ہم جانتے ہیں کہ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ اس طرح $a = y$ اور $b = 8$ درج کرنے پر

$$(y-8)\,(y-8) = (y-8)^2 = y^2 - 2(y)\ (8) + 8^2$$

$$= y^2 - 16y + 64$$

$$\therefore\ (y-8)^2 = y^2 - 16y + 64$$

مثال 3 : 102×98 کا حاصل ضرب مناسب الجبرائی اکائی کے استعمال سے معلوم کریں۔

حل : 102×98

$$\therefore\ 102 \times 98 = (100+2)\,(100-2)$$

[ضابطہ کی مدد سے $(x+y)\,(x-y) = x^2 - y^2$]

$$102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2)$$
$$= (100)^2 - (2)^2$$
$$= 10,000 - 4 \qquad [(x + y)(x - y) = x^2 - y^2]$$
$$= 9,996$$

مثال 4 : $987^2 - 13^2$ کا حاصل ضرب مناسب الجبرائی اکائی کے استعمال سے معلوم کریں۔

حل :

$$(987)^2 - (13)^2 = (987 + 13)(987 - 13) \quad (\because \text{We know } x^2 - y^2 = (x + y)(x - y))$$
$$= 1000 \times 974$$
$$= 9,74,000.$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. مناسب الجبرائی اکائیوں کے استعمال سے ان کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $(2x + 3y)^2$ (ii) 297×303

(iii) $(7x + 4y)^2 + (7x - 4y)^2$ (iv) $(5x - 2)(5x - 2)$

(v) 1001×1001 (vi) 80.5×79.5

(vii) $\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{2}n\right)^2$ (viii) $(xy + 3z)^2$

I. اگر $a + b = 5$ اور $ab = 4$ تب $a - b$ کی قدر معلوم کیجئے۔

II. مربع کے ایک ضلع کا طول $(5x + 3)$ میٹر ہے تب اس کا رقبہ معلوم کیجئے۔

2.2.3 الجبرائی اکائیوں کی مدد سے مربع معلوم کیجئے

مثال 5 : مناسب اکائی کی مدد سے $(501)^2$ قدر معلوم کیجئے۔

حل :

$$(501)^2 = (500 + 1)^2$$
$$= (500)^2 + 2(500)(1) + (1)^2 \qquad [(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$$
$$= 250000 + 1000 + 1$$
$$= 2,51,001$$
$$\therefore (501)^2 = 2,51,001.$$

مثال 6 : $(290)^2$ کی قدر معلوم کیجیے۔

حل :
$$(290)^2 = (300 - 10)^2$$
$$= (300)^2 - 2(300)(10) + (10)^2$$
$$= 90{,}000 - 6000 + 100$$
$$= 84{,}100.$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے۔

1. مندرجہ ذیل کی قدر مناسب الجبرائی کی مدد سے معلوم کیجیے۔

(i) $(890)^2$ (ii) $(405)^2$ (iii) $(999)^2$ (iv) $(710)^2$

(v) $(302)^2$ (vi) $(801)^2$ (vii) $(404)^2$

2.2.4 الجبرائی عبارتوں کے اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں کہ طبعی اعداد جیسے ... 12, 20, 81 کے اجزائے ضربی کس طرح حاصل کئے جاتے ہیں۔

عدد '12' کے اجزائے ضربی 12 اور 1, 2, 3, 4, 6 ہوتے ہیں۔

اس طرح 24 کے اجزائے ضربی 24 اور 1, 2, 3, 4, 6, 12, ہوتے ہیں۔

اسی طرح کسی الجبرائی عبارت کو اس کے اجزائے ضربی میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں

(i)
$$3xy = 3 \times x \times y$$
$$= (3\times x) \times y$$
$$= 3 \times (x \times y)$$
$$= (3 \times y) \times x$$

اس طرح $3xy$ کے اجزائے ضربی $3, x, y, 3x, 3y, 3xy$ ہوتے ہیں۔

(ii)
$$5x^2y = 5 \times x \times x \times y$$
$$= (5x^2) \times y$$
$$= 5\,(x^2y)$$
$$= (5y)x^2.$$

اس طرح $5x^2y$ کے اجزائے ضربی $5, x, y, 5x, 5y, 5x^2, x^2y, xy, 5xy, 5x^2y$

عبارت یا عدد کے اجزا یا جز معلوم کرنے کے طریقہ کار کو اجزائے ضربی کا طریقہ کار کہتے ہیں۔ ان اجزا کا حاصل ضرب سے اصل عبارت یا عدد حاصل ہوتا ہے۔

2.2.5 کس طرح ایک الجبرائی عبارت کے اجزائے ضربی معلوم کئے جائیں

آیئے الجبرائی عبارت $4x^2 + 8$ پر غور کریں۔

* اس عبارت میں دو ارکان یعنی $4x^2$ اور 8 ہیں۔

* کیا ان دونوں ارکان میں کوئی مشترک جز ہے؟
* عبارت کا دوسرا رکن '8' کو اس طرح $2 \times 4 = 8$ میں لکھا جا سکتا ہے۔
* اس طرح عبارت کے دو ارکان '4' مشترک جز کے طور پر لیا جا سکتا ہے۔
* اب ہم اس عبارت $4x^2 + 8$ کو اس کے اجزائے ضربی میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$4x^2 + 8 = (4 \times x \times x) + (4 \times 2)$$
$$= 4(x^2 + 2)$$

جانچ: اجزائے ضربی سے حاصل جز کو آپس میں ضرب کرنے پر اصل عبارت حاصل ہوتی ہے یا نہیں جانچ کیجئے۔

مثال 7 : عبارت $4y^3 + 2y^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

* عبارت $4y^3 + 2y^2$ میں دو ارکان ہیں جو $4y^3$ اور $2y^2$ ہیں۔
* ان دو ارکان میں عدد 2 اور y^2 مشترک جز ارکان ہیں۔
* اس طرح عبارت $4y^3 + 2y^2$ کے اجزائے ضربی ہوں گے۔

$$\therefore\ 4y^3 + 2y^2 = 2y^2 (2y + 2)$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

I. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی لکھئے۔

(a) 73 (b) 120 (c) 200 (d) 100 (e) 91

II. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی لکھئے۔

(i) $81x,\ 18x^2$ (ii) $3m^2, 7m, 6m^2$

(iii) $4x^2y, 10y^2z$ (iv) $12x^2yz^2, 18xy^2z, 16xyz^2$

(v) $4a^2b^2, 6ab^2, 10a^3b^3$ (vi) $10xy^2, 14x^2y, 20x^3y^2, 18x^3y$

آیئے اب ہم 'ع۔ا۔م' کے تصور کے استعمال سے عبارتوں کے اجزائے ضربی معلوم کریں۔ الجبرائی عبارتوں کو دو اعداد 'ع۔ا۔م' کے ذریعہ معلوم کیجئے۔ اب ہم دو اعداد کے 'ع۔ا۔م' معلوم کرنے کے طریقہ کار پر غور کریں۔ مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں۔

مثال 8 : عبارت $24pq^2 - 16p^2q^2$ میں دو ارکان $24pq^2$ اور $16p^2q^2$ ہیں۔

آیئے اب ہم ان دو ارکان کے HCF کو معلوم کریں گے۔

(مفرد اجزائے ضربی) $24pq^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times p \times q \times q$

$$16p^2q^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q$$

ان کا (ع۔ا۔م) $\quad$ ع۔ا۔م $= 2 \times 2 \times 2 \times p \times q \times q$

$$= 8pq^2$$

$$\therefore\ 24pq^2 - 16p^2q^2 = 8pq^2\,(3 - 2p)$$

مثال 9 : عبارت $8x^2y^3 + 10x^3y^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل:

$$8x^2y^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times y \times y \times y$$

$$10x^3y^2 = 2 \times 5 \times y \times y \times x \times x \times x$$

$$\text{H.C.F} = 2 \times x \times x \times y \times y$$

$$= 2x^2y^2$$

$$\therefore\ 8x^2y^3 + 10x^3y^2 = 2x^2y^2\,(y + 5x).$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

I. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی لکھئے۔

(i) $8xy + 6y^2$ $\qquad$ (ii) $9m^2n - 6n^2m$

(iii) $x^2y + y^2x - x^2$ $\qquad$ (iv) $6x^7 + 3x^4 - 15x^3$

(v) $a^3b^8 - 7a^{10}b^4 + 2a^5b^2$ $\qquad$ (vi) $2x(x^2 + 1)^3 - 16(x^2+1)^5$

مثال -10 : $(25p^2 - 49q^2) \div (5p + 7q)$

حل: عبارت $25p^2 - 49q^2$ کو مزید اس طرح ظاہر کیا جاسکتا ہے $(5p)^2 - (7q)^2$ اور یہ الجبرائی عبارتی اکائی $x^2 - y^2$ کی طرح ہے۔

جہاں $x = 5p$ اور $y = 7q$

$$\therefore\ \frac{25p^2 - 49q^2}{(5p+7q)} = \frac{(5p)^2 - (7q)^2}{(5p+7q)}$$

$$= \frac{(5p+7q)(5p-7q)}{(5p+7q)}$$

$$= 5p - 7q$$

مندرجہ بالا دو مثالوں پر غور کرنے پر معلوم ہوتا ہے کہ اجزائے ضربی کی مدد سے الجبرائی عبارتوں کو سادہ ترین شکل میں لکھا جاسکتا ہے اور مزید ان کے ع۔ا۔م کی مدد سے مختصر کیا جاسکتا ہے۔

اب تک ہم نے ایک الجبرائی عبارت کے جزو جزو ضربی یا اجزائے ضربی کس طرح حاصل کی جاسکتی ہیں اس کا فہم حاصل کر چکے ہیں۔

آیئے اب ہم اجزائے ضربی لینے کے طریقہ پر غور کریں گے۔

I. مشترک جز یا اجزا کے ذریعہ

مثال 11 : $2x^2 + 4x^2 + 8x^3$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: سب سے پہلے دیئے گئے تین ارکان میں مشترک قدر یا جز معلوم کرنا چاہیے اور اس کے لئے ان ارکان کو مفرد اجزا کے حاصل ضرب میں لکھنے پر

اس طرح

$$2x^4 = 2 \times x \times x \times x \times x$$

$$4x^2 = 2 \times 2 \times x \times x$$

$$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x$$

ان تین ارکان میں سب سے بڑا مشترک جز $2 \times x \times x$ یعنی $2x^2$ ہوگا۔

اس طرح ان تین ارکان سے ع۔ا۔م $2x^2$ کو مشترک لینے پر

$$\therefore \; 2x^4 + 4x^2 + 8x^3 = 2x^2(x^2 + 2 + 4x)$$

$$= 2x^2(x^2 + 4x + 2).$$

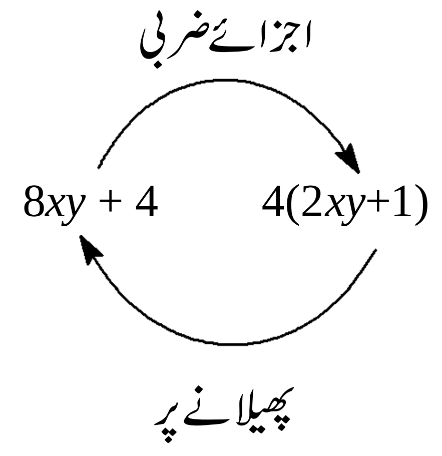
مثال 12 : $8xy + 4$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: $\therefore \; 8xy = 2 \times 2 \times 2 \times x \times y$

$$4 = 2 \times 2$$

دونوں ارکان میں سب سے بڑا مشترک جز ضربی کیا ہے؟

$$\therefore \; 8xy + 4 = 4(2xy + 1)$$



اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. مشترک جز کی مدد سے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $4y^3 + 2y^2$ (ii) $3xyz + 16x^2y$

(iii) $5l^2m - 25m^2n + 10lm$ (iv) $8x^2 + 10x^2y - 20xy^2$

II. ارکان کی دوبارہ درجہ بندی (گروپنگ) کی مدد سے

ذیل کی مثال پر غور کریں۔

مثال 13 : $12a - n + na - 12$

مندرجہ بالا عبارت کے تمام ارکان میں کوئی بھی جز مشترک نہیں ہے۔ ان حالات میں عبارت کے ارکان کو ردوبدل (دوبارہ درجہ بندی گروپنگ) کی مدد سے لکھا جاتا ہے۔ ردوبدل یا ری گروپنگ میں تین مرحلے ہوتے ہیں۔ 1) ان ارکان کو ایک ساتھ لکھا جائے ان میں جز مشترک ہوتے ہیں۔ 2) ہرایک رکن یا گروپ کا جزوضربی لینا چاہیے۔ 3) ہر گروپ سے مشترک جزو مشترک لینا چاہیے۔ مندرجہ بالا مثالوں پر غور سے مشاہدہ کرتے ہوئے پہلا اورآخری رکن سے '12' مشترک آتا ہے اور دوسرے اور تیسرے ارکان سے مشترک 'n' لیا جاسکتا ہے۔ اس طرح ان ارکان کی درجہ بندی (ری گروپنگ) کی جاسکتی ہے۔

$$\begin{aligned} 12a - n + na - 12 &= 12a - 12 - n + na \\ &= (12a - 12) + (na - n) \\ &= 12(a - 1) + n(a - 1) \end{aligned}$$

مزید یہ کہ $(a - 1)$ دونوں ارکان کا مشترک جز ہے۔اس لئے ان کو مشترک لینے پر

$$\begin{aligned} 12a - n + na - 12 &= 12(a - 1) + n(a - 1) \\ &= (a - 1)(12 + n) \end{aligned}$$

$\therefore$ $12a - n + na - 12$ کے اجزائے ضربی $(a - 1)$ اور $(12 + n)$ ہیں۔

مثال 14 : $xy + 6 + 3x + 2y$ کے اجزائے ضربی لکھئے۔

حل: عبارت میں 4 ارکان موجود ہیں۔

کیا ان 4 ارکان میں مشترک جزوضربی ہے؟

ان 4 ارکان میں کوئی بھی مشترک جزوضربی نہیں ہے لیکن اگر ہم بغور مشاہدہ کرنے پر پہلے اور تیسرے رکن میں مشترک جز 'x' ہے۔ جب کہ دوسرے اور چوتھے رکن میں مشترک جزضربی '2' ہے۔

آیئے اب ہم ان ارکان کو دوبارہ درجہ بندی ری گروپنگ کرنے پر

$$\begin{aligned} xy + 6 + 3x + 2y &= xy + 3x + 6 + 2y \\ &= x(y + 3) + 2(3 + y) \\ &= x(3 + y) + 2(3 + y) \end{aligned}$$

مزید $(3 + y)$ مندرجہ بالا میں مشترک جزضربی ہے۔اس رکن کو مشترک لینے پر

$$\therefore\ xy + 6 + 3x + 2y = (3 + y)(x + 2)$$

اس طرح عبارت $xy + 6 + 3x + 2y$ کے جزوضربی $(x + 2)$ اور $(3 + y)$ ہیں۔

مندرجہ بالا عبارت کو مزید آپ اپنے انداز میں دوبارہ درجہ بندی (ری گروپنگ) کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

مثال 15 : عبارت $a^2 + bc + ab + ac$ کو دوبارہ درجہ بندی (ری گروپنگ) کرتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: $a^2 + bc + ab + ac$ (کوری گروپنگ) دوبارہ درجہ بندی کرتے ہوئے اس طرح لکھا جاتا ہے:

$$\therefore\ a^2 + bc + ab + ac = a^2 + ab + ac + bc$$

$$= a(a + b) + c(a + b)$$

$$= (a + b)(a + c)$$ (یہاں پر کونسا رکن مشترک ہے)

مثال 16 : $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی الجبرائی عبارت $ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2$ ہے جس کو دوبارہ ترتیب دینے پر

$$\therefore\ ax^2 + by^2 + bx^2 + ay^2 = ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$$

$$= a(x^2 + y^2) + b(x^2 + y^2)$$

$$= (x^2 + y^2)(a + b)$$ (کس طرح سے)

مثال 17 : $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل: دی گئی الجبرائی عبارت $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$ کو پھیلانے پر

$$= abx^2 + aby^2 + a^2xy + b^2xy$$

مزید اس کو درجہ بندی کرنے پر

$$= (abx^2 + a^2xy) + (aby^2 + bxy)$$

$$= ax(bx + ay) + by(ay + bx)$$

$$= ax(bx + ay) + by(bx + ay)$$

$$= (bx + ay)(ax + by).$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے۔

I. مندرجہ ذیل کے الجبرائی عبارتوں کو دوبارہ ترتیب دیتے ہوئے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

(i) $xy - pq + qy - pz$ (ii) $x^2 + 9y + 9x + xy$

(iii) $7ab - 12bc - 7ax + 12cx$ (iv) $4xy - 7y + 12x - 21$

(v) $2x^2 + ay - ax^2 - 2y$

III. معیاری اکائیوں کی مدد سے اجزائے ضربی

آیئے مثالوں کے ذریعہ معیاری اکائیوں کے استعمال کی مدد سے اجزائے ضربی کے طریقہ کار کا مشاہدہ کریں۔

مثال 18 : $x^2 + 8x + 16$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: مندرجہ بالا عبارت (کثیر رکنی) کا مشاہدہ کرنے پر اس میں 3 ارکان موجود ہیں۔ یہ تمام مثبت ہیں۔ مزید پہلا رکن کامل مربع ہے۔ کیا آپ اکائی کا اعادہ کر سکتے ہیں؟

$x^2 + 8x + 16$ اکائی $a^2 + 2ab + b^2$ کی شکل میں ہے۔

جہاں پر $a = x$ اور $b = 4$

$$[a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$$

$$x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$$

$$= (x + 4)^2$$

$$= (x + 4)(x + 4)$$

$$\therefore \quad x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4).$$

مثال 19 : $81m^2 - 100$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: $81m^2 - 100$ کا مشاہدہ کرتے ہوئے دونوں ارکان میں کوئی بھی مشترک جز نہیں ہے۔ لیکن یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ دونوں ارکان کامل مربع ہیں۔ مزید یہ کہ ان کے درمیان منفی علامت موجود ہے۔

مندرجہ بالا نکات سے یہ اکائی $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ کے مشابہ ہے۔

آیئے $18m^2$ اور 100 کی طرح کامل مربع میں تبدیل کئے جا سکتے ہیں۔

$$81m^2 - 100 = (9m)^2 - (10)^2$$

یہاں $x = 9m$ اور $y = 10$

$$= (9m + 10)(9m - 10)$$

$$\therefore \quad 81m^2 - 100 = (9m + 10)(9m - 10)$$

مثال 20 : کثیر رکنی $9x^2 - 12mx + 4m^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: مندرجہ بالا عبارت میں $9x^2$ اور $4m^2$ کامل مربع ہیں۔

$$4m^2 = 2^2 m^2 = (2m)^2 \qquad \therefore 9x^2 = 3^2 x^2 = (3x)^2$$

درمیانی رکن $12mx$ اس طرح سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$\therefore 12mx = 2(3x)(2m)$$

اب یہ عبارت $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ اکائی کی طرح ہے

جہاں پر $a = 3x$ اور $b = 2m$

$$\therefore \; 9x^2 - 12mx + 4m^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2m) + (2m)^2$$

$$= (3x - 2m)^2$$

$$\therefore 9x^2 - 12xm + 4m^2 = (3x - 2m)(3x - 2m)$$

مثال 21 : $16x^2 + 8x - 1$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: $16x^2 + 8x - 1 = (4x)^2 + 2(4x)(1) + (1)^2$

یہ $a^2 + 2ab + b^2$ کی شکل میں ہے۔

جہاں پر $a = 4x$ اور $b = 1$

$$16x^2 + 8x - 1 = (4x + 1)^2 \quad [\therefore a2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$$

$$16x^2 + 8x - 1 = (4x + 1)(4x + 1)$$

مثال 22 : $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

حل: دی گئی کثیر رکنی $(x + 1)^2 - (x - 1)^2$ ہے یہ $a^2 - b^2$ کی شکل میں ہے۔

اس طرح

$$(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = (x + 1 + x - 1)(x + 1 - x + 1) \; [\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= (2x)(2)$$

$$= 4x.$$

مثال 23 : $9a^2 - 30a + 25$

حل: مندرجہ بالا کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$9a^2 - 30a + 25 = (3a)^2 - 2(3a)(5) + (5)^2$$

$$= (3a - 5)^2 \qquad [\therefore \text{ کیوں }]$$

$$= (3a - 5)(3a - 5)$$

$$\therefore\ 9a^2 - 30a + 25 = (3a - 5)(3a - 5).$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

I. معیاری اکائیوں کی مدد سے مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 + 10x + 25$ (ii) $4m^2 - 12mn + 9x^2$

(iii) $y^2 - 9$ (iv) $4p^2 - 20pq + 25q^2$

(v) $16x^2 - 36y^2$ (vi) $1 - 25(2a - 5b)^2$

(vii) $m^4 - n^4$ (اشارہ) $m^4 = (m^2)^2,\ n^4 = (n^2)^2$

مشق

1. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 + 6x$ (ii) $6y^2 + y^3 + 6y^4$

(iii) $7y^2 + 35z^3y$ (iv) $lx^2 + mx + nx^2$

(v) $3x^3 + 6x^2 + 9x^4$

2. مندرجہ ذیل عبارتوں کے اجزائے ضربی مناسب اکائیوں کی مدد سے معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 8x + 16$ (ii) $2x + 1 + 100x^2$

(iii) $72x^2 - 8$ (iv) $x^2 - 10x + 25$

(v) $\dfrac{m^2}{n^2} - 36$

3. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $c^2 - 2cd + d^2$ (ii) $a^2b^2 - 144$

(iii) $5x^2 - 80$ (iv) $p^2q^2 + 10pq + 25$

(v) $4ab - 5a - 12b + 15$

4. مندرجہ ذیل اعداد کے مربعے اکائیوں کی مدد سے معلوم کیجئے۔

(i) 890 (ii) 605 (iii) 99 (iv) 510 (v) 108

5. مندرجہ ذیل کے اجزائے ضربی معلوم کیجئے۔

(i) $6x^7 + 3x^4 - 9x^3$ (ii) $z^2 - 10z + 21$

(iii) $x^2 + 14x + 49$ (iv) $6w^4 - 7w + 3w^3 - 14w^2$

(v) $y^2z^6 - y^4z^{10} + 3y^2z^2$

اہم نکات

1. اجزائے ضربی کے طریقہ میں دیئے گئے عبارت یا قدر کو اس کے اجزاء کی ضرب کی شکل میں لکھا جاتا ہے۔
2. اہم الجبرائی اکائیاں مندرجہ ذیل ہیں:

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

3. عبارتیں جن کو آسانی سے ان اشکال میں ظاہر کیا جاتا ہے جیسے $a^2 + 2ab + b^2$ ، $a^2 - 2ab + b^2$ ، $a^2 - b^2$ کو اکائیوں کی مدد سے اجزائے ضربی لی جاتی ہے۔
4. دیئے گئے اعداد کا مربع $(a + b)^2$ اور $(a - b)^2$ کی اکائیوں کی مدد سے معلوم کیجئے۔

خطی مساوات
Linear Equations

سبق
2.3

2.3.0 اکتسابی مقاصد

اس باب کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہوں گے:

- ایک متغیر یا دو متغیرات میں روزمرہ زندگی میں آنے والے حالات کو خطی مساوات میں ظاہر کرنے کے قابل ہوں گے۔
- ایک متغیر پر مبنی خطی مساوات کے سوالات کو حل کریں گے۔
- دو متغیرات کی خطی مساوات پر مبنی سوالات کو حل کریں گے۔

2.3.1 تعارف

احمد اور مہوین اعداد کا کھیل کھیلتے ہیں۔ احمد، مہوین سے کہتا ہے کہ میں ایک عدد سوچتا ہوں۔ اگر میں اس عدد کا دگنا کرکے 5 کو اس میں سے منہا کردیتا ہوں تب میرا حاصل عدد 45 ہوتا ہے۔ کیا آپ میرا سوچا ہوا عدد کونسا ہے، معلوم کرسکتی ہو۔

آیئے اب ہم عدد کو جاننے کی کوشش کریں گے۔

آیئے ہم اس عدد کے بجائے انگریزی زبان کا کوئی حروف لیں۔

فرض کرو کہ وہ عدد x ہے، تب x کا دگنا کرنے پر یہ $2x$ ہوگا۔

عدد 5 کو اس قدر سے منہا کرنے پر (یعنی تفریق کرنے پر) یہ عبارت $(2x-5)$ ہوگی۔ لیکن احمد کے مطابق یہ قدر عدد 45 کے مساوی ہے اس لئے $2x - 5 = 45$

یہ مساوات $2x - 5 = 45$ ایک متغیر والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔

2.3.2 ایک متغیر والی خطی مساوات

اطہر دوکاندار کو 50 روپئے دیتا ہے اور دوکاندار اطہر کو 2 کیلو اور 10 روپئے واپس دیتا ہے۔ تب ایک کیلو کی قیمت کیا ہوگی؟

اس طرح $2x + 10 = 50$ (مساوات)

$2x + 10$ = (Left Hand side بائیں ہاتھ کی جانب)

50 = (Right Hand side دائیں ہاتھ کی جانب)

ایک متغیر والی خطی مساوات جو ایک الجبرائی عبارت ہوتی ہے جس میں متغیر اور مستقل ہوتے ہیں جو کسی عدد یا قدر کے مساوی لی جاتی ہے جس کا درجہ ایک ہوتا ہے $ax + by = c$ خطی مساوات کہلاتی ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

.1 مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات خطی مساوات ہے؟

$xy + yz = 12$ (iv) $6x^2 - 7xy = 20$ (iii) $4x - 5y = 10$ (ii) $3x + 7 = 8$ (i)

$7p - 3q = 11$ (vi) $4 = 2p - 3$ (v)

2.3.2 ایک متغیر میں خطی مساوات کا حل

ایک مساوات میں موجود متغیر کی وہ قدر جس پر LHS اور RHS کی قدر مساوی ہو جائے مساوات کا حل کہلاتا ہے۔ مساوات کی یہ قدر (ریشے) کہلاتے ہیں۔

مساوات کی میزان

مساوات کی میزانیت کا اصول یہ ہے کہ دی گئی مساوات کے دونوں جانب یعنی LHS اور RHS پر ایک جیسا عمل کیا جائے۔ جیسے دونوں جانب ایک ہی قدر جمع کی جائے، دونوں جانب ایک ہی قدر منہا (تفریق) کی جائے، ایک ہی قدر سے دونوں جانب ضرب دیا جائے یا دونوں جانب ایک ہی قدر سے تقسیم کیا جائے۔ مندرجہ ذیل مثالوں میں ہم اس عمل پر غور کریں گے۔

مثال 1 : مساوات (i $x + 3 = 9$ ، (ii $y - 4 = 7$ کو حل کیجئے

حل : (i (دونوں جانب 3- تفریق کرنے پر)

دی گئی مساوات $x + 3 = 9$

$\Rightarrow x + 3 - 3 = 9 - 3$

$\Rightarrow x + 0 = 6$

$\Rightarrow x = 6$

(ii (دونوں جانب 4 جمع کرنے پر)

دی گئی مساوات $y - 4 = 7$

$y - 4 + 4 = 7 + 4$

$\Rightarrow y - 0 = 11$

$y = 11.$

مثال 2 : $m - 8 = 9$ حل کریں۔

حل (دونوں جانب 8 جمع کرنے پر)

دی گئی مساوات $m - 8 = 9$ ......(1)

$\Rightarrow m - 8 + 8 = 9 + 8$

$\Rightarrow m + 0 = 17$

$\Rightarrow m = 17.$

جانچ: L.H.S

$m - 8 \quad [\therefore m = 17]$

$17 - 8 = 9$ RHS

$\therefore$ LHS = RHS

مثال 3 : $5x = 40$ حل کریں۔

حل (دونوں جانب 5 تقسیم کرنے پر) دی گئی مساوات $5x = 40$ ......(1)

$$\Rightarrow \frac{5x}{5} = -\frac{40}{5} \quad \text{(2)......}$$

$$\Rightarrow x = -8$$

جانچ: اگر $x = -8$ مساوات میں درج کرنے پر آیا LHS = RHS ہوگا یا نہیں؟ جانچ کیجئے۔

مثال 4 : $\frac{p}{7} = 4$ حل کیجئے۔

حل: دیا گیا $\frac{p}{7} = 4 \quad \text{(1)......}$

(دونوں جانب 7 سے ضرب کرنے پر)

$$\Rightarrow \frac{p}{7} \times 7 = 4 \times 7 \quad \text{(2)......}$$

$$\Rightarrow p = 28$$

مثال 5 : $3y + 37 = 8$ مساوات کو حل کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $3y + 37 = 8 \quad \text{(1)......}$

(دونوں جانب 37 سے تفریق کرنے پر)

$$3y + 37 - 37 = 8 - 37$$

$3y = -29$ (دونوں جانب 3 سے تقسیم کرنے پر)

$$\Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-29}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-29}{3}$$

کیا آپ نے غور کیا ہے کہ $\left(\frac{-29}{3}\right)$ ایک ناطق عدد ہے۔

جانچ: LHS $\Rightarrow y + 37$

$$3\left(\frac{-29}{3}\right) + 37$$

$$\Rightarrow -29 + 37$$

$$\Rightarrow 8 \text{ RHS}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

عام طور پر آپ نے غور کیا ہے کہ مساوات کی RHS جانب ہمیشہ قدر ہی ہوگی یہ ضروری نہیں ہے۔ دونوں جانب متغیرات بھی ہو سکتے ہیں۔

مثال 6 : $2x - 4 = x + 6$ کو حل کیجئے۔

حل: دی گئی مساوات $2x - 4 = x + 6$

(دونوں جانب 4 جمع کرنے پر)

$\Rightarrow \quad 2x - 4 + 4 = x + 6 + 4$

$\Rightarrow \quad 2x = x + 10$

(دونوں جانب $-x$ جمع کرنے پر)

$\Rightarrow \quad 2x - x = x - x + 10$

$\Rightarrow \quad x = 10.$

مثال 7 : $4(p - 3) = 3(p - 2)$ مساوات کو حل کیجئے۔

حل: $4(p - 3) = 3(p - 2)$

$\Rightarrow \quad 4p - 12 = 3p - 6$

(دونوں جانب 12 جمع کرنے پر)

$\Rightarrow \quad 4p - 12 + 12 = 3p - 6 + 12$

$\Rightarrow \quad 4p = 3p + 6$

دونوں جانب $3p$ تفریق کرنے پر

$\Rightarrow \quad 4p - 3p = 3p - 3p + 6$

$\Rightarrow \quad p = 6.$

مثال 8 : $5(x + 3) - 2(3 - 2x) = 3(x + 6) - 4(5 - x)$ مساوات کو حل کیجئے۔

حل: LHS : $5(x + 3) - 2(3 - 2x)$

$\Rightarrow \quad 5x + 15 - 6 + 4x$

$\Rightarrow \quad 9x + 9$

RHS :

$\Rightarrow \quad 3(x + 6) - 4(5 - x)$

$\Rightarrow \quad 3x + 18 - 20 + 4x$

$\Rightarrow \quad 7x - 2.$

$\therefore \; 9x + 9 = 7x - 2$

مساوات کی دونوں جانب 9 تفریق کرنے پر

$\Rightarrow \quad 9x + 9 - 9 = 7x - 2 - 9$

$\Rightarrow \quad 9x = 7x - 11.$

دونوں جانب $7x$ کو تفریق کرنے پر

$\Rightarrow \quad 9x - 7x = 7x - 7x - 11$

$\Rightarrow \quad 2x = -11$

دونوں جانب 2 کو تقسیم کرنے پر

$$\Rightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{-11}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-11}{2}$$

Now the variable can occur in the denominator also.

آیئے اس طرح کی چند مثالوں پر غور کریں۔ جن میں متغیرات نسب نما میں ہوتے ہیں۔

مثال 9 : $\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$ کو حل کیجئے۔

حل: آیئے مساوات کی دونوں جانب $(3x + 5)$ سے ضرب کرنے پر

$$\frac{(5x+2)}{(3x+5)} \times (3x+5) = \frac{6}{7} \times (3x+5)$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 2 = \frac{6(3x+5)}{7}$$

دوبارہ 7 سے دونوں جانب ضرب دینے پر

$$7(5x+2) = \frac{6(3x+5)}{7} \times 7$$

$$7(5x + 2) = 6(3x + 5) \qquad \ldots\ldots(2)$$

$\Rightarrow \quad 35x + 14 = 18x + 30$

$\Rightarrow \quad 35x - 18x = 30 - 14$

$\Rightarrow \quad 17x = 16$

$$x = \frac{16}{17}$$

آیئے اب مساوات $\frac{6}{7} = \frac{5x+2}{3x+5}$ پر غور کریں۔

مختصر کردہ مساوات کی شکل $7(5x + 2) = 6(3x + 5)$

آپ نے کیا محسوس (غور) کیا؟ جو کچھ ہم کر سکتے ہیں؟

1. LHS کے شمار کنندہ کو RHS کے نسب نما سے ضرب دیا جائے۔
2. RHS کے شمار کنندہ کو LHS کے نسب نما سے ضرب دیا جائے۔
3. اوپر کی قدر (1) اور (2) سے حاصل کو مساوی کرنے پر

$$\frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7} \qquad \frac{5x+2}{3x+5} = \frac{6}{7}$$

$$7(5x + 2) = 6(3x + 5)$$

مندرجہ بالا طریقہ کار کے اصول کو ''ضرب چالی پائی'' کہلاتا ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

I. مندرجہ ذیل مساواتوں کو حل کیجئے:

(i) $6q = 12$ (ii) $-6y = 30$ (iii) $\frac{n}{7} = -3$

(iv) $3x + 1 = 16$ (v) $3p - 7 = 0$ (vi) $6x - 3 = 3x$

(vii) $8m + 9 = 6m + 11$ (viii) $3x + 5 = 6(x + 2)$

(ix) $3(p - 4) = 5(2t - 1)$

(x) $8(x - 3) - (6 - 2x) = 2(x + 2) - 5(5 - x)$

(xi) $\frac{3p-5}{7p+2} = \frac{2}{3}$

II. ایک کسر کا شمار کنندہ اس کے نسب نما سے 4 کم ہے۔ اگر شمار کنندہ اور نسب نما دونوں میں ایک جمع کرنے پر یہ کسر $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہو جاتی ہے تب کسر معلوم کیجئے۔

2.3.3 دو متغیرات میں خطی مساوات

اگر ایک مساوات جس میں دو متغیرات موجود ہوں دو متغیرات کی خطی مساوات کہلاتی ہے۔ اس طرح دو متغیرات کی عام مساوات $ax + by + c = 0$ جہاں پر a ، b اور c کوئی حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$، $b \neq 0$ اس طرح x اور y متغیرات میں خطی مساوات کہلاتی ہے۔

آیئے چند مثالوں پر غور کیجئے۔

مثال 10 : ایک کاپی کی قیمت پن کی قیمت کی دگنی ہے۔اس عبارت کو دو متغیرات کی مساوات میں ظاہر کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ کاپی کی قیمت x روپے ہے اور

پن کی قیمت y روپئے ہے۔

ازروئے سوال

کاپی کی قیمت = دوگنا پن کی قیمت کے

$$` x = 2 ` y$$

$$x = 2y$$

$$x - 2y = 0$$ (دونوں جانب $2y$ کو تفریق کرنے پر)

مثال 11 : اسرا کی عمر اقرا کی عمر کا 3 گنا ہے۔اس عبارت کو دو متغیرات کی مساوات میں ظاہر کیجئے۔

حل : فرض کرو کہ اسرا کی عمر x سال ہے اور اقراء کی عمر y سال ہے۔

ازروئے سوال اقراء کی عمر اسراء کی عمر میں رشتہ $x = 3 \times y$

$$x - 3y = 0$$ (دونوں جانب $3y$ تفریق کرنے پر)

مثال 12 : مندرجہ ذیل مساواتوں کو خطی مساوات $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھئے اور مزید a، b اور c کی قدر معلوم کیجئے۔

حل : (i) $3x + 5y = 7$

$3x + 5y = 7$ مساوات کو اس طرح لکھنے پر

$$3x + 5y - 7 = 0$$

یہ عام مساوات $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ہے۔تقابل کرنے پر

$$a = 3 ، b = 5 ، c = -7$$

(ii) $x - \frac{y}{3} - 8 = 0$

$$1.x - \frac{1}{3}\ .\ y - 8 = 0$$

$$a = 1,\ b = -\frac{1}{3},\ c = -8$$

(iii) $7 = 2x$

$$2x - 7 = 0$$

$$2x + 0 - 7 = 0$$
$$a = 2$$
$$b = 0$$
$$c = -7.$$

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

1. مندرجہ ذیل مساوات کو عام مساوات $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہوئے a، b اور c کی قدر لکھئے۔

(i) $3x + 7y = 9$ (ii) $-2x + 3y = 8$ (iii) $y - 5 = 0$ (iv) $7 = 3x$

(v) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} - 7 = 0$ (vi) $5x = \frac{8}{3}$

2. مندرجہ ذیل عبارت سوالات کو دو متغیرات کی مساوات کی شکل میں ظاہر کیجئے۔

(i) دو اعداد کا حاصل جمع 27 ہے۔

(ii) ایک پنسل کی قیمت، پن کی قیمت کے نصف سے 3 کم ہے۔

(iii) افشاں کے نشانات انجم کے نشانات کے دگنا سے 5 زیادہ ہیں۔

2.3.4 دو متغیرات میں خطی مساوات کے حل

ہم جانتے ہیں کہ ایک متغیر والی خطی مساوات کا حل ایک (ریشہ) ہوتا ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں دو متغیرات کی خطی مساوات کے ریشوں (ریشے) کے بارے میں غور کریں۔

مثلاً $3x - 2y = 5$ دو متغیرات کی خطی مساوات پر غور کریں۔

تاہم ایک ہی قدر حل کے طور پر حاصل کرنے میں یا کئی قدر حاصل ہوتے ہیں؟

کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ $x = 3$ مساوات کا حل ہے؟

آیئے $x = 3$ کو مساوات میں درج کرتے ہوئے جانچ کریں۔

$$3x - 2y = 5$$
$$3(3) - 2y = 5$$
$$\Rightarrow 9 - 2y = 5$$
$$\Rightarrow 9 - 5 = 2y$$
$$\Rightarrow 4 = 2y$$
$$\therefore y = 2$$

اس طرح ایک مخصوص حل اس مساوات کے لئے حاصل ہوتا ہے جو x کی قدر پر منحصر ہوتا ہے اور اس کے لئے y کی قدر حاصل ہوتی ہے۔

x اور y کی یہ قدر دونوں مل کر مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

جیسے $x = 3$ اور $y = 2$ مساوات x اور y کے لئے۔

اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ ''خطی مساوات جس میں دو متغیرات ہوں ان کے حل میں دو قدر ہونے چاہئے۔ x پر منحصر y کی قدر جو مساوات کو مطمئن کرے'' اس طرح x اور y کی قدر جو مساوات کو مطمئن کرتی ہے اس کا حل کہلاتی ہے۔

آیئے اب ہم مساوات $3x - 2y = 5$ میں $x = 3$ اور $y = 2$ جو حل ہے درج کرنے پر $3x - 2y = 5$

$$\text{LHS}$$

$$3x - 2y$$

$$3(3) - 2(2)$$

$$\Rightarrow \quad 9 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 5 \text{ RHS.}$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $x = 3$ اور $y = 2$ مساوات کا حل ہے۔اس حل کو مرتب جوڑ کی شکل (3,2) میں لکھا جاتا ہے۔ جہاں پر x کی قدر پہلا اور y کی قدر دوسرا عدد ہوگا۔

کیا اس مساوات کا دوسرا کوئی حل وجود رکھتا ہے؟

آیئے اب ہم $x = 4$ درج کرنے پر مساوات $3x - 2y = 5$ میں

$$\Rightarrow \quad 3(4) - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 12 - 2y = 5$$

$$\Rightarrow \quad 12 - 5 = 2y$$

$$7 = 2y$$

اس طرح $\left(4, \dfrac{7}{2}\right)$ ایک اور حل ہے مساوات $3x - 2y = 5$ کا

کیا آپ اس مساوات $3x - 2y = 5$ کے مزید حل معلوم کر سکتے ہو؟ آیئے جانچ کریں کہ $(1, -1)$ اس مساوات کا ایک اور حل ہے یا نہیں؟

اس طرح دو متغیرات کی مساوات کے کئی حل (لامتناہی) حل ہوتے ہیں۔

نوٹ: دو متغیرات میں مساوات کا حل حاصل کرنے کا آسان طریقہ کار یہ ہے کہ $x = 0$ درج کرنے پر y کی قدر حاصل ہوتی ہے اور اسطرح $y = 0$ درج کرنے پر متعلقہ x کی قدر حاصل ہوگی۔

آیئے چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال 13 : مساوات $4x - y = 3$ کے چار مختلف حل معلوم کیجئے۔

حل : (i) مساوات $4x - y = 3$ میں اگر $x = 0$ درج کرنے پر

$$4(0) - y = 3$$
$$0 - y = 3$$
$$y = -3$$

اس طرح حل $(0, -3)$ ہوتا ہے۔

(ii) مساوات $4x - y = 3$ میں $x = 1$ درج کرنے پر

$$4(1) - y = 3$$
$$4 - y = 3$$
$$-y = 3 - 4$$
$$y = 1$$

اس طرح حل $(1, 1)$ ہوگا۔

(iii) مساوات $4x - y = 3$ میں $x = -1$ درج کرنے پر

$$4(-1) - y = 3$$
$$-4 - y = 3$$
$$-y = 3 + 4$$
$$-y = 7$$
$$y = -7$$

اس طرح حل $(-1, -7)$ ہوگا۔

مثال 14 : جانچ کیجئے کہ آیا مندرجہ ذیل میں کون سے حل ہے یا نہیں مساوات $x - 2y = 4$ کے

(i) $(4, 0)$ (ii) $(0, -2)$ (iii) $(2, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

حل : دی گئی مساوات $x - 2y = 4$ میں $x - 2y$ اور 4

(i) $(4, 0)$ مساوات میں $x = 4$ اور $y = 0$، LHS میں درج کرنے پر

$$4 - 2(0) = 4$$
$$4 - 0 = 4$$
$$4 = 4 \text{ (RHS).}$$

مساوات $x - 2y = 4$ میں $x = 0$ اور $y = 2$ درج کرنے پر

(ii) $(0, -2)$

مساوات $x - 2y = 4$ میں $x = 0$ اور $y = -2$ درج کرنے پر

$$0 - 2(-2) = 4$$

$$4 = 4 \text{ (RHS).}$$

$(0, -2)$ مساوات $x - 2y = 4$ کا بھی حل ہے۔

(iii) $(0, -2)$

$x - 2$ ، $y = 0$ مساوات سے تفریق کرنے پر

$$\text{LHS} \quad x - 2y = 4$$

$$\therefore \quad 2 - 2(0) = 4$$

$$\Rightarrow 2 \neq 4 \text{ (RHS).}$$

$\therefore$ $(2, 0)$ مساوات کا حل نہیں ہے۔

(iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

$x = \sqrt{2}$ ، $y = 4\sqrt{2}$ مساوات $x - 2y = 4$ سے تفریق کرنے پر

LHS:

$$\sqrt{2} - 2(4\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad -7\sqrt{2} \neq 4\text{(RHS)}$$

$\therefore$ $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ مساوات $x - 2y = 4$ کا حل نہیں ہے۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجیے۔

1. مندرجہ ذیل مساوات کے کوئی تین مختلف حل معلوم کیجیے

(i $5x + 2y = 10$ (ii $-4x + 3y = 12$ (iii $2x + 3y = 7$

2. جانچ کیجیے کہ آیا مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات کا حل ہے یا نہیں؟

(i $(3, 0)$ (ii $(0, 6)$ (iii $(2, -2)$ (iv $(\sqrt{3}, 0)$

3. K کی قدر معلوم کیجیے جب کہ $x = 1$ اور $y = 2$ مساوات $3x + 2y = K$ کا حل ہے۔

مشق

.1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

(i) $7 - p = 6$ (ii) $2b - 5 = 3$ (iii) $16 - 26 - x$ (iv) $3(x + 2) = 27$

(v) $by + 4 = 5y - 4$ (vi) $3(x - 3) = 5(2x + 1)$

.2 15 سال بعد ''زینت'' کی عمر اس کی موجودہ عمر کے چار گنا ہوجائے گی تب زینت کی موجودہ عمر معلوم کیجئے۔

.3 مندرجہ ذیل مساواتوں کو عام مساوات $ax + by + c = 0$ کی شکل میں ظاہر کیجئے۔ مزید b,a اور c کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $3x + 4xy - 7 = 0$ (ii) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7$

(iii) $\frac{y}{7} = 3x$ (iv) $2x = -7y$

.4 ذیل کے بیان کو خطی مساوات میں ظاہر کیجئے۔ (دو متغیرات میں خطی مساوات)

پنسل کی قیمت خرید 8 روپے اور پن کی قیمت خرید 15 روپے ہے۔ ''ابصار'' کل 140 روپے پنسل اور پن کے لئے دوکاندار کو ادا کرتا ہے۔

.5 مندرجہ ذیل مساوات کے لئے کوئی تین مختلف حل معلوم کیجئے۔

(i) $3x + 4y = 7$ (ii) $x + y = 0$ (iii) $10x - 11y = 21$ (iv) $x + 2y = -7$

.6 K کی قدر معلوم کیجئے جب کہ $x = -2$، $y = 1$ خطی مساوات $2x - 3y = 5$ کا حل ہے۔

اہم نکات

سادہ مساوات یا خطی مساوات روزمرہ زندگی میں آنے والے مسائل / سوالات کو حل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

.1 مساوات کی میزانیت: (a) ایک ہی مساوی قدر کو دونوں جانب جمع کرنا

(b) ایک ہی مساوی قدر کو دونوں جانب سے تفریق کرنا

(c) ایک ہی مساوی قدر سے دونوں جانب ضرب دینا

(d) ایک ہی مساوی قدر سے دونوں جانب تقسیم کرنا

.2 اگر ایک خطی مساوات میں صرف ایک متغیر ہو تب یہ مساوات سادہ مساوات یا ایک متغیر والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔

.3 اگر ایک خطی مساوات میں دو متغیرات ہوں تب یہ مساوات دو متغیرات والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔

.4 مساوات کا حل یعنی متغیر کی وہ قدر جس کی وجہ سے LHS اور RHS کی قدر مساوی ہوجائے۔

.5 x اور y کی جوڑ کی قدر کسی خطی مساوات کا حل ہوتی ہے اگر یہ مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

.6 دو متغیرات والی خطی مساوات کے کئی (لامتناہی) حل ہوتے ہیں۔

مشق 2.4

دو درجی مساوات
Quadratic Equations

2.4.0 اکتسابی مقاصد

اس باب کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہوں گے:

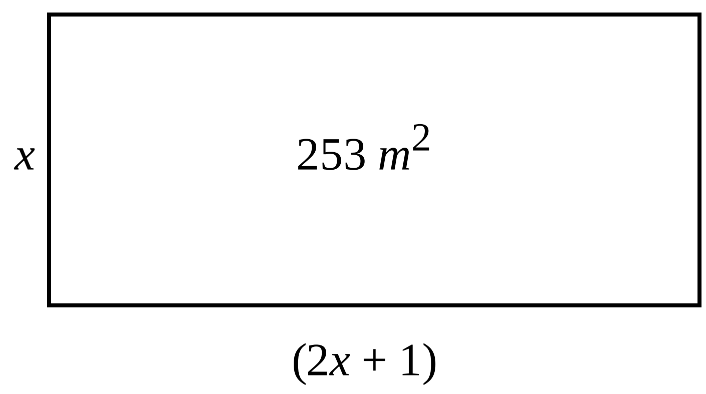
- دو درجی عام مساوات کے حل معلوم کریں گے اجزائے ضربی کے طریقہ کار کی مدد سے۔
- جب اجزائے ضربی کا طریقہ کار مناسب نہ ہونے پر دو درجی مساوات کو حل کرنے کے لئے ضابطہ اخذ کریں اور اس کی مدد سے حل معلوم کریں گے۔
- اگر دو درجی کے ریشے (صفر) دینے پر دو درجی مساوات حاصل کرنا سیکھ پائیں گے۔
- روزمرہ زندگی میں عبارتی سوالات کو دو درجی مساوات میں تبدیل کرتے ہوئے ان کے حل معلوم کرنا سیکھ پائیں گے۔

2.4.1 تمہید

انگریزی لفظ "Quadratic" دراصل لاطینی (Latin) زبان کے لفظ "Quadratum" سے اخذ کردہ ہے جس کے معنی ''مربع'' یا دو درجے کے ہوتے ہیں۔ ہم اس کو دو درجی مساوات کے طور پر لیتے ہیں۔ یعنی ایسی مساوات جن کا درج 2 ہوتا ہے۔ روزمرہ زندگی میں کئی مثالیں ہم کو دو درجی مساوات کی شکل میں ظاہر کیا جاتا ہے اور حالات کا تقابل کیا جا سکتا ہے۔

مثلاً ایک ادارہ یوگا سنٹر کے لئے بڑا کمرہ (ہال) تیار کرنا چاہتا ہے۔ اس ہال کا کارپٹ رقبہ 253 مربع میٹر ہے اس طرح کہ اس کا طول، عرض کے دوگنا سے 1 میٹر زیادہ ہے۔ تب ہال کا طول اور عرض معلوم کیجئے۔

فرق کرو کہ ہال کا عرض میٹر 'x' ہے تب اس ہال کا طول $(2x + 1)$ میٹر ہوگا۔ اب ہم ان معطیات کو مندرجہ ذیل میں اس طرح درج کر سکتے ہیں:



مستطیل ہال کا رقبہ = طول × عرض

$= (2x + 1) \times (x)$

$= (2x^2 + x)m^2.$

دیا گیا ہے کہ مستطیل ہال کا رقبہ $253\ m^2$ ہے۔

$$2x^2 + x = 253$$

$$\therefore\ \ 2x^2 + x - 253 = 0$$

پچھلے باب میں ہم نے خطی مساوات جیسے $ax + by = c$ میں 'x' کی قدر معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں۔اسی طرح مندرجہ بالا دودرجی مساوات سے 'x' کی ممکنہ اقدار معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

2.4.2 دودرجی مساوات (Quadratic Equations)

عبارت $5x^2 + 3x - 8 = 0$ دودرجی مساوات ہے۔طبیعات مضمون میں عام طور پر اس طرح دودرجی مساوات پر مبنی سوالات حاصل ہوتے ہیں جب ایک جسم جو حالت حرکت میں اسراع کے ساتھ سفر کررہا ہو ایک معین مدت کے درمیان یا پہیلیوں (Puzzles) جیسے ''ایک عدد'' دوسرے عدد کے دوگنا سے 2 زیادہ ہے جب کہ ان کا حاصل ضرب 60 ہے تب یہ اعداد معلوم کیجئے؟ یا پہلے n طبعی اعداد کا مجموعہ 78 ہو تب n کی قدر کیا ہوگی؟

آیئے مندرجہ بالا مثالوں (عبارتوں) سے کس طرح کی دودرجی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

پہلی '1' کی مدد سے دودرجی مساوات:

فرض کرو کہ پہلا عدد 'x' ہے تب دوسرا عدد (2x+2) ہوگا۔(چونکہ وہ x کے دوگنا سے 2 زیادہ ہے)

یہاں پر x اور $(2x + 2)$ کا حاصل ضرب 60 کے مساوی ہے۔

اس طرح مساوات ہوگی $x \times (2x + 2) = 60$

$$2x^2 + 2x = 60 \quad (\text{یا})$$

مساوات کے دونوں جانب 2 سے تقسیم کرنے پر

$$x^2 + x = 30$$

اس طرح مساوات $x^2 + x - 30 = 0$ ہوگی (مساوات 2)

دوسری مثال 2 کی مدد سے دودرجی مساوات:

ہم جانتے ہیں کہ پہلے n طبعی اعداد کا مجموعہ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ہوتا ہے۔

دیئے گئے مجموعہ سے تقابل کرنے پر مساوات اس طرح ہوگی۔

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78$$

دونوں جانب 2 سے ضرب کرتے ہوئے

ہم جانتے ہیں $n(n + 1) = 156$

اورتب $n^2 + n = 156$

اس طرح (مساوات3) $n^2 + n - 156 = 0$

اس طرح کے تمام دودرجہ رکھنے والی مساواتوں کو دودرجی مساوات کہتے ہیں۔

$ax^2 + bx + c = 0$ دودرجی عام مساوات ہے جہاں پر x نامعلوم عدد (قدر) ہے جب کہ a،b اور c کوئی حقیقی اعداد (مستقل) ہیں۔ اس طرح پہلی مساوات میں

$5x^2 + 3x - 8 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 3$ اور $c = -8$

آیئے اب ہم دوسری مثال میں a،b اور c کی قدر معلوم کریں گے۔

اس طرح $a = 1 , b = 1$ اور $c = -30$ ترتیب وار ہیں۔

تیسری مثال میں نامعلوم حروف n،x کے بجائے لیا گیا ہے۔

لیکن اس کی شکل دودرجی عام مساوات کی طرح ہے

اس لئے $a = 1, b = 1$ اور $c = -156$

مثال 1 : جانچ کیجئے: مندرجہ ذیل مساوات دودرجی مساوات ہیں یا نہیں۔

(i) $(x - 2)^2 + 3 = 2x - 5$ (ii) $x (x + 2) + 7 = (x + 3) (x - 3)$

حل (i) LHS $(x - 2)^2 + 3$

$= x^2 - 4x + 4 + 3$

$= x^2 - 4x + 7$

اس طرح

$x^2 - 4x + 7 = \text{RHS}$

$x^2 - 4x + 7 = 2x - 5$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x + 7 + 5 = 0$

$= x^2 - 6x + 12 = 0$

یہ مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے اس طرح

(ii) $x (x + 2) + y 7 = (x + 3) (x - 3)$

$\text{LHS} \Rightarrow x(x + 2) + 7$

$x^2 + 2x + 7$

$\text{RHS} \Rightarrow (x + 3) (x - 3)$

$x^2 + 2x + 7$

$\text{RHS} \Rightarrow (x + 3) (x - 3)$

$= x^2 - 9$

$\therefore \quad x^2 + 2x + 7 = x^2 - 9$

$2x + 7 + 9 = 0$

$2x + 16 = 0$

اس طرح مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ مندرجہ بالا مساوات کی شکل میں نہیں اس لئے یہ دودرجی مساوات نہیں ہے۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

جانچ کیجئے آیا مندرجہ ذیل مساواتیں دودرجی مساوات ہیں یا نہیں

(i $3x^2 = 8$ (ii $ax + b = d$ (iii $4x^2 = 3(x + 5)$

(iv $x(4x + 7) = x^2 + 3$ (v $x(x - 7) + 6 = (x - 3)(x + 2)$

2.4.3 دودرجی مساوات کی معیاری شکل (Standard form of a quadratic equation)

ہم جانتے ہیں کہ دودرجی کثیر رکنی $ax^2 + bx + c$ کی شکل میں لکھی جاتی ہے۔ اگر اس کثیر رکنی کو '0' کے مساوی کیا جائے تب یہ دودرجی مساوات کہلاتی ہے۔ اس طرح دودرجی مساوات کی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ہوتی ہے۔

معیاری دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

مثال 2 : مندرجہ ذیل مساوات کو دودرجی معیاری مساوات کی شکل میں ظاہر کیجئے اور مزید a,b اور c کی قدر لکھئے۔

(i) $2x^2 - 3x = 7$ (ii) $6 = x^2 - 3x$

(iii) $x^2 = -9$ (iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

حل:

(i) $2x^2 - 3x = 7$

ہم دی گئی مساوات کو $ax^2 + bx + c = 0$ معیاری شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$\therefore\ 2x^2 - 3x = 7 - 0$

دودرجی معیاری شکل $\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

اس طرح $a = 2, b = -3, c = -7$

(ii) $6 = x^2 - 3x$

ہم دی گئی مساوات کو $ax^2 + bx + c = 0$ معیاری شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$6 = x^2 - 3x$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

دودرجی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$

اس طرح $a = 1, b = -3, c = -7$ معیاری شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

(iii) $x^2 - 9$

ہم دی گئی مساوات کو $ax^2 + bx + c = 0$ معیاری دودرجی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$x^2 - 9$$

$$\Rightarrow x^2 + (0)(x) + 9 = 0$$

دودرجی معیاری شکل $ax^2 + bx + c = 0$

اس طرح $a = 1, b = 0$ اور $c = 9$

(iv) $x^2 = \sqrt{7}x$

ہم دی گئی مساوات کو دودرجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$x^2 = \sqrt{7}x$$

$$\Rightarrow x^2 - \sqrt{7}x + 0 = 0$$

دودرجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$

اس طرح $a = 1, b = -\sqrt{7}, c = 0$

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے:

مندرجہ ذیل مساوات کو دودرجی معیاری مساوات کی شکل میں لکھئے اور a,b اور c کی قدر لکھئے۔

(i) $x^2 = 2x - 3$ (ii) $6 = x^2 - 4\sqrt{2}x$

(iii) $\frac{1}{2} = 3x^2 - 4x$ (iv) $4x = -\frac{3}{2}x^2$

2.4.4 دودرجی مساوات کا حل اجزائے ضربی کے طریقہ کار پر

ایک غیر معلوم شدہ متغیر x کے لئے

آیئے اب ہم x کی قدر معلوم کرنے کے لئے مساوات $x^2 + 6x - 7 - 0$ میں اگر x کے بجائے 1 درج کرنے پر ہمیں یہ حاصل کر سکتے ہیں۔

$$(1)^2 + 6(1) - 7 = 0$$

$$1 + 6 - 7 = 0$$

مساوات RHS $= 0$

عدد 1 دودرجی مساوات $x^2 + 6x - 7 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

اس طرح عدد 1 دی گئی مساوات $x^2 + 6x - 7 = 0$ کا ریشہ ہے۔

اس طرح $x = 1$ دودرجی مساوات کا حل ہے۔ ہم $x=1$ کو دودرجی مساوات کا ''صفر'' بھی کہتے ہیں۔

عام طور پر ایک حقیقی عدد $'\alpha'$ دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کا ریشے ہوگا۔

اگر $(a \neq 1)$ $ax^2 + bx + c$ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x = \alpha$ دودرجی مساوات کا حل ہے۔

نوٹ: دو درجی کثیر رکنی $(a \neq 1)$ $ax^2 + bx + c$ کے ''صفر'' اور دو درجی مساوات $(a \neq 0)$ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ کے ریشے مساوی ہیں اگر $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ہو۔

مثال 3 : دو درجی مساوات $x^2 + 6x + 5 = 0$ کے ریشے اجزائے ضربی کے طریقہ کار معلوم کیجئے۔ دو درجی مساوات کے $ax^2 + bx + c$ پر غور کریں۔

حل : آیئے سب سے پہلے ہم درمیانی رکن کے دو ایسے ٹکڑے کرلیں فرض کرو کہ p اور q ہیں۔ اس طرح $p + q = b$ اور $p \times q = ac$ ہو۔

اس طرح دو درجی مساوات $x^2 + 6x + 5 = 0$ کا درمیانی رکن کے ٹکڑے کرنے پر فرض کرو کہ وہ p اور q ہیں۔ اس طرح سے کہ $p + q = 5 + 1$ اور $p \times q = 1 \times 5 = 5$ اس طرح میں $p = 5$ اور $q = 1$

اس لئے $x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x(x+5) + 1(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+5) = 0$$

اب $x^2 + 6x + 5 = 0$ کو اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$$(x+1)(x+5) = 0$$

اب $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

اس طرح $x = -1$ اور $x = -5$ دی گئی دو درجی مساوات کے حل ہیں۔

مثال 4 : مندرجہ ذیل دو درجی مساواتوں کے ریشے معلوم کیجئے۔ اجزائے ضربی کے طریقہ کار پر......

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$ (ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

(iii) $x^2 - 9 = 0$ (iv) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

(i) $x^2 - 5x - 6 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow x(x-6) + 1(x-6) = 0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x-6) = 0$$
$\Rightarrow x + 1 = 0$ یا $x - 6 = 0$

$x = 6$ اور $x = -1$

اس طرح $x = -1, x = 6$ دو درجی مساوات کے ریشے ہیں۔

(ii) $9x^2 - 3x - 2 = 0$

پہلا رکن $9x^2$ اس تفاعل میں 31 جمع اور تفریق کرتے ہوئے مساوات کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$$\Rightarrow \quad 9x^2 - 6x + 3x - 2 = 0$$

اگر ان دو ارکان $9x^2 - 6x$ سے $3x$ مشترک لیتے ہیں تب ہم $3x - 2$ قوس میں حاصل کرتے ہیں جب کہ باقی دو ارکان اس کے مساوی ہی ہیں۔ اس طرح سے

$$\Rightarrow 3x(3x-2)+1(3x-2)=0$$

$$\Rightarrow (3x+1)(3x-2)=0$$

$$\Rightarrow 3x+1=0 \quad \text{یا} \quad 3x-2=0$$

اگر $\Rightarrow \; x = \frac{2}{3}$ $\qquad \Rightarrow \; x = -\frac{1}{3}$

اس طرح دودرجی مساوات $9x^2 - 6x + 3x - 2 = 0$ کے ریشے $x = -\frac{1}{3}$ اور $x = \frac{2}{3}$ ہیں۔

(iii) $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

اس طرح دودرجی مساوات $x^2 - 9 = 0$ کے ریشے $x = 3$ اور $x = -3$ ہیں۔

(iv) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 3\sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x+3\sqrt{2}) - \sqrt{2}(x+3\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-\sqrt{2})\,(x+3\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x-\sqrt{2} = 0 \quad \text{یا} \quad x+3\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2} \quad \text{اور} \quad x = -3\sqrt{2}$$

دودرجی مساوات سے تقابل کرنے پر $c = -6$ ہے اس لئے مساوات میں $x^2 + 2\sqrt{2}x - 6 = 0$ میں $x = \sqrt{2}$ اور $x = -3\sqrt{2}$ جمع کرنے پر b اور ضرب کرنے پر c کی قدر حاصل ہوگی۔

مساوات لکھنے کا طریقہ کار

جب سوالات کو جملوں میں دیا گیا ہے۔ان حالات کو غور سے مشاہدہ کرتے ہوئے کس طریقہ کار کو استعمال کرنا چاہئے تا کہ سوالات کو حل کرنے میں مدد مل سکے۔مثلاً اس مثال پر غور کریں:

دو اعداد کا مجموعہ 48 ہے اور ان کا حاصل ضرب 432 ہے۔تب اعداد معلوم کیجئے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ ایک عدد x ہے اور یہاں پر x کی قدر کچھ بھی ہو سکتی ہے۔اس طرح دوسرے عدد کی قدر y ہے جس کو x کی رقوم میں $(48-x)$ لی جاتی ہے۔

اس طرح حاصل ضرب $xy = 432$

اس طرح مساوات $48x - x^2 = 432$

(ii) دو متصلہ طاق اعداد معلوم کیجئے جن کے مربعوں کا مجموعہ 290 ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ پہلا مثبت صحیح طاق عدد x ہے تب دوسرا متصلہ طاق عدد $(x + 2)$ ہوگا۔ان اعداد کے مربعوں کا مجموعہ =290

اس طرح دودرجی مساوات شامل ہوں

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے

1. دو متصلہ مثبت صحیح اعداد کا حاصل ضرب 306 ہے تب ان کی دودرجی مساوات لکھئے اور یہ اعداد معلوم کیجئے۔
2. ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کو ضرب کرنے پر 12 حاصل ہوتا ہے۔ جب اس عدد میں 36 جمع کرنے پر اس عدد کے ہندسے باہم تبدیل ہو جاتے ہیں۔اس لفظی عبارت کو دودرجی مساوات میں ظاہر کیجئے اور عدد معلوم کیجئے۔
3. اسرار کی امی کی عمر اسرار سے 26 سال زیادہ ہے۔تین سال بعد ان کی عمروں کا حاصل ضرب 360 ہوگا۔اس لفظی عبارت کی دودرجی مساوات بناؤ اور ان کی عمر معلوم کرو۔

مندرجہ ذیل مساوات کو حل کیجئے۔

آیئے سب سے پہلے اس مثال پر غور کریں۔

مثال 5 : اگر دو اعداد کا مجموعہ 48 ہے جب کہ ان دو اعداد کا حاصل ضرب 432 ہو۔تب اعداد معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ پہلا عدد x ہے۔

تب دوسرا عدد $(48 - x)$ ہوتا ہے۔

تب $(x)\,(48 - x) = 432$

$$\Rightarrow \quad 48x - x^2 = 432$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 48x + 432 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 36x - 12x + 432 = 0$$

$\Rightarrow \quad x(x-36) - 12(x-36) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-36)(x-12) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 36$ یا $x = 12$

$\therefore$ تب ان کا حاصل ضرب $= 432$

اس طرح عدد x ‘$(48 - 'x')$ ہیں۔

اگر $x = 36$

تب 36 ‘$(48 - 36) = 12$

یعنی $12, 36$ میں

اگر $x = 12$

تب $12, (48 - 12)$

$12, 36$ اس طرح اوراعداد 36 اور 12 ہوں گے۔

مثال 6 : دو متصلہ طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ 313 ہے تب اعداد معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ دو متصلہ طبعی اعداد

(x اور $x + 1$ ہیں)

تب $\Rightarrow (x)^2 + (x+1)^2 = 313$

$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 2x + 1 = 313$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 312 = 0$

مساوات کی دونوں جانب 2 سے تقسیم کرنے پر حاصل مساوات

$$\Rightarrow \quad \frac{2x^2}{2} + \frac{2x}{2} - \frac{312}{2} = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2 + x - 156 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 13x + 12x - 156 = 0$

$\Rightarrow \quad x(x+13) - 12(x+13) = 0$

$\Rightarrow \quad (x-12)(x+13) = 0$

$\Rightarrow \quad x - 12 = 0$ یا $x + 13 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 12$ یا $x = -13$

”دو اعداد کا مجموعہ 48 ہے جب کہ ان کا حاصل ضرب 432 ہے۔ اعداد معلوم کیجئے۔

$x = 12$ اور $x + 1 = 13$

دو درجی مساوات کے ریشے $x = 12$ اور $x = 13$ ہیں۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

1. اجزائے ضربی کے طریقہ کار پر مندرجہ ذیل مساوات کے ریشے معلوم کیجئے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

2. اعداد معلوم کیجئے اس طرح کہ دونوں کا مجموعہ 27 اور حاصل ضرب 182 ہے۔
3. دو اعداد کے مربعوں کا فرق 180 ہے۔ چھوٹے عدد کا مربع 8 گنا ہے بڑے عدد کا۔ تب دو اعداد معلوم کیجئے۔
4. والد اور بچے کی عمروں کا مجموعہ 45 سال ہے۔ پانچ سال پہلے تک ان کی عمر کا حاصل ضرب 124 سال تھا۔ تب ان کی موجودہ عمر کیا ہوگی؟

2.4.5 دودرجی مساوات کا حل دودرجی مساوات کے ضابطہ کی رو سے

کئی دودرجی مساواتوں کے درمیان رکن کے ٹکڑے کرنا یا اجزائے ضربی کے طریقہ کار پر دودرجی مساوات کو حل کرنا ناممکن ہوتا ہے۔

ان حالات میں عام طور پر ہر طرح کی دودرجی مساوات کے حل کے لئے ضابطہ کی مدد سے اس کے ریشے معلوم کئے جاسکتے ہیں۔ آیئے اب ہم ضابطہ اخذ کریں گے۔

دودرجی عام مساوات پر غور کریں $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

مساوات کی دونوں جانب a سے تقسیم کرنے پر

مرحلہ I : $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

مرحلہ II : $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$

مرحلہ III : (دونوں جانب $\frac{-c}{a}$ $\left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ جمع کرنے پر) $= \frac{-c}{a} + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$

$= x^2 + \frac{b}{a}x + \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right]^2$ (تاکہ یہ ایک کامل مربع ہوجائے)

$$\Rightarrow\ x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{-c}{a} + \left[\frac{b}{2a}\right]^2$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

مرحلہ IV: اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ تب دونوں جانب جذرالمربع ہے۔

$$x+\frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اس طرح دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے $x = \dfrac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اور $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہوتے ہیں۔

اگر $b^2 - 4ac \geq 0$ تب دودرجی مساوات کے ریشے حقیقی ہوں گے۔

اگر $b^2 - 4ac < 0$ تب دودرجی مساوات کے ریشے حقیقی نہیں ہوں گے۔ کیوں؟

اس طرح اگر $b^2 - 4ac \geq 0$، تب ہی دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ہوں گے۔

مندرجہ بالا ضابطہ کی مدد سے کسی بھی دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ اس ضابطے کو دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کرنے کا ضابطہ کہتے ہیں۔

آیئے اب ہم دودرجی مساوات کے ریشے ضابطہ کی مدد سے معلوم کریں۔

مثال 7 : ایک باغ کی چوڑائی x میٹر ہے۔ اس کا طول میٹر $(2x + 1)$ ہے۔

اگر اس باغ کا رقبہ 528 مربع میٹر ہو تب باغ کے طول اور عرض معلوم کریں۔

حل: دیا گیا ہے کہ عرض $= x$، طول $= (2x + 1)$، رقبہ $= 528$

عرض × طول = باغ کا رقبہ $528 = x(2x + 1)$

$\therefore\ 2x^2 + x - 528 = 0$

حاصل مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں ہے

$a = 2,\ b = 1,\ c = -528$

دودرجی مساوات کے ضوابطہ کی رو سے

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4} = \frac{-1\pm 65}{4}$$

$$\therefore\ x = \frac{-1-65}{4} = \frac{-66}{4} = \frac{-33}{2}$$

یا

$$x = \frac{-1+65}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

یعنی $x = 16$ یا $x = \frac{-33}{2}$

اس طرح 'x' کی قدر منفی نہیں لی جاسکتی ہے۔اس لئے باغ کا عرض 16 میٹر ہوگا۔تب باغ کا طول $(2x + 1)$

$2(16) + 1$

$32 + 1 = 33$ میٹر

مثال 8 : دومثبت صحیح طاق متصلا اعداد معلوم کیجئے جن کے مربعوں کا مجموعہ 290 ہوتا ہے۔

حل: فرض کروکہ پہلا چھوٹا مثبت صحیح طاق عدد x ہے۔ تب دوسرا مثبت صحیح طاق عدد $(x + 2)$ ہوگا۔

آیئے x کی قدر معلوم کریں،ازروئے سوال

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$x^2 + 2x - 143 = 0$$

اس دودرجی مساوات کوحل کرنے پر x کی قدر حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

آیئے دودرجی مساوات کے ریشوں کا ضابطہ کی مدد سے x کی قدر معلوم کریں۔

'x' حاصل ہوگا

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$x = 11$ یا $x = -13$

لیکن 'x' ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\therefore\ x \neq -13$$

اس لئے $x = 11$ لیا جائے $(x + 2) = 11 + 2 = 13$

اس طرح پہلا عدد x ہوگا یعنی $x = 11$

دوسرا عدد $x + 2$ ہوگا یعنی $(x + 2) = 11 + 2 = 13$

جانچ $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$

مثال 9 : دودرجی مساوات کا اگر حقیقی ریشہ موجود رکھتا ہوتو ضابطے کی مدد سے معلوم کیجئے۔

(i $3x^2 - 5x + 2 = 0$

حل:

(i $3x^2 - 5x + 2 = 0$

دی گئی دو درجی مساوات $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(2)$, $a = 3, b = -5, c = 2$

اس طرح $x + \frac{-2}{3}$ یا $x = -1$ = $\frac{-5 \pm 1}{6}$ = $= 25 - 4 = 1,\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6}$

اس طرح مساوات کے حقیقی ریشے -1 اور $\frac{-2}{3}$ ہیں۔

مثال 10 : $x + \frac{1}{x} = 3$ کے ریشے معلوم کیجئے۔

حل: دی گئی مساوات $x + \frac{1}{x} = 3$ کے دونوں جانب x سے ضرب کرنے پر

$$x^2 + 1 = 3x$$

یعنی $x^2 - 3x + 1 = 0$

یہاں پر یہ ایک دو درجی مساوات ہے $a = 1, b = -3, c = 1$

اس طرح $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

اس طرح دو درجی مساوات کے ریشوں کے ضابطہ کی مدد سے $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

اس طرح دو درجی مساوات کے ریشے $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ہیں۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

1. ضابطے کی مدد سے مندرجہ ذیل دو درجی مساوات کے ریشے معلوم کیجئے۔

(i) $2x^2 - 7x + 3$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

(iii) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ (iv) $6x^2 + x - 2 = 0$

2. مساوات $x - \frac{1}{x} = 3$ کے ریشے معلوم کیجئے۔

3. مندرجہ ذیل عبارتوں کو دو درجی مساوات تیار کیجئے اور ان کو حل کریں۔

(i) مستطیل کھیت کا وتر اس کے چھوٹے ضلع سے 60 میٹر زیادہ ہے۔ اگر اس کا طول (بڑا) ضلع چھوٹے ضلع سے 30 میٹر زیادہ ہے تب کھیت کے اضلاع کے طول معلوم کیجئے۔

(ii) دو اعداد کا فرق 180 ہے۔ اگر چھوٹے عدد کا مربع 8 گنا ہے بڑے عدد کا، تب اعداد معلوم کیجئے۔

2.4.6 دیئے گئے ریشوں کی مدد سے دودرجی مساوات تشکیل دینا

(Formation of quadratic equation with given roots)

فرض کرو کہ α اور β دو ریشے ہیں دودرجی مساوات کے' تب دودرجی مساوات اس طرح ہوگی۔

یعنی $x^2 - (\alpha + \beta)(x) + \alpha\beta = 0$

$x^2 -$ (ریشوں کا مجموعہ) $x +$ (ریشوں کا حاصل ضرب) $= 0$

ہم جانتے ہیں کہ دودرجی مساوات کے اعدادی ضریب اوران کے ریشوں کے درمیان مخصوص رشتہ وجود رکھتا ہے۔اس کی تصدیق کریں گے۔

اگر دودرجی مساوات کی معیاری شکل پرغور کریں تب اس نتیجہ پر پہنچ کر ہم آسانی سے ریشوں کا مجموعہ اور ریشوں کا حاصل ضرب معلوم کرسکتے ہیں۔

صرف x کے عددی ضریب x^2 کی عددی ضریب اور مستقل کی بنیاد پر معلوم کی جاسکتی ہیں۔

آیئے اب ہم معیاری دودرجی مساوات پرغور کریں۔

یعنی $ax^2 + bx + c = 0$

فرض کرو کہ α اور β اس معیاری دودرجی مساوات کے ریشے ہیں۔تب دودرجی مساوات کے ریشوں کا مجموعہ اوران کا حاصل ضرب کے ضابطے اس طرح ہوں گے:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{(x \text{ کا عددی ضریب})}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{مستقل رکن}}{x^2 \text{ کا عددی ضریب}}$$

نوٹ: دودرجی مساوات کے غیر ناطق ریشے زوجی جوڑ میں وجود رکھتے ہیں۔

یعنی اگر $(m + \sqrt{n})$ ایک ریشہ ہے تب $(m - \sqrt{n})$ ایک اور ریشہ ہوگا جو ایک دوسرے کے غیر ناطق زوج ہیں۔

آیئے اب ہم مزید مثالوں پرغور کریں گے۔جن میں ریشے دئے گئے ہیں اور دودرجی مساوات معلوم کرنا ہوتا ہے۔

مثال 11 : دودرجی مساوات معلوم کیجئے جب کہ اس کے ریشے 2 اور 3 ہیں۔

حل: فرض کرو کہ $\alpha = 2, \alpha = 3$ اور

ریشوں کا مجموعہ $\alpha + \beta = 2 + 3 = 5$

ریشوں کا حاصل ضرب $\alpha\beta = 2 \times 3 = 6$

ضابطہ کی رو سے

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - (5)(x) + 6 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

اس طرح ریشوں سے حاصل دو درجی مساوات ہوگی۔

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

مثال 12 : دو درجی مساوات معلوم کیجئے جب کہ اس کے ریشے $\frac{1}{4}$ اور 1- ہے۔

حل: فرض کرو کہ $\alpha = \frac{1}{4}$ ہیں اور $b = -1$ ہے۔

$\alpha + \beta =$ ریشوں کا مجموعہ $= \frac{1}{4} + (-1)$

$$= \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$$

$\alpha\beta =$ ریشوں کا حاصل ضرب $= \left(\frac{1}{4}\right) \times (-1) = \frac{-1}{4}$

ضابطہ کی مدد سے دو درجی مساوات کی تشکیل

$x^2 -$ (ریشوں کا مجموعہ) $x +$ (ریشوں کا حاصل ضرب) $= 0$

$$x^2 - x\left(\frac{-3}{4}\right) + \left(\frac{-1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

مساوات کے دونوں جانب 4 سے ضرب کرنے پر $4x^2 + 3x - 1 = 0$

مثال 13 : اگر $(2+\sqrt{3})$ ایک ریشہ ہے کیا دو درجی مساوات تشکیل دی جاتی ہے یا نہیں؟

حل:

ہم جانتے ہیں کہ دیا گیا ریشہ $(2+\sqrt{3})$ ایک غیر ناطق عدد ہے تب ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ غیر ناطق اعداد زوجی جوڑ کی شکل میں ریشے ہوتے ہیں۔

اس طرح اگر ایک ریشہ $(2+\sqrt{3})$ ہے تب دوسرا ریشہ $(2-\sqrt{3})$ ہوگا جو زوج ہے۔

$(2+\sqrt{3})$ اور $(2-\sqrt{3})$ دو درجی مساوات کے ریشے ہیں۔

ریشوں کا حاصل جمع

$$(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})$$

$$= 4$$

ریشوں کا حاصل ضرب

$$(2+\sqrt{3})\ \ (2-\sqrt{3})$$

$$= 2^2-(\sqrt{3})^2 = 4-3=1$$

ضابطہ کی رو سے دودرجی مساوات کی تشکیل

$x^2 -$ (ریشوں کا مجموعہ) $x +$ (ریشوں کا حاصل ضرب) $= 0$

$$\therefore\ \ x^2 - x\,(4) + 1 = 0$$

$$\therefore\ \ x^2 - 4x + 1 = 0$$

اس طرح دیۓ گئے غیر ناطق ایک ریشے کی مساوات $x^2 - 4x + 1 = 0$ ہے۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

1. دودرجی مساوات تشکیل دیجئے جس کے ریشے ذیل میں دیۓ گئے ہیں۔

(i) $1, 1$ (ii) $4, 1$

2. اگر دودرجی مساوات کا ایک ریشہ $(5 - \sqrt{7})$ ہے تب کیا دودرجی مساوات تشکیل دی جاسکتی ہے یا نہیں جس کے ریشے غیر ناطق ہیں۔

2.4.7 لفظی (عبارتوں) سوالات کے حل کے لئے دودرجی مساوات کا اطلاق

Application of quadratic equations to solve word problems

1. عدد اور اس کے مقلوب کا مجموعہ $2\frac{1}{30}$ ہے۔ تب عدد معلوم کیجئے۔
2. مستطیل کھیت کا احاطہ 82 میٹر ہے اور اس کا رقبہ 400 مربع میٹر ہے تب مستطیل کا عرض معلوم کیجئے۔
3. مساوی الساقین مثلث کا رقبہ 60 مربع سمر ہے اور اس کے مساوی ضلعوں کا طول 13 سمر ہے۔ تب اس کا قاعدہ معلوم کیجئے۔
4. 60 طلباء کی جماعت میں ہر ایک لڑکا اپنی جماعت میں موجود لڑکیوں کی تعداد کے مساوی روپئے جمع کرتا ہے جب کہ ہر ایک لڑکی اپنی جماعت میں موجود لڑکوں کی تعداد کے مساوی روپئے جمع کرتی ہے۔ اگر کل جمع کردہ رقم 1600 روپئے تب جماعت میں لڑکوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

مشق:

1. مندرجہ ذیل میں کون سی مساوات دودرجی مساوات ہے؟

(i) $x^2 + 8x = 0$ (ii) $x^2 + \frac{1}{x} = 2,\ \ (x \neq 0)$

(iii) $x^2 + 2x + 1 = 0$　　(iv) $x + 2 = 0$

(v) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$　　(vi) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$.

2. اجزائے ضربی کے طریقہ کار پر دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$　　(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$　　(iv) $100x^2 - 20x + 1$

(v) $x - \frac{3}{x} = 2$

3. ضابطہ کی مدد سے دودرجی مساوات کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$　　(ii) $6x^2 + 7x - 10 = 0$

(iii) $15x^2 - 28 = x$　　(iv) $12x^2 + 17x + 6 = 0$

4. مندرجہ ذیل مساوات کے ریشے معلوم کیجیے۔

(i) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,$　　(ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}\ (x \neq -4, 7)$

5. دودرجی مساوات تشکیل دیجیے جس کے ریشے 2 اور 3 ہیں۔

6. اگر دودرجی مساوات کا ایک رشتہ $(5 + \sqrt{3})$ ہے تب دودرجی مساوات تشکیل دیجیے۔

7. اگر دودرجی مساوات $ax^2 + 7x + 12 = 0$ کے دوریشے β اور α ہیں۔تب دودرجی مساوات معلوم کیجیے جس کے ریشے $(\alpha + \beta)$ اور $(\alpha - \beta)$ ہیں۔

8. اگر دودرجی مساوات $x^2 + px + q = 0$ کے دوریشے β اور α ہیں۔تب دودرجی مساوات معلوم کیجیے جس کے ریشے $\frac{\alpha}{\beta}$ اور $\frac{\beta}{\alpha}$ ہیں۔

9. ایک کرکٹ میاچ میں ظہیر، پٹھان کے حاصل کردہ وکٹ کے دوگنا سے 3 کم وکٹ حاصل کرتے ہیں۔ان دونوں کے حاصل کردہ وکٹوں کا حاصل ضرب 20 ہوتا ہے۔تب ہر ایک کے حاصل کردہ وکٹوں کی تعداد معلوم کیجیے۔

10. ایک دو ہندسی عدد کے ہندسوں کا حاصل ضرب 20 ہے۔اگر اس عدد میں 9 جمع کرنے پر حاصل عدد کے ہندسے کے مقام تبدیل ہو جاتے ہیں۔تب عدد معلوم کیجیے۔

11. ایک کسر کا شمار کنندہ اس کے نسب نما سے 3 کم ہے۔اگر اس کے شمار کنندے اور نسب نما دونوں میں عدد 2 جمع کرنے پر حاصل کسر کو پہلی کسر میں جمع کرنے پر حاصل $\frac{29}{20}$ ہوتا ہے تب کسر معلوم کیجیے۔

12. ایک سال پہلے والد کی عمر لڑکے کی عمر کا 8 گنا تھی۔اب والد کی عمر لڑکے کی عمر کے مربع کے مساوی ہے۔تب دونوں کی موجودہ عمر معلوم کریں۔

اہم نکات

اس باب میں ہم دودرجی کثیررکنیوں $p(x)$ اوردودرجی مساوات $p(x) = 0$ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔

(i اگر $p(x) = 0$ دودرجی مساوات ہے تب دودرجی کثیررکنی کے صفرہی دودرجی مساوات کے ریشے کہلاتے ہیں۔

(ii دودرجی معیاری مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ 'x' متغیر میں ہے۔جہاں پر a، b اور c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$

(iii اگر دو درجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کے ریشے α اور β ہیں تب ہم اس مساوات کو $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ کی شکل میں ظاہر کرسکتے ہیں۔

x^2 – (ریشوں کا مجموعہ) x + (ریشوں کا حاصل ضرب) $= 0$

(iv دودرجی مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ کےریشے ضابطہ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ حاصل ہوتے ہیں۔حقیقی ریشے $b^2 - 4ac \geq 0$ کی وجہ سے حاصل ہوتے ہیں اور $b^2 - 4ac < 0$ سے غیرحقیقی ریشے حاصل ہوتے ہیں۔

اس ضابطہ کودودرجی میں مساوات کے ریشوں کا ضابطہ کہتے ہیں۔

(v اگرہم $ax^2 + bx + c = 0$ کے دوخطی مساوات کے جزوضربی کی حاصل ضرب کی شکل ظاہر کرسکتے ہیں۔ تب ان خطی مساواتوں کوصفر'0' سے تقابل کرتے ہوئے دودرجی مساوات کے ریشے حاصل کرتے ہیں۔

سبق 2.5

عدد کے نمونے
Number Patterns

2.5.0 اکتسابی مقاصد

اس باب کے مکمل ہونے پر آپ اس قابل ہوں گے:

- دیئے گئے اعداد کی ترتیبی فہرست میں حسابی تصاعد کی شناخت کرنا۔
- حسابی تصاعد کا عام رکن (n واں رکن) کو اخذ کرنا۔
- حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنا۔
- دیئے گئے اعداد کی ترتیبی فہرست میں جیومٹریہ تصاعد کی شناخت کرنا۔
- جیومٹریہ تصاعد کا عام رکن (n واں رکن) کو اخذ کرنا۔

2.5.1 تمہید

روزمرہ زندگی میں کائنات میں واقع ہونے والے مختلف نمونوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ جیسے پھولوں کے گچھے کے اقسام' شہد کی مکھیوں کی جھتا کے سوراخوں کی اقسام' انناس کے چھلکوں کے سوراخ کے اقسام' اڑتے ہوئے پرندوں کے جھنڈ کے اقسام کے نمونے وغیرہ۔

مندرجہ ذیل شکل پر غور کریں:

'1' ایک مربع ←

'3' تین مربعے ←

'5' پانچ مربعے ←

1 مربع' 3 مربعے' 5 مربعے یہ اعداد کا ایک مخصوص ترتیب میں واقع ہوتے ہیں۔ اس ترتیب کو سلسلہ یا تصاعد کہتے ہیں۔

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں گے۔

(i) کیا اس کے بعد آنے والی خط پر کیا 7 مربعے ہوتے ہیں؟ (صادق/کاذب)

(ii) کیا چھٹویں خط پر 11 مربعے ہوں گے؟ (صادق/کاذب)

(iii) کیا بارہویں خط پر 22 مربعے ہوں گے؟ (صادق/کاذب)

(iv) کیا مربعوں کی تعداد اس نمونے میں طاق یا جفت ہوسکتی ہے؟ (صادق/کاذب)

مندرجہ بالا سلسلہ .....1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25 طرح سے ہوگا۔

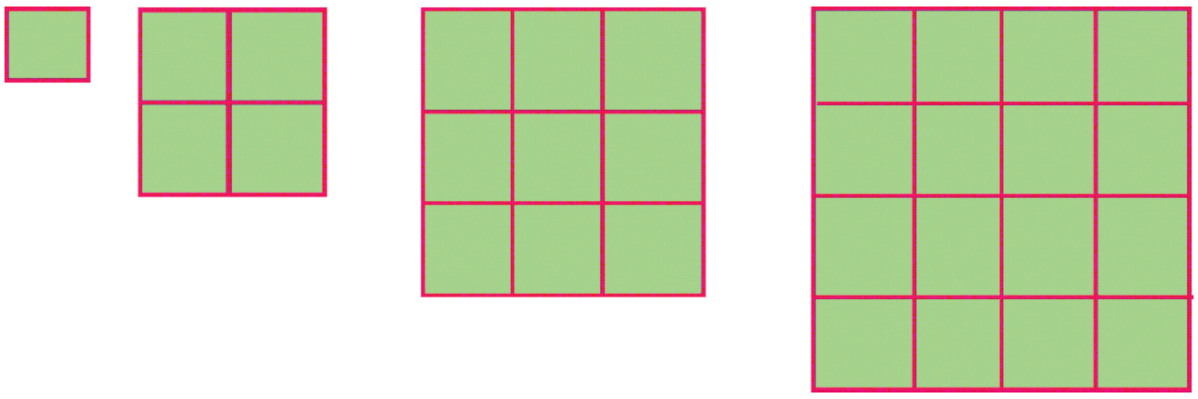
اعداد میں ہم مشترک خاصیت رکھنے والے اعداد کو چن کر چند سلسلہ (تصاعد) حاصل کر سکتے ہیں۔ مثلاً جفت اعداد کا سلسلہ (تصاعد) یعنی 2,4,6,8,10,12,14......

مزید اس طرح کے کئی سلسلے ہو سکتے ہیں مثلاً ہم دیکھتے ہیں کہ پہاڑوں کے سلسلے جیسے

$3 \times 1 = 3$	$5 \times 1 = 5$	$7 \times 3 = 21$	$8 \times 5 = 40$
$3 \times 2 = 6$	$5 \times 2 = 10$	$7 \times 4 = 28$	$8 \times 6 = 48$
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 3 = 15$	$7 \times 5 = 35$	$8 \times 7 = 56$
$3 \times 4 = 12$	$5 \times 4 = 20$	$7 \times 6 = 42$	$8 \times 8 = 64$

پہاڑوں کی مدد سے: 3 کے پہاڑے سے سلسلہ 3,6,9,12,15..... اس طرح 10 کے پہاڑے سے سلسلہ 10,20,30,40,50....

(ii) اکائی مربع سے بننے والے مربعے میں اکائی مربعوں کی تعداد کا سلسلہ ... ,1, 4, 9, 16 ہوگا جس کا ضلع اکائی مربع ......1, 2, 3, 4 مشتمل ہوتا ہے۔



اس نمونے میں حاصل اعداد کا سلسلہ؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ... $1 = 1^2,\ 4 = 2^2,\ 9 = 3^2,\ 16 = 4^2, \ldots$

یہ طبعی اعداد کے مربعوں کا سلسلہ ہے۔ آیئے مندرجہ ذیل میں دیئے گئے اعداد کے نمونوں میں مشترک خاصیت ممکن ہو تو شناخت کریں گے۔

1, 3, 5, 7, 9 ..... (1)

1, 4, 7, 10, 13 ..... (2)

5, 3, 1, –1, –3 ..... (3)

1, 3, 9, 27, 81, ... (4)

5, 5, 5, 5, 5, ... (5)

2, 4, 8, 16 , 32, ... (6)

مندرجہ بالا اعداد کی ترتیب کو ہم نمونہ یا سلسلہ کہتے ہیں۔ ان سلسلوں سے ہم ارکان کی تعداد یا سلسلہ کا مخصوص رکن اور سلسلہ کے ارکان کا مجموعہ وغیرہ معلوم کر سکتے ہیں۔ ایک شخص کی سالانہ آمدنی کیا ہوگی جب کہ وہ ماہانہ مستقل رقم حاصل کرتا ہے؟ آپ کس طرح آمدنی معلوم کریں گے؟

آپ کل کتنی رقم 100 دنوں میں اکٹھا کر سکیں گے جب کہ آپ روزانہ 5 روپئے جمع کرتے ہیں؟

اس طرح کتنے دنوں میں آپ 575 روپئے اکٹھا کر سکیں گے؟ آپ کس طرح کہہ سکتے ہیں؟

سلسلوں میں موجود منطق کی وجہ اور اس منطق کے استعمال کی مدد سے مندرجہ بالا سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

آیئے ان سلسلوں پر بحث کریں۔ مزید ان سلسلوں کو تصاعد کہتے ہیں۔

اس باب میں ہم دو اقسام کے تصاعد کے بارے میں جان پائیں گے۔ وہ تصاعد یہ ہیں:

(1) حسابی تصاعد (Arithmetic progression)

(2) جیومٹر یہ تصاعد (Geometric progression)

2.5.2 حسابی تصاعد (Arithmetic progression)

آیئے اس مرحلے (حالت) پر غور کریں۔

احمد اور طیب دونوں اپنے گاؤں کے پہاڑ کے اوپر سے سورج کے غروب ہونے کے منظر کا مشاہدہ کرنا چاہتے ہیں۔

ایک دن وہ دونوں پہاڑ پر ہر ایک قدم کو گنتے ہوئے چلتے ہیں اور ہر ایک قدم کو ان اعداد سے ظاہر کرتے ہیں 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

آیئے اب ہم اس پر بحث کریں:

احمد پہاڑ پر جلد پہنچنے کے لئے ہر قدم پر دو سیڑھی چڑھتا ہے اس طرح چڑھتے گئے قدم سے اعداد کا سلسلہ ......2,4,6,8,10,12 ہوگا۔

جب کہ طیب پہاڑ پر جلد پہنچنے کے لئے ہر تین منٹ میں 10 سیڑھی چڑھتا ہے۔

تب اس طرح اعداد کا سلسلہ ......10,20,30,40,50 ہوگا۔

احمد کے قدموں سے حاصل سلسلہ ......2,4,6,8,10۔ آپ کس طرح کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

"ہر ایک اگلا قدم عدد کو پچھلے قدم میں جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے"

اس طرح ہر ایک رکن میں عدد 2 جمع کرنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

احمد کے 10 ویں مرحلے پر وہ 20 ویں قدم پر ہوگا۔

اس طرح 15 ویں مرحلے پر وہ 30 ویں قدم پر ہوگا۔

مزید 20 ویں مرحلے پر وہ 40 ویں قدم پر ہوگا۔ اس طرح

2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , **20** , 22 , 24, 26 , 28 , **30** , 32 , 34 , 36 , 38 , **40** , 42 , ...

آیئے اب ہم طیب کے مرحلے (حالت) پر بحث کریں گے۔

طیب ہر تین منٹ میں 10 ویں قدم پر ہوتا ہے۔

سلسلہ ...., 50 , 40 , 30 , 20 , 10 اب اس مرحلے پر مشاہدہ کرتے ہوئے غور و بحث کریں۔

سلسلہ .... ,10, 20, 30, 40, 50

"ہرایک اگلا قدم عدد 10 کو پچھلے قدم میں جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے"۔

سلسلے کے کوئی بھی دو متصلہ اعداد کا فرق مستقل ہے اور یہ 10 ہے۔

طیب 15 منٹ میں 50 ویں قدم پر ہوگا۔ اس طرح 18 منٹ پر وہ 60 ویں قدم پر ہوگا۔ (یعنی 50 میں 10 جمع کرنے پر 60 ویں قدم حاصل ہوتا ہے) اس طرح

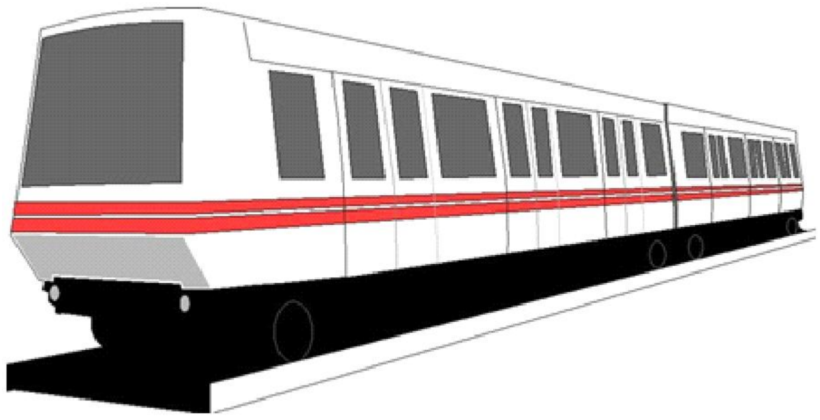
3 min, 6min, 9min, 12 min , 15min, 18min, 21min, 24min, 27min, 30min, 34min, …….

10 , 20 , 30 , 40 , 50 , **60**, 70 , **80** , 90 , **100** , 110 ,……..

اس طرح طیب 30 منٹ میں 100 ویں قدم پر ہوگا۔

آیئے اب ہم ایک اور مثال پر غور کریں۔

ایک میٹرو ریل جو ہر تین منٹ میں اسٹیشن پر آتی ہے یہ اس وقت جب لوگوں کا ہجوم اسٹیشن پر رہا' ہے۔ ریل کے اسٹیشن آنے کے وقفہ کو سلسلہ درج کیا گیا ہے (ایک گھنٹے کے دوران)



1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28,

31, 33,36, 39, 42,45, 48, 51, 54, 57, 60

مندرجہ بالا سلسلہ کا ہر ایک اگلا رکن عدد پچھلے عدد میں '3' جمع کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔

اس سلسلہ میں کسی کی دو متصلہ اعداد کا فرق 3 ہے اور یہ قدر مستقل ہے۔

آیئے اب ہم اس طرح کے مزید اعداد کے سلسلوں پر غور کریں اور ان کو کیا کہا جاتا ہے؟

اب ان اعداد کے سلسلوں کا مشاہدہ کریں۔

(i) 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ……….

(ii) 10 ,20 , 30 , 40 , 50 ,…………..

(iii) 10, 15, 20, 25, 30, …..

(iv) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 33,36, …………

اور مزید سلسلے

(v) $-3, -2, -1, 0, \ldots$

(vi) $5, 5, 5, 5, 5, \ldots$

(vii) $-1.0, -1.5, -2.0, -2.5, -3.0, -3.5, \ldots$

مندرجہ بالا سلسلوں میں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک مستقل قدر کو جمع کرنے پر ان سلسلوں کے اگلے رکن حاصل ہوتے ہیں۔ **اس طرح کے اعداد کا سلسلہ کو حسابی تصاعد کہا جاتا ہے (AP)**

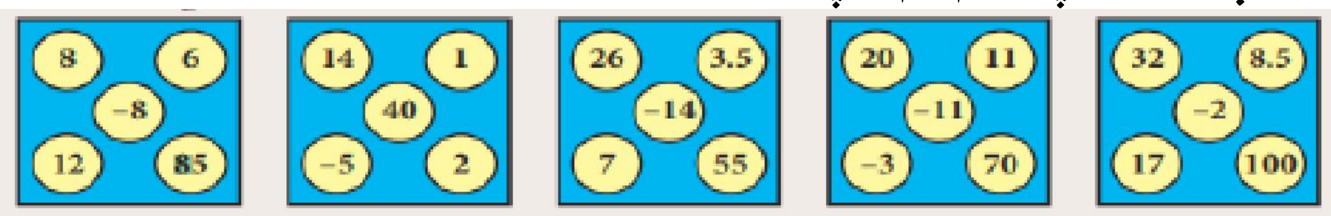
حسابی تصاعد "**اعداد کا سلسلہ/فہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو اس کے پیش رو عدد میں ایک معین عدد (مستقل عدد) جمع کرنے سے حاصل ہونے والا سلسلہ حسابی تصاعد کہلاتا ہے۔**"

جمع کیا جانے والا متعین عدد "**فرق مشترک**" کہلاتا ہے۔ **(یہ فرق مثبت، منفی یا صفر بھی ہوسکتا ہے۔)**

> **اگر حسابی تصاعد AP کا پہلا رکن a_1 اور دوسرا رکن a_2 اور تیسرا رکن a_3 اس طرح n واں رکن ہے تب مشترک فرق کو حرف 'd' سے ظاہر کیا جاتا ہے اور**
>
> **اس طرح** $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$

مشغلہ

ذیل میں پانچ مربعے دئے گئے ہیں ان مربعوں میں اعداد درج ہیں۔ آپ ہر ایک مربع سے ایک عدد اس طرح چن لیں کہ ان پانچ اعداد سے حسابی تصاعد تشکیل پائے۔ کم از کم کوئی پانچ سلسلے لکھئے۔



مثال 1 : مندرجہ ذیل اعداد کے سلسلوں میں کون سا سلسلہ حسابی تصاعد (AP) ہے۔ تب اس کا پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔

(i) $2, 7, 12, 17, 22, \ldots$

(ii) $4, 0, -4, -8, -12 \ldots$

(iii) $3, 7, 12, 18, 25 \ldots$

(iv) $2, 6, 18, 54, 162 \ldots$

حل:

(i) اعداد کا سلسلہ ......2,7,12,17,22 ایک حسابی تصاعد AP ہے

چونکہ 17-12-5، 12-7=5، 7-2=5 اور 22-17=5 اس طرح اس سلسلے کا ہر ایک رکن سوائے پہلے رکن کے ایک

مستقل قدر 5 پیش رو عدد میں جمع کرتے ہوئے اگلا رکن حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح پہلا رکن $a = 2$

اور مشترک فرق $d = 5$

(ii) دیا گیا سلسلہ $4, 0, -4, -8, -12, -16$ .....

(ii) ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $0 - 4 = -4,\ -4 - 0 = -4,\ -8 - (-4) = -4,\ -12 - (-8) = -4$

اس طرح یہ سلسلہ ایک حسابی تصاعد AP ہے۔

اس کا پہلا رکن $a = 4$

اور مشترک فرق $d = -4$ ہے۔

(iii) دیا گیا سلسلہ $3, 7, 12, 18, 25, \ldots$ ہے۔

$7 - 3 = 4$، $12 - 7 = 5$، $18 - 12 = 6$، $25 - 18 = 7$ (فرق)

سلسلہ کے کوئی بھی دو متصلہ اعداد کا فرق مشترک نہیں ہے۔ اس لئے دیا گیا سلسلہ حسابی تصاعد نہیں ہے۔

(iv) دیا گیا سلسلہ $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

$6 - 2 = 4,\ 18 - 6 = 12$ (فرق)

اس طرح کوئی بھی دو متصلہ اعداد کا فرق مشترک نہیں ہے۔ اس طرح یہ سلسلہ حسابی تصاعد نہیں ہے۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کریں

مندرجہ ذیل میں کون سا سلسلہ AP حسابی تصاعد ہے؟ اگر چہ AP میں ہیں تب اس کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d معلوم کیجئے:

1. $-5, -1, 3, 7, 11, \ldots$
2. $6, 7, 8, 9, 10, \ldots$
3. $1, 4, 6, 7, 6, 4, \ldots$
4. $-6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots$

2.5.3 حسابی تصاعد AP کا عام ارکان کی شکل

آیئے اب ہم احمد کے تکمیل کردہ قدموں کے سلسلے پر غور کریں جو ذیل میں درج ہے $2, 4, 6, 8, 10 \ldots$

سوچئے

کیا ہم مندرجہ بالا اعداد کے سلسلے کو ایک مخصوص اصول کو اپناتے ہوئے اس کے ہر ایک اگلے عدد میں مشترک قدر 2 کو اس کے پہلے رکن سے جمع کرتے ہوئے اس طرح ترتیب دیا جا سکتا ہے؟

$(2 + 0 \times 2), (2 + 1 \times 2), (2 + 2 \times 2), (2 + 3 \times 2), (2 + 4 \times 2), \ldots$

$(2 + 9 \times 2) \ldots\ (2 + 14 \times 2) \ldots\ (2 + 19 \times 2) \ldots$

اس حسابی تصاعد میں ہر ایک اگلا رکن اس کے پیش رو عدد میں مستقل قدر کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

تب، ہم کس طرح ان اعداد کو عام شکل میں حسابی تصاعد کو لکھ سکتے ہیں؟

آیئے غور کریں:

رکن کی عام شکل	رکن کی قدر کو شکل میں لکھنے پر	اظہار یا رکن	رکن
$a = a + (0)d = a + (1-1)d$	$(2 + 0 \times 2) = 2$	a_1	1
$a + 1d = a + (2-1)d$	$(2 + 1 \times 2) = 4$	a_2	2
$a + 2d = a + (3-1)d$	$(2 + 2 \times 2) = 6$	a_3	3
$a + 3d = a + (4-1)d$	$(2 + 3 \times 2) = 8$	a_4	4
	….	….	….
	….	….	….
	….	….	….
$[a + (n-1)d]$	$[2 + (n-1) \times 2]$	a_n	5

اس طرح ہم حسابی تصاعد کے تمام ارکان کی عام شکل لکھ سکتے ہیں۔

$a, (a + 1d), (a + 2d), (a + 3d), (a + 4d), \ldots$ $\mathbf{(a + 9d)} \ldots\ldots \mathbf{(a + 14d)} \ldots\ldots$

$\mathbf{[a + (n-1)d]}$.

حسابی تصاعد AP کا n واں رکن

کسی بھی حسابی تصاعد کا n واں رکن معلوم کرنے کا ضابطہ

$$a_n = a + (n-1) \times d$$

جہاں پر

a = پہلا رکن   **n = ارکان کی تعداد**

d = مشترک فرق   **a_n = n^{th} واں رکن**

حل کرنے کی کوشش

مندرجہ بالا مرحلہ (حالت) میں احمد ہر ایک قدم میں دو سیڑھیاں چڑھ رہا تھا تاکہ وہ پہاڑ پر جلد پہنچ پائے۔

احمد کے 26ویں قدم پر وہ کس سیڑھی پر ہوگا؟

آیئے اس سوال کو حل کرنے کے لئے ہمیں کون سے ضروری مرحلوں پر عمل کرنا چاہئے؟ سوچیے۔

آیئے اب ہم اس کو مرحلہ در مرحلہ حل کریں گے۔

حسابی تصاعد AP $2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots$ کا مشاہدہ کرنے پر

ہاں حسابی تصاعد کے پہلے رکن کی قدر معلوم کرنی چاہئے۔

یعنی 'a' کی قدر اور مزید مشترک فرق 'd' اور 'n' یعنی (ارکان کی تعداد/رکن کی تعداد)

ازروئے سوال ہم یہ سمجھتے ہیں کہ **اس حسابی تصاعد** **2, 4, 6, 8, 10, ...** کا26 واں رکن معلوم کرنا ہے۔

آیئے کوشش کریں۔

پہلا رکن $a = \mathbf{2}$

مشترک فرق $'d' = 4 - 2 = 6 - 4 = 2$

اس طرح $\mathbf{'d'=2}$

مخصوص رکن $\mathbf{'n'=26}$

حسابی تصاعد AP کا n واں رکنے معلوم کرنے کا ضابطہ کی رو سے

$$\boldsymbol{a_n = [a + (n-1)\,d]}$$

تب $a_{26} = 2 + (26-1)2$

$= 2 + (25) \times 2$

$a_{26} = 2 + 50 = 52$

اس طرح احمد اپنے 26 ویں قدم پر 52 ویں سیڑھی پر ہوگا۔

آیئے اب ہم اس حسابی تصاعد AP **2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...** کا n واں رکن n کی رقوم میں معلوم کریں۔

$a_n = [a + (n - 1)\, d]$

اس طرح $a_n = [2 + (n-1)\,2]$

$= 2 + 2n - 2$

$a_n = 2n$

آیئے اب ہم مزید چند مثالوں پر غور کریں۔

مثال 2 : حسابی تصاعد ... $16, 11, 6, 1, -4, -9,$ کا15 واں اور n واں رکن معلوم کیجئے۔

حل:

دیا گیا حسابی تصاعد AP $16, 11, 6, 1, -4, -9, \ldots$ ہے۔

یہاں پر $a = 16$ اور $d = 11 - 16 = -5$ ، $n = 15$

حسابی سلسلے کے n واں رکن کے ضابطے کی مدد سے

$a_n = [a + (n - 1)\, d]$

اس طرح $a_{15} = a + (15-1)\,d]$

$= a + 14d$

$= 16 + 14(-5)$

$= 16 - 70$

$= -54$

اب 15 واں رکن

$a_{15} = -54$

اب $a_n = a + (n-1)\,d$

$= 16 + (n-1) \times (-5)$

$= 16 - 5n + 5 = 21 - 5n$

اس طرح سلسلے کا n واں رکن

$a_n = 21 - 5n$

مثال 3 : حسابی تصاعد کا پہلا رکن 3– ہے اور اس کا 12 واں رکن 41 ہے۔ تب اس سلسلہ کا مشترک فرق معلوم کیجئے۔

حل: فرض کرو کہ سلسلے کا پہلا رکن a ہے اور مشترک فرق d ہے تب $a = -3$ ، $n = 12$ ، ...... اور $d = ?$

اس طرح

$a_n = a + (n-1)\,d$

$a_{12} = (-3) + (12-1)d = 41$ [چونکہ $a = -3$]

$= -3 + 11d = 1 \qquad \Rightarrow \; 11d = 44$

$d = 4$

سلسلہ کا مشترک فرق $d = 4$ ہے۔

مثال 4 : حسابی سلسلہ کا مشترک فرق 5 ہے اور اس کا 10 واں رکن 43 ہے تب اس سلسلہ کا پہلا رکن معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $d = 5$ ، $n = 10$ ، $a_{10} = 43$

$a_n = a + (n-1)d$

$a_{10} = a + (10-1) \times 5 = 43$

اس طرح $43 = a + 9 \times 5$

$43 = a + 45$

اس طرح سلسلے کا پہلا رکن $a = -2$ ہوگا۔

مثال 5 : حسابی تصاعد کا پہلا رکن 2– ہے اور اس کا 11 واں رکن 18 ہے۔ تب 15 واں رکن معلوم کیجئے۔

حل: 15 واں رکن معلوم کرنے کے لئے آپ سب سے پہلے d معلوم کریں اور پہلا رکن $a = -2$، $a_{11} = 18$، $a_{15} = ?$

اب

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{11} = a + (11-1)d$$

$$18 = -2 + 10d$$

$$10d = 20$$

$$d = 2$$

اب $a_{15} = ?$

$$a_{15} = a + (15 - 1)d$$

$$a_{15} = a + 14d$$

$$= -2 + 14 \times 2 = 2 + 28 = 26$$

اس طرح سلسلہ کا 15 واں رکن 26 ہے۔

مثال 6 : اگر حسابی تصاعد کے p واں رکن کا p گنا مساوی ہوتا ہے اس کے q واں رکن کا q گنا کے تب ثابت کیجئے کہ اس کا $(p+q)$ واں رکن صفر ہے۔

جب کہ $p \neq q$ کے

حل: فرض کرو کہ حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک فرق d ہے۔

$$a_p = a + (p-1)d$$

$$a_q = a + (q-1)d$$

ہم جانتے ہیں کہ از روئے سوال $pa_p = qa_q$

اس طرح، $p[a + (p-1)d] = q[a + (q-1)d]$

$$pa + p(p-1)d = qa + q(q-1)d$$

$$pa + p(p-1)d - qa - q(q-1)d = 0$$

$$pa + p^2d - pd - qa - q^2d + qd = 0$$

$$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - pd + qd = 0$$

$$(p-q)a + (p^2 - q^2)d - (p-q)d = 0$$

$$(p-q)a + (p-q)(p+q)d - (p-q)d = 0$$

$$(p-q)[a + (p+q)d - d] = 0$$

$$a + (p+q)d - d = 0 \quad [\quad p - q \neq 0]$$

$$a + (p + q - 1)d = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ یہ رکن a_{p+q} یعنی (p+q)واں رکن ہے۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

1. حسابی سلسلہ کا پہلا رکن 4 ہے اور مشترک فرق 3– ہے۔تب اس سلسلے کا 12واں رکن معلوم کیجئے۔
2. حسابی تصاعد کا پہلا رکن 2 ہے اور 9 واں رکن 26 ہے تب اس سلسلے کا مشترک فرق معلوم کیجئے۔
3. حسابی تصاعد کا 12 واں رکن 28– اور 8 واں رکن 46– ہے تب اس کا پہلا رکن اور مشترک فرق معلوم کیجئے۔
4. حسابی تصاعد .... ,1–, 2, 5 کا کون سا رکن 22 – ہوگا؟

2.5.4 حسابی تصاعد کے 'n' ارکان کا مجموعہ

آیئے مشاہدہ کریں

پہلے 100 طبعی اعداد کا مجموعہ معلوم کیجئے' آپ اس کو کس طرح حل کر سکتے ہیں؟

مشہور زمانہ ریاضی داں Guass نے اپنے ریاضی کے معلم کو اس کا جواب اس طرح دیا:

پہلے 100 طبعی اعداد یہ ہیں

1, 2, 3, 4, ..., 99, 100

ان پہلے 100 طبعی اعداد کا مجموعہ یعنی

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, 98 + 99 + 100$$

$$\underline{S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1}$$

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots .\, 101 + 101 + 101$$

$$2S = 100\ (101) = S = \frac{100}{2}\ (101)$$

$$= 50\ (101) = 5050.$$

اس طرح پہلے طبعی 100 اعداد کا مجموعہ 5050 ہوگا۔

اس طرح پہلے 'n' طبعی اعداد کا مجموعہ

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مندرجہ بالا طریقہ کار کو استعمال کرتے ہوئے حسابی تصاعد کے پہلے 'n' ارکان کا مجموعہ کی عام شکل معلوم کریں گے۔

ہم جانتے ہیں کہ 'n' ارکان کا مجموعہ

$$S = a + [a + d] + [a + 2d] + [a + 3d] + [a + 4d] \ldots\ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$$

مزید ہم بالا ارکان کو n ویں رکن سے پہلے رکن تک الٹا کر لکھنے پر

$$S = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+4d] + [a+3d] + [a+2d] + [a+d] + a$$

اب ہم مندرجہ بالا دونوں کے ارکان کو رکن سے رکن کو ملا کر جمع کرتے ہیں۔

$$S = a + [a + d] + \ldots\ldots + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d]$$

$$S = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \ldots\ldots + [a + d] + a$$

$$2S = [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots\ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]$$

اس طرح حاصل ہر ایک رکن مساوی ہے اور یہ کل n رکن ہیں۔

$$2S = n \times [2a + (n-1)d]$$

اب 2 سے تقسیم کرنے پر ہم کو حاصل ہوگا

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$$

حسابی تصاعد کے n ارکان کا مجموعہ $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$ ہوتا ہے۔

سوچئے

مسئلے کے حل کے تحت حسابی تصاعد

2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59

کا حل ارکان کے مجموعہ معلوم کرنا۔

ہم جانتے ہیں کہ دیا گیا سلسلہ متناہی سلسلہ ہے۔ ہم اس طرح حاصل کرتے ہیں کہ

$S_{20} = 610 = 10 \times [61] = 10 \times [4+57]$

یہاں پر اس طرح لکھ سکتے ہیں $10 \times [4 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 2 + 57]$

$= \frac{20}{2} \times [2 + 59]$

آیئے اب ہم مندرجہ بالا پر غور کریں:

ارکان کی تعداد $= n = 20$

پہلا رکن $= a = 2$

آخری رکن $a_n = 59$

تب حسابی تصاعد کے تمام ارکان کا مجموعہ

$S_n = \frac{n}{2} \times$ **[آخری رکن + پہلا رکن]**

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$

اس طرح اس ضابطہ کو عمومیت دی جاتی ہے۔

مثال 7 : حسابی تصاعد $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ کے پہلے 150 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا حسابی تصاعد $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ ہے۔

$a = 1$ ، $d = 3 - 1 = 5 - 3 = 2$ ، $n = 50$

حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان کے ضابطہ کی مدد سے

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{50}{2} \times [2 \times 1 + (50 - 1) \times 2]$$

$$= 25 \times (2 + 49 \times 2) = 25 \times (2 + 98) = 2500$$

مثال 8 : عدد 4 کے پہلے 30 اضعاف کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

حل: ہم عدد 4 کے اضعاف کیا ہوتے ہیں' جانتے ہیں۔

اس طرح 4 کے اضعاف کا سلسلہ ہوگا (30 اضعاف تک)

$$4, 8, 12, 16, 20, \ldots\ldots$$

سلسلے سے $a = 4$، $n = 30$، $d = 8 - 4 = 12 - 8 = 4$

ہم جانتے ہیں کہ

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} \times [2(4) + (30-1) \times 4]$$

$$S_{30} = 15 \times [8 + 116] = 15 \times 124$$

$$S_{30} = 1860.$$

مثال 9 : مندرجہ ذیل سلسلوں کے پہلے 12 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجئے۔

(i) $11, 16, 21, 26 \ldots$

(ii) $-151, -148, -145, -142$

حل: (i) دیا گیا حسابی تصاعد $11, 16, 21, 26 \ldots$

یہاں $a = 11$، $d = 16 - 11 = 5$ اور $n = 12$

ہم جانتے ہیں کہ حسابی تصاعد کے پہلے n ارکان مجموعہ کی رو سے

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$$

اس لئے، $S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times 11 + (12-1)5]$

$= 6 \times [22 + (60 - 5)]$

$= 6 \times [22 + 55]$

$= 6 \times 77 = 462$

اس طرح دئے گئے اعداد کا مجموعہ 462 ہے۔

(ii) دیا گیا حسابی تصاعد $-151, -148, -145, -142$ ہے۔

یہاں پر $a = -151, d = -148 - (-151) = 3, n = 12$

ہم جانتے ہیں کہ ارکان کا مجموعہ

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$$

اس طرح سلسلے کے پہلے 12 ارکان کا مجموعہ

$$S_{12} = \frac{12}{2} \times [2 \times (-151) + (12-1) \times 3]$$

$$S_{12} = 6 \times [-302 + (36 - 3)]$$

$$S_{12} = 6 \times [-302 + 33]$$

$$S_{12} = 6 \times (-269) = -1614$$

اس طرح سلسلے کے 12 ارکان کا مجموعہ -1614 ہوتا ہے۔

سوچئے

1. حسابی تصاعد میں 'n' کی قدر ہمیشہ مثبت ہوتی ہے۔ کیوں؟
2. اگر حسابی تصاعد کے ہر ایک رکن کو عدد 3 سے ضرب دیا جائے تب حاصل AP حسابی تصاعد فرق______ ہوتا ہے۔
3. اگر اور صرف اگر______ رشتہ ہونے پر ہی a، b اور c حسابی تصاعد میں ہوں گے۔

مثال 10 : حسابی تصاعد .... 2, 4, 6, 8, 10 کے کتنے ارکان لئے جائیں کے ان کا حاصل جمع (مجموعہ) 210 ہو۔

حل: دیا گیا سلسلہ $a = 2$، $d = 4 - 2 = 6 - 4 = 2$ اور $S_n = 210$

ہم جانتے ہیں کہ n ارکان کا مجموعہ

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n-1) \times d]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [2 \times 2 + (n-1) \times 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [4 + 2n - 2]$$

$$210 = \frac{n}{2} \times [2n + 2]$$

$$420 = n[2n + 2]$$

$$420 = 2n^2 + 2n$$

$$2n^2 + 2n - 420 = 0$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$n^2 + 15n - 14n - 210 = 0$$

$$n(n + 15) - 14(n + 15) = 0$$

$$(n + 15)(n - 14) = 0$$

$$n + 15 = 0 \text{ or } n - 14 = 0$$

$$n = -15 \text{ or } n = 14$$

ہم جانتے ہیں کہ n کی قدر منفی نہیں ہوسکتی ہے۔ اس طرح $n = 14$

سلسلہ حسابیہ کے 14 ارکان کی ضرورت ہوتی ہے جس کی وجہ سے یہ مجموعہ 210 ہوگا۔

مثال 11 : $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 59$ سلسلے کا مجموعہ معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا $2, 5, 8, 11, ...$ سلسلہ حسابی سلسلہ ہے۔

$a = 2$، $d = 5 - 2 = 8 - 5 = 3$ اور $a_n = 59$

کا مجموعہ معلوم کرنے کے لئے ہمیں n کی قدر معلوم کرنی ہوگی۔

دیا گیا ہے $a_n = a + (n-1) \times d$

$$59 = 2 + (n-1)3$$

$$59 = 3n - 1$$

$$60 = 3n$$

اس طرح $n = 20$ ارکان کی تعداد

اب، $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$

$S_{20} = \times [2 \times 2 + (20 - 1) \times 3]$

$S_{20} = 10 \times [4 + 19 \times 3]$

$S_{20} = 10 \times [4 + 57]$

$S_{20} = 10 \times [4 + 57]$

$S_{20} = 10 \times [61]$

$S_{20} = 610$

حسابی تصاعد کے تمام ارکان کا مجموعہ جب کہ 'l' اس کا آخری رکن ہے۔

آیئے غور کریں۔

ہم جانتے ہیں کہ

حسابی تصاعد کے 'n' ارکان کا مجموعہ $S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$

آیئے اب ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$S_n = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1) \times d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + \{a + (n - 1)d\}]$$

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + a_n]$ چونکہ $\{a + (n - 1)d\}$ یہ AP حسابی تصاعد کا آخری رکن ہوگا۔

اس طرح اگر a پہلا رکن اور...... آخری رکن یعنی 'l' تب متناہی حسابی تصاعد کے تمام ارکان کا مجموعہ

$S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$ ہوگا۔

مثال 12 : 1 تا 100 کے درمیان واقع ہونے والے 5 کے تمام اضعاف کا مجموعہ معلوم کیجئے۔

آپ اس کو حل کرنے کے لئے کیا کرنا چاہتے ہیں؟

کیا آپ جانتے ہیں کہ 1 تا 100 کے درمیان 5 کے اضعاف یہ ہیں

5, 10, 15, 20, 25, 30, ... 85, 90, 95

اس سلسلے سے

پہلا رکن = $'a' = 5$

آخری رکن = $'l' = 95$

ہم جانتے ہیں کہ ضابطہ کی رو سے

$$S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$$

یہاں پر n کی قدر معلوم نہیں ہے $n = ?$

آیئے n کی قدر کیسے معلوم کی جا سکتی ہے غور کریں۔

حسابی تصاعد $5 , 10 , 15 , 20 , 25 , 30 , \ldots\ldots\ldots\ldots 85 , 90 , 95$

یہاں پر $a = 5$ ؛ $d = 10 - 5 = 15 - 10 = 5$ آخری رکن

تب ضابطہ کی رو سے $\boldsymbol{a_n = a + (n - 1) \times d}$

$$95 = 5 + (n - 1) \times 5$$

$$95 = 5 + 5n - 5$$

$$95 = 5n$$

$$n = 19.$$

اس طرح n کی قدر درج کرنے پر

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]}$$

$$= \frac{19}{2} \times [5 + 95]$$

$$= \frac{19}{2} \times [100] = 19 \times 50 = 950$$

$$S_n = 950$$

اس طرح اس 19 ارکان کا مجموعہ 950 ہوگا۔

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجیے۔

1. ذیل میں دیے گئے حسابی تصاعد کے 15 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔

   (i) $11, 6, 1, -4, -9 \ldots$ (ii) $7, 12, 17, 22, 27 \ldots$

2. حسابی تصاعد ......25,28,31,34 کے کتنے ارکان لئے جائیں کہ ان کا مجموعہ 1070 ہو۔
3. سلسلے 118-......+10+7+4+1 کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
4. ایسے تمام طبعی اعداد جو 100 سے چھوٹے جو 3 کے اضعاف ہیں ان کا مجموعہ معلوم کیجیے۔
5. حسابی تصاعد کے کوئی تین متصلہ ارکان کا مجموعہ 21 ہوتا ہے اور ان کا حاصل ضرب 231 ہوتا ہے تب اس حسابی تصاعد کے تین ارکان معلوم کیجیے۔

6. مندرجہ ذیل حسابی تصاعد میں ان l، a، n، d اور S_n میں سے کوئی ایک جو چھوٹ چکا ہے اس کی قدر معلوم کیجئے۔

(i) $a = -2, d = 5, S_n = 568.$

(ii) $l = 8, n = 8, S_8 = -20$

(iii) $a = -3030, \quad l = -1530, n = 5$

(iv) $d = 2/3, l = 10, n = 20$

2.5.5 جیومٹریہ تصاعد (Geometric progression)

آیئے اب ہم اس مشغلے کو کریں۔

مشغلہ

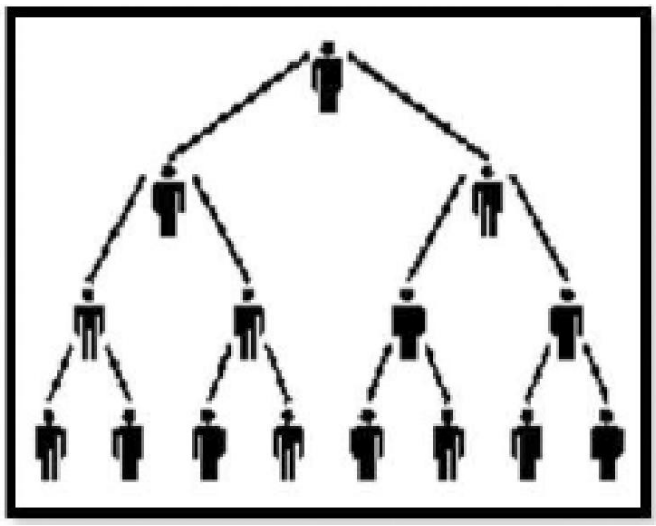
ایک مستطیل یا مربع پیپر لیجئے اوراس کو ہر بار ایک موڑ دیجئے اس طرح آپ جتنے موڑ دے سکتے ہو دیجئے۔ آپ زیادہ سے زیادہ کتنے بار موڑ سکتے ہو؟ ہوسکتا ہے کہ آپ چار یا پانچ بار اس پیپر کو موڑ سکتے ہو۔ ٹھیک ہے نا! آپ نے اسطرح کے پیپر فولڈنگ (موڑ) اپنی جماعت یا گھر کو سجانے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔ کیا آپ نے غور کیا کہ جب اس پیپر کو فولڈ کیا جاتا ہے تب اس کی بلندی کس قدر تبدیل ہوتی ہے۔ مزید کیا آپ اس کی قدر محسوب کر سکتے ہو؟ مندرجہ بالا مشغلے سے کیا آپ پیپر کے فولڈ ہونے سے حاصل ہونے والی بلندی کو ہر ایک فولڈ پر حاصل بلندی کی فہرست بنایئے۔ کیا یہ کوئی سلسلہ ہے۔

کیا یہ حسابی سلسلہ ہے؟

اگر نہیں تب کیا یہ کوئی اور سلسلہ ہے؟

آیئے ایک اور مثال پر غور کریں۔

دنیا کے تمام لوگ کئی سال سے بیکٹیریا اور وائرس کی وجہ سے بیمار ہوتے جا رہے ہیں۔ ان حالات میں ہر ایک شخص کو اپنی صحت کے متعلق جانکاری ہونی چاہئے اور اس کے علاوہ اپنے اطراف صفائی کا خیال بھی رکھنا چاہئے تا کہ بیماریوں سے بچے رہیں۔



اگر حکومت تلنگانہ اپنی عوام کو صحت کے متعلق جانکاری دینے کے لئے ایک طریقہ کار جس کو چین طریقہ کار کہلاتا ہے۔

اس طریقہ کار میں ہر ایک شخص اپنی بات کی جانکاری دو اشخاص تک پہنچائے گا۔ متصلہ شکل میں آپ زنجیر (چین) کے طریقہ کار پر غور و مشاہدہ کر سکتے ہیں۔ یہ سلسلہ پہلے ایک شخص سے شروع ہوتا ہے اور یہ دونوں اشخاص کو جانکاری دینا ہے۔ اس طرح یہ دونوں میں سے ہر ایک مزید دو دو اشخاص تک جانکاری پہنچاتے ہیں۔ مزید یہ چار اشخاص 8 اشخاص تک جانکاری پہنچاتے ہیں۔

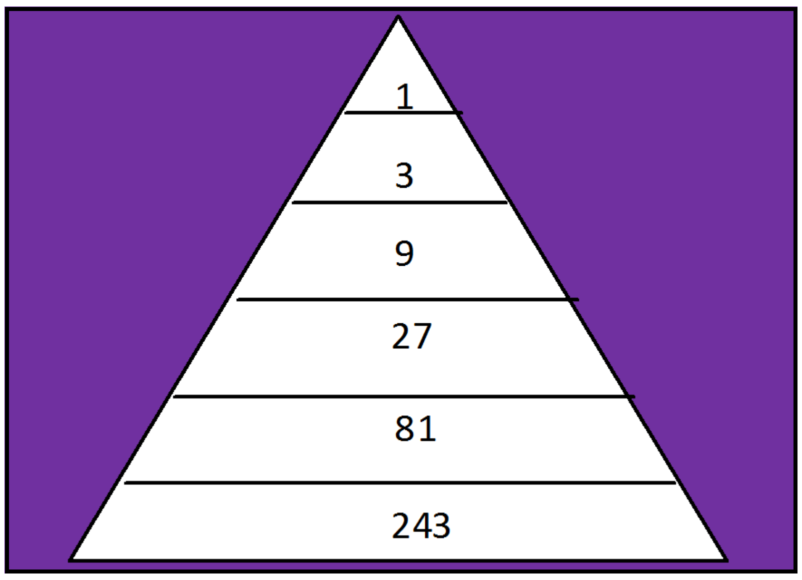
غور کیجئے

ہم مندرجہ بالا مشغلے سے حاصل جانکاری دی جانے والے لوگوں کی تعداد کو درج کرنے پر یہ سلسلہ حاصل ہوگا۔

کیا اس سلسلے کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

ہر ایک اگلا عدد ایک مخصوص عدد 2 کو ضرب پہلے عدد کو ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر آپ ہر ایک مرحلہ میں صحت کی جانکاری کے لئے ہر ایک شخص تین تک سلسلہ وار جانکاری دے تب اعداد کا سلسلہ اس طرح حاصل ہوگا۔



1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ...

1 , 1×3 , 3×3 , 9×3 , 27×3 , 81×3...

مندرجہ بالا سلسلہ میں ہر ایک اگلا رکن حاصل کرنے کے لئے پیشرو عدد کو تین '3' سے ضرب دینے پر یہ سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

آیئے آپ ہم مندرجہ ذیل سلسلوں پر غور کریں گے۔

(i) 10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........ یا $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$..........

(ii) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... یا $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ . ...

(iii) 5 , 25 , 125 , 625 , ... یا $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, ...

یہ سلسلے جیومٹریہ تصاعد ہیں۔

جیومٹریہ تصاعد: ہر رکن (سوائے پہلے رکن کے) اس کے پیش رو عدد کو ایک متعین یا مستقل عدد سے ضرب دینے پر حاصل ہو رہا ہے اس طرح کے اعداد کی فہرست یا سلسلے کو جیومٹریہ تصاعد کہتے ہیں۔ اس متعین یا مستقل عدد کو مشترک نسبت 'r' کہتے ہیں۔

آیئے مشترکہ نسبت کس طرح معلوم کی جاتی ہے غور کریں۔

جیومٹریہ سلسلہ

10 , 1000 , 10000 , 100000 , 1000000........ یا $10 , 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5$........

مشترکہ نسبت 'r' = (دوسرا رکن) / (پہلا سرا رکن) = (تیسرا رکن) / (دوسرا رکن) = ...

GP کی مشترک نسبت ‘r’ = 100/10 = 1000/100 = 10000/1000 = 10

اگر پہلا رکن 'a' اور مشترکہ نسبت 'r' ہے ایک جیومٹریہ سلسلہ GP اس طرح لکھا جاتا ہے۔

مشترک نسبت 'r' = $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ اور a_1, a_2 , a_3, ...

مثال 13 :

مندرجہ ذیل میں جیومٹریہ تصاعد کے مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

(i) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... یا $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ . ...

(ii) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , 243 , ... یا $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^5$ . ...

(iii) 5 , 25 , 125 , 625 , ... یا $5^1, 5^2, 5^3, 5^4$, ...

حل: (i) دیا گیا سلسلہ

(i) 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... یا $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ . ...

مشترک نسبت $'r' = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \mathbf{2}$ یا $'r' = \frac{2^1}{2^0} = \frac{2^2}{2^1} = \frac{2^3}{2^1} = 2$

(ii) دیا گیا سلسلہ $'r' = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \mathbf{3}$ یا $'r' = \frac{3^1}{3^0} = \frac{3^2}{3^1} = \frac{3^3}{3^1} = 3$

(iii) $'r' = \frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = 5$ یا $'r' = \frac{5^2}{5^1} = \frac{5^3}{5^2} = 5 = 5$

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

دیئے گئے ذیل کے جیومٹریہ تصاعد کے مشترک نسبت معلوم کیجئے۔

1. 6, 12, 24, 48, ...
2. 7, 21 , 62, 186, ...
3. 8, 8, 8, 8, ...
4. $4^0, 4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5$ ....

جیومٹریہ تصاعد کا عام رکن (n واں رکن)

آیئے جیومٹریہ تصاعد پر غور کریں۔

4 , 16 , 64 , 256 , ... یہ سلسلہ لا متناہی جیومٹریہ سلسلہ ہے۔

آیئے اب ہم اس طرح اور اس سلسلے کو لکھ سکتے ہیں۔

$4 , 4 \times 4, 4 \times (4 \times 4), 4 \times (4 \times 4 \times 4)$, ...

$4 \times 4^0, 4 \times 4^1, 4 \times 4^2, 4 \times 4^3$, ...

اگر جیومٹریہ تصاعد کا پہلا رکن a اور مشترک نسبت r ہو تب

a^1, a^2, a^3, ... اور مشترک نسبت ...... $'r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

$a \times r^0, \quad a \times r^1, \quad a \times r^2, \quad a \times r^3, \quad a \times r^4 \quad ....$

تب اس سلسلہ کا n واں رکن کیا ہوگا؟

آیئے غور کریں۔

رکن	ارکان کا اظہار	رکن کی قدر سلسلہ میں	عام شکل (اور کی صورت میں)
1	a_1	$4 \times 4^0 = 4$	$a = a \times r^0 = a \times r^{1-1}$
2	a_2	$4 \times 4^{2-1} = 16$	$a \times r^1 = a \times r^{2-1}$
3	a_3	$4 \times 4^{3-1} = 64$	$a \times r^2 = a \times r^{3-1}$
4	a_4	$4 \times 4^{4-1} = 256$	$a \times r^3 = a \times r^{4-1}$
....	....	....	
....	....	....	
....	....	....	
5	a_n	$4 \times 4^{n-1}$	$a \times r^{n-1}$

جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن

اگر پہلا رکن a اور مشترک نسبت r تب جیومٹریہ تصاعد ہوگا۔

$a \times r^0, a \times r^1, \ a \times r^2, \ a \times r^3, a \times r^4 .... \ \boldsymbol{a \times r^{n-1}}$

اس طرح GP کا n واں رکن ہوگا

$a \times r^{n-1}$

غور کیجئے

1. عدد 64 کے ایسے تین حصے کیجئے کہ یہ ایک جیومٹریہ سلسلہ میں ہو۔
2. اگر $a, b, c, ...$ جیومٹریہ تصاعد ہے تب $2a, 2b, 2c, ...$ __________ سلسلہ میں ہوں گے۔
3. اگر $3, x, 6.75$ جیومٹریہ تصاعد میں ہو تب x کی قدر __________ ہے۔

مثال 14 : مندرجہ ذیل میں کون سا سلسلہ جیومٹریہ سلسلہ ہے معلوم کیجئے۔

(i) $7, 14, 21, 28, ...$ (ii) $1/2 , 1, 2, , 4 ...$

(iii) $5, 25, 50, 75, ...$

حل: دیا گیا سلسلہ جیومٹریہ ہے۔

جانچنے کے لئے ہمیں صرف مشترک نسبت مستقل ہے یا نہیں معلوم کرنا چاہئے۔

(i) $7, 14, 21, 28, \ldots$

مشترک نسبت $'r' = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

$$= \frac{14}{7} = 2 \text{ اور } \frac{21}{14} \neq 2$$

دو متصلہ اعداد کی نسبت مساوی نہیں ہے۔اس لئے سلسلہ $7, 14, 21, 28, \ldots$ جیومٹریہ تصاعد نہیں ہے۔

(i) $\dfrac{1}{2}, 1, 2, 4 \ldots$

مشترک نسبت $'r' = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \text{ اور } \frac{2}{1} = 2 \; ; 2 \text{ اور } \frac{4}{2} = 2$$

دو متصلہ اعداد کی نسبت مساوی ہے اس لئے سلسلہ $\dfrac{1}{2}, 1, 2, 4 \ldots$ جیومٹریہ تصاعد ہے۔

مشترک نسبت $'r' = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2}$

$$= \frac{25}{5} = 2 \text{ اور } \frac{50}{25} = 2 \text{ اور } \frac{75}{50} \neq 2$$

چونکہ سلسلے کے دو متصلہ اعداد کی نسبت مساوی نہیں ہے۔اس لئے سلسلہ $5, 25, 50, 75, \ldots$ جیومٹریہ تصاعد نہیں ہے۔

مثال 15 : جیومٹریہ تصاعد اور جیومٹریہ تصاعد کا عام رکن معلوم کیجئے جب کہ اس کا پہلا رکن اور مشترکہ نسبت دی گئی ہے

(i) $r = 6$ ، $a = -7$ (ii) $r = 0.5$ ، $a = 256$

حل:

(i) ہم جانتے ہیں کہ جیومٹریہ تصاعد اس طرح ہوگا $a, ar, ar^2, \ldots$

$$a = -7,$$

$$ar = -7 \times 6 = -42,$$

$$ar^2 = -7 \times 62 = -252$$

اس طرح جیومٹریہ سلسلہ (تصاعد) ہوگا $-7, -42, -252, \ldots$

اس سلسلہ کا n واں رکن $a_n = -7 \times 6^{n-1}$

(ii) ہم جانتے ہیں کہ جیومٹریہ تصاعد اس طرح ہوگا $a, ar, ar^2, \ldots$

$$a = 256,$$

$$ar = 256 \times 0.5 = 128,$$

$$ar^2 = 256 \times (0.5)^2 = 64$$

اس طرح جیومٹریہ تصاعد ہوگا $256, 128, 64, \ldots$

آپ اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

(1) اگر جیومٹریہ تصاعد کا پہلا رکن $a = 11$ اور $r = 3$ تب پہلے چار ارکان اور عام رکن معلوم کیجئے۔

(2) اگر $a = 1$ اور $r = 2$ ہوتب جیومٹریہ تصاعد کا کون سا رکن 256 ہوگا؟

(3) اگر $a = \frac{1}{11}$ اور $r = 11$ تب کیا 123321 اس جیومٹریہ تصاعد میں سے ہوگا؟

(4) اگر $a = \frac{1}{3}$ اور $r = 2$ تب اس جیومٹریہ تصاعد کا عام رکن معلوم کیجئے۔

مشق

.1 مندرجہ ذیل میں سے کون سا سلسلہ حسابی سلسلہ ہے؟ آپ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

(A) 1, 4, 9, 16 ..... (B) 1, 3, 9, 27

(C) –2, 0, 2, 4, 6, ... (D) 1, 2, 4, 8, ...

.2 حسابی تصاعد ......3,1,-1,-3 کا مشترک فرق ______ ہے۔

(A) –2 (B) 2 (C) –3 (D) 3

.3 عدد '3' سے تقسیم ہونے والے دو ہندسی اعداد کی تعداد کیا ہے؟

(A) 31 (B) 30 (C) 29 (D) 11

4. اگر حسابی تصاعد کا پہلا رکن اور مشترک فرق 2 اور 4 ترتیب وار ہیں تب سلسلے کے پہلے 40 ارکان کا مجموعہ ہوگا۔

(A) 3200 (B) 2800 (C) 1600 (D) 200

5. حسابی تصاعد ......3,4,5,6 کا پہلے 10 ارکان کا مجموعہ ______ ہے۔

(A) 65 (B) 75 (C) 85 (D) 110

6. حسابی تصاعد $7 + 12 + 17 + 22 + \ldots + 1002$ کا مجموعہ ہوتا ہے۔

7. حسابی تصاعد $-11, -7, -3, \ldots, 53$ کا درمیانی رکن معلوم کیجئے۔

8. حسابی تصاعد $9, 14, 19, \ldots$ کا کون سا رکن 124 ہوگا۔

9. اگر حسابی تصاعد کا 7 واں اور 13 واں رکن ترتیب 32 اور 62 میں تب حسابی تصاعد معلوم کیجئے۔

10. حسابی تصاعد $7, 10, 13, \ldots, 184$ کے آخری رکن کے بعد کا آٹھواں رکن معلوم کیجئے۔

11. حسابی تصاعد کے پہلے 25 ارکان کا مجموعہ معلوم کیجئے جب کہ اس کا n واں رکن $an = 2 - 3n$ ہے۔

12. اگر $2x, x + 10, 3x + 2$ حسابی تصاعد میں ہوں تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

13. حسابی سلسلے $3, 15, 27, 39, \ldots$ کا کون سا رکن اس کے 21 واں رکن سے 120 زیادہ ہے۔

14. حسابی تصاعد کے چوتھا اور آٹھواں رکن کا مجموعہ 24 ہے اور چھٹواں اور دسواں رکن کا مجموعہ 44 ہے تب حسابی تصاعد معلوم کیجئے۔

15. حسابی تصاعد $-10, -7, -4, -1, \ldots$ کے کتنے ارکان لئے جائیں کہ ان کا مجموعہ 104 حاصل ہو۔

16. مندرجہ ذیل میں کون سا سلسلہ GP جیومٹریہ تصاعد ہے؟

(i) $3, 9, 27, 81, \ldots$ (ii) $4, 44, 444, 4444, \ldots$

(iii) $0.5, 0.05, 0.005, \ldots$ (iv) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots\ldots$

(v) $1, -5, 25, -125, \ldots$ (vi) $120, 60, 30, 18, \ldots$

(vii) $16, 4, \frac{11}{4}, \ldots\ldots$

17. مندرجہ بالا سوالات میں جیومٹریہ تصاعد کا پہلا رکن اور مشترک نسبت دی گئی ہے تب اس سلسلے کے پہلے تین ارکان لکھئے۔

(i) $a = 6, r = 3$ (ii) $a =$sqrrt 2, $r =$ sqr rt 2 (iii) $a = 1000, r = 2\ 5$

18. جیومٹریہ تصاعد $729, 243, 81, \ldots$ کا a_7 واں رکن معلوم کیجئے۔

اہم نکات

''اعداد کا سلسلہ رفہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو اس کے پیش رو میں ایک معین عدد (مستقل عدد) جمع کرنے سے حال ہونے والا سلسلہ حسابی تصاعد کہلاتا ہے'' جمع کیا جانے والا متعین عدد ''فرق مشترک'' کہلاتا ہے۔ یہ مثبت، منفی یا صفر ہوسکتا ہے۔

حسابی تصاعد AP کا پہلا رکن a_1 اور دوسرا رکن .... a_2 اور تیسرا رکن .... a_3 اس طرح n واں رکن a_n ہوتا ہے اور مشترک نسبت d لی جاتی ہے۔

اس طرح، $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_n - a_{n-1} = d$

حسابی تصاعد AP کا n واں رکن (عام رکن کا ضابطہ) ہے

حسابی تصاعد کا n واں رکن معلوم کرنے کا ضابطہ $a_n = a + (n-1) \times d$ ہے۔ جہاں پر

$a =$ پہلا رکن، $d =$ مشترک فرق، $n =$ اعداد کی تعداد اور $a_n = n$ واں رکن

پہلے n طبعی اعداد کا مجموعہ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ہوتا ہے۔

اگر حسابی تصاعد کا پہلا رکن a اور آخری رکن l تب اس متناہی سلسلے کے تمام ارکان کا مجموعہ $S_n = \frac{n}{2} \times [a + l]$ ہوگا۔

اعداد کا سلسلہ رفہرست میں سوائے پہلے رکن کے باقی تمام اعداد کو اس کے پیش رو عدد کو ایک معین عدد (مستقل عدد) سے ضرب کرنے سے حاصل ہونے والے سلسلہ جیومٹریہ تصاعد کہلاتا ہے۔ ضرب دینے والا متعین یا مستقل عدد کو مشترک نسبت r کہتے ہیں۔

اگر سلسلے کا پہلا رکن a اور مشترک نسبت r تب جیومٹریہ تصاعد $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ ہوگا اور مشترک نسبت

$$'r' = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

اگر سلسلے کا پہلا رکن a اور مشترک نسبت r تب جیومٹریہ تصاعد کا n واں رکن یا عام رکن

اگر سلسلے کا پہلا رکن a اور مشترک نسبت r تب جیومٹریہ تصاعد $a_n = a \times r^{n-1}$ ہوگا۔

اکائی 3 حساب Arithmetic

سبق 3.1

نسبت اور تناسب
Ratio and Proportion

3.1.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- نسبت کے مقاصد کے فہم کے
- نسبت اور تناسب کی شناخت اور اُن کے درمیان رشتہ کے
- راست و معکوس تناسب کی تفہیم
- سادہ تناسب کے سوالات کے حل کرنے میں اکائی نظام کا استعمال
- مرکب تناسب پر مبنی سوالات کو حل کرنا
- وقت اور کام پر مبنی سوالات کو حل کرنا
- وقت، فاصلہ اور رفتار کے سوالات کو حل کرنے کے

3.1.1 تعریف

روزمرہ زندگی میں ہم ہمہ اقسام کے حالات کا سامنا کرتے ہیں۔ ہم اندازہ لگانا، گنتی کرنا، شمار کرنا، دو مقدار کے درمیان تقابل کرنا وغیرہ۔ ہم کئی اشیاء کا تقابل جیسے قیمت، بلندی، وزن وغیرہ کرتے ہیں۔

ہم اکثر مقدار کا تقابل کرتے ہیں۔ تقابل مختلف طریقوں پر مبنی ہوتا ہے۔

آیئے ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کرتے ہیں:

مثال 1 : ایک طالب علم کا قد 165 سمر ہے اور دوسرے کا قد 163 سمر ہے؟ کس کا قد زیادہ ہے؟

مثال 2 : حیدرآباد میں پٹرول کی قیمت 78 روپے فی لیٹر ہے۔ اور ممبئی میں 75 روپے کس جگہ ہم 100 روپے سے زیادہ پٹرول حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 3 : ایک دکان A میں ایک شئے کی قیمت 120 روپے فی کلوگرام ہے اور دکان B میں 115 روپے فی کلو ہے۔؟ شئے کونسی دکان پر سستی ہے؟

اوپر دیئے گئے تمام مثالیں اُن کے فرق میں تقابل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1 میں، قد 2 سمر چھوٹا ہے (165–163 = 2cm)

مثال 2 میں، پٹرول کی قیمت میں فرق 3 روپے فی لیٹر ہے (78–75 = `3)

مثال 3 میں، قیمت فرق (120–115 = `5) ہے۔

مثال 4 : ایک کتاب کی قیمت 200 ` ہے اور پن کی قیمت 20 ` ہے۔ کتاب کی قیمت پن کی قیمت سے کتنی گنا زیادہ ہے؟

مثال 5 : ماں کا وزن 60 کلوگرام ہے اور اس کے بیٹے کا ون 20 کلوگرام ہے۔ ماں کا وزن اپنے بیٹے کے وزن کا کتنے گنا زیادہ ہے؟

مثال 6 : ایک چمڑے کے بیاگ کی قیمت 400 روپے ہے اور جوٹ کے بیاگ کی قیمت 150 روپے ہے۔ چمڑے کا بیگ کی قیمت کتنے گنا زیادہ ہے۔

اوپر دی گئی مثالو میں ہم قدروں 'کتنے گنا'' کا تقابل کرتے ہیں۔

دراصل ''کتنے گنا'' کا تقابل ہی نسبت کہلاتا ہے۔

دو مقداروں کی نسبت کو $a : b$ کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1 میں' طلباء کے قد کی نسبت = 16:163

مثال 4 میں' پن اور کتاب کی قیمتوں میں نسبت $= \frac{200}{20} = 200:20$

جب ہم نسبت کو اس کی کمترین شکل میں ظاہر کرتے ہیں یعنی دونوں مقداروں کا ع۔ا۔م '1' ہوتا ہے۔تب یہ شکل سادہ نسبت کہلاتی ہے۔

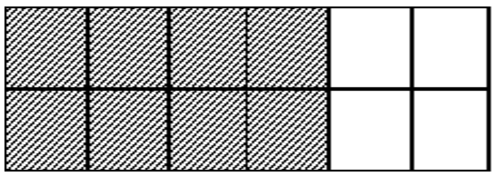
نسبت $a : b$ میں دو ارکان ہوتے ہیں' جہاں a پہلا رکن یا ''مقدم'' اور b دوسرا رکن یا ''تالی'' کہلاتا ہے۔آیئے ایک مشغلہ کرتے ہیں۔

مشغلہ-1

مندرجہ ذیل کی مثالوں کا مشاہدہ کیجیے' جدول میں دئے گئے ہیں اور ان کی خالی جگہوں کو پر کریں۔

سلسلہ نشان	پہلی قدر	دوسری قدر	تقابل	کسر کی شکل	سادہ نسبت
.1	10 گیند پہلی باسکٹ میں	دوسری باسکٹ میں 15 گیند	10:15	......	2:3
.2	2 کیلو چاول	500 گرام چاول	2kg:500g 2000:500	$\frac{2000}{500}$	4:1
.3	5 میٹر لمبی سرخ ربن	3 میٹر لمبی سیاہ ربن			
.4	پہلی ڈبیہ میں 45 تیلیاں	دوسری ڈبیہ میں 30 تیلیاں			

مشغلہ-2



بکس کا مشاہدہ کیجئے اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیں۔

(i) سایہ دار مربعی بکس ــــــــــ گنا زیادہ ہیں غیر سایہ دار بکس کے۔

(ii) غیر سایہ دار بکس ــــــــــ گنا ہے' سایہ دار بکس کے۔

(iii) سایہ دار بکس اور غیر سایہ دار بکس میں نسبت = ــــــــــ

مختلف صورتوں میں نسبت کی شکل:

ایک کاروبار میں لکشمن 5000 روپے کی لاگت کرتا ہے اور دیوی 10,000 روپے کی لاگت کرتی ہے۔

لکشمن کی لاگت = 5000

دیوی کی لاگت = 10,000

لکشمن اور دیوی کی لاگت کی نسبت = 5000 : 10000

= 1 : 2

اس صورت میں' ہم نے مشاہدہ کیا کہ لکشمن کی لاگت 1 حصہ اور دیوی کی لاگت 2 حصے کل 3 حصوں میں سے:

دی گئی نسبت میں' دی گئی مقداروں کی تقسیم

مثال 7 :

اگر سرخ گلاب اور گیندے کے پھولوں میں نسبت 2:3 ہے' تب کل پھولوں میں سرخ گلاب' اور گیندے کے پھولوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

حل: نسبت = 2 : 3

نسبتوں کا مجموعہ 3 + 2 = 5

کل حصے = 5

کل پھولوں کی تعداد = 20

5 حصے = 20 پھول

فی حصہ = $\frac{20}{5} = 4$ پھول

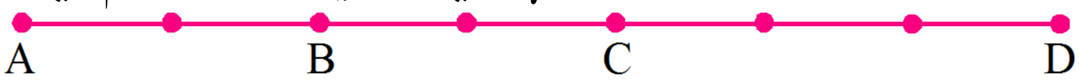
سرخ گلاب کے حصے = 2

کل سرخ گلاب = 2 x 4 = 8 پھول

گیندے کے پھول = 3 x 4 = 12 پھول

مشغلہ-3

دی گئی شکل میں خطی قطعہ اور ان کے حصوں کا مشاہدہ کریں۔اور ذیل کی نسبتوں کو معلوم کریں۔



(i) AB : BD = ______________

(ii) AC : CD = ______________

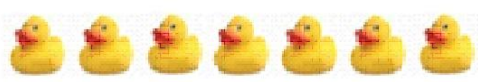
(iii) AB : AD = ______________

(iv) AB : CD = ______________

(v) AC : BD = ______________

مشغلہ-4

تصاویر کو مدنظر رکھتے ہوئے ذیل کی جدول کو مکمل کریں۔

سلسلہ نشان	پہلی مقدار	دوسری مقدار	نسبت
1.			
2.			
3.			

مشغلہ-5

ذیل کے جدول کا مشاہدہ کریں اور نسبتوں کی مختصر شکل لکھیں۔

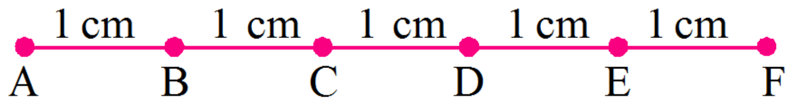
سلسلہ نشان	مقدار	نسبت کی شکل	کسر کی شکل	سادہ نسبت
.1	15 میٹر پانی کا پائپ اور 12 میٹر لوہے کی سلاخ میں نسبت	15:12	$\frac{15}{12}$	5:4
.2	6 لڑکے اور 10 لڑکیوں کے درمیان نسبت			
.3	1 گھنٹہ اور 40 منٹ میں نسبت			
.4	75 پیسے اور 3 روپے میں نسبت			
.5	750 سمر اور 2 میٹر میں نسبت			

تناسب (Proportions)

آیئے مندرجہ ذیل صورتوں کا مشاہدہ کریں۔

ایک کپ کافی کے لئے ایک چمچ شکر درکار ہے' اس طرح 5 کپ کافی کے لئے کتنے چمچ شکر درکار ہوگی؟
کیا 5 چمچ؟

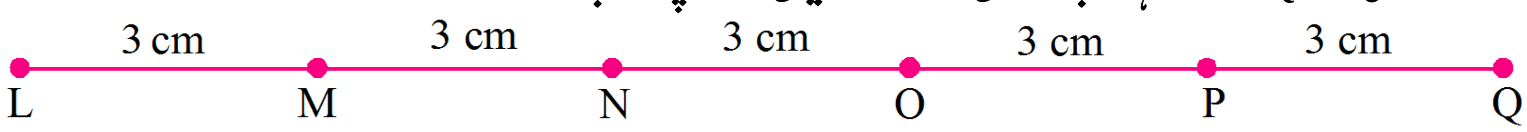
خطی قطع AF کا مشاہدہ کریں اور نقاط کے درمیان فاصلہ پر بھی غور کریں۔



$AB = BC = CD = DE = EF = 1cm,$

نسبت- $AD : DF = 3 : 2$

خطی قطعہ LQ کا مشاہدہ کیجیے اور ان نقاط کے درمیان فاصلہ پر غور کیجیے۔



$LM = MN = NO = OP = PQ = 3cm$

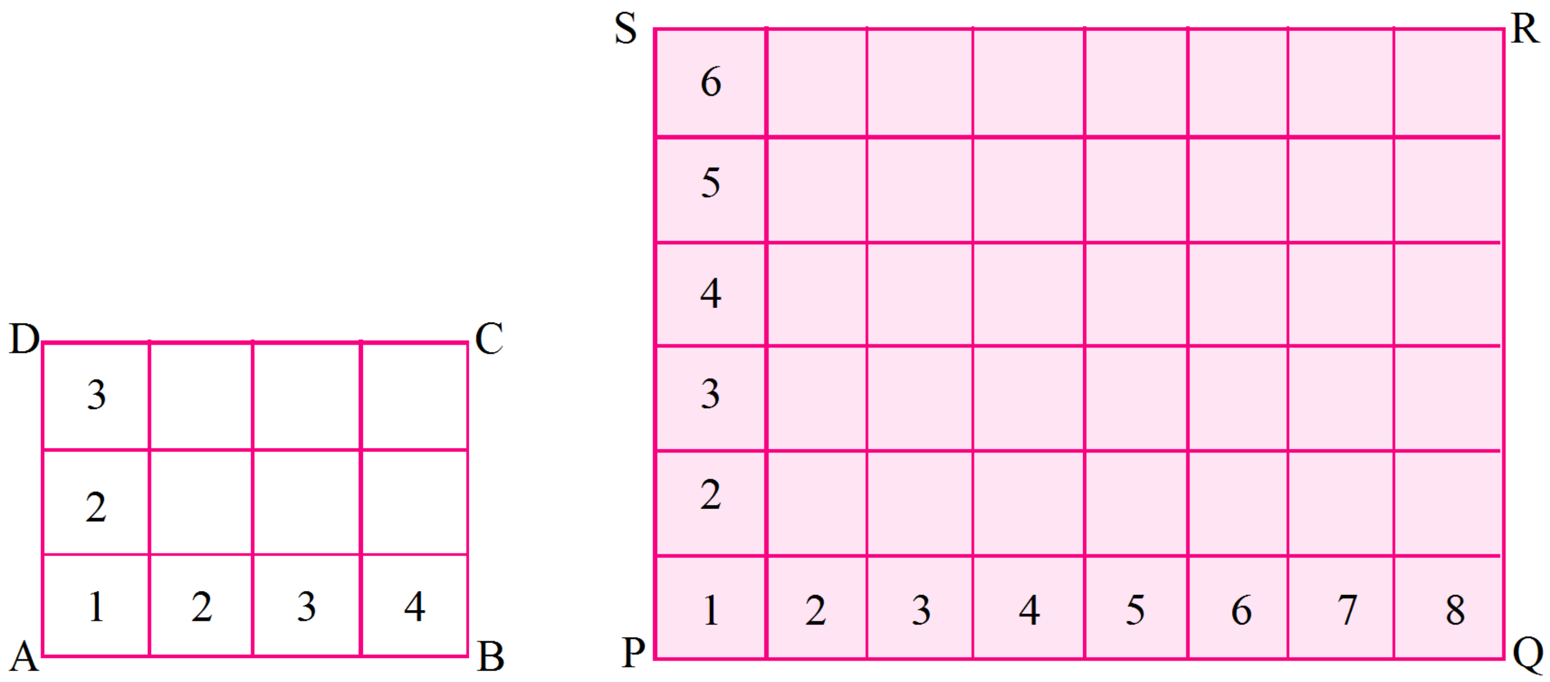
نسبت - $LO : OQ = 3 : 2$

خطی قطعہ AF' کے نقاط کے درمیانی فاصلہ 1 سمر ہے' اس طرح خطی قطعہ LQ کے نقاط کا درمیانی فاصلہ 3 سمر ہے۔ لیکن
نسبت $AD : EF$ اور نسبت $LO : OQ$ مساوی ہیں جب کہ ان کے طول مساوی نہیں ہیں۔

اگر دو نسبتیں مساوی ہوں تب وہ تناسب میں کہلاتے ہیں۔

ان مستطیل پر غور کریں۔

ABCD اور PQRS



مستطیل ABCD میں طول $AB = 4$ اکائیاں

عرض $AD = 3$ اکائیاں ہیں۔ طول اور عرض میں نسبت $= 4 : 3$' ABCD میں۔

مستطیل PQRS میں، طول PQ = 8 اکائیاں، عرض PS = 6 اکائیاں

طول اور عرض میں نسبت PQRS میں $8 : 6 = 4 : 3$

$$\therefore \quad \frac{PQ}{PS} = \frac{AB}{AD}$$

اس طرح یہ تناسب میں ہیں $AB : AD = PQ : PS$

ایک مدرسہ میں 100 طلباء کے مڈ ڈے میل کے لئے 15 کلوگرام چاول درکار ہے (ایک دن کے لئے)۔ دوسرے مدرسہ میں 40 طلباء کے مڈ ڈے میل کے لئے 6 کلوگرام پکوان فی یوم پکائے جاتے ہیں۔ آپ کیا فرق محسوس کرتے ہیں؟

سادہ نسبت	طلباء میں تقسیم چاول کی نسبت	طلباء کی تعداد	درکار چاول	
3:20	15:100	100	15	پہلا مدرسہ
3:20	6:40	40	6	دوسرا مدرسہ

پہلے مدرسہ میں چاول اور طلباء کی تعداد کے درمیان نسبت $3 : 20$

دوسرے مدرسہ میں چاول اور طلباء کی تعداد کے درمیان نسبت $3 : 20$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دونوں صورتوں میں سادہ نسبت مساوی ہے۔

یعنی $15 : 100 = 6 : 40$

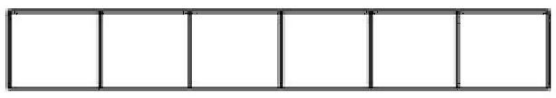
کسی دو نسبتوں کے سادہ نسبتیں مساوی ہوں یعنی $\boldsymbol{a : b}$ اور $\boldsymbol{c : d}$، تب وہ تناسب میں کہلاتے ہیں۔

اس طرح تناسب کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ $\boldsymbol{a : b :: c : d}$

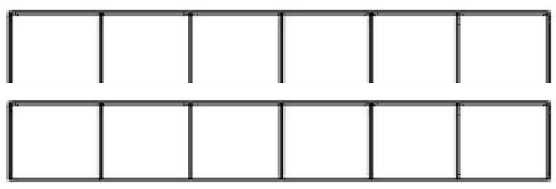
مشغلہ-6

ذیل میں دیئے گئے بکسوں کا مشاہدہ کیجئے ہر صورت میں آدھے بکسوں کو سایہ دار کیجئے۔ سایہ دار بکسوں اور کل بکسوں کے درمیان نسبت کو لکھئے۔

(i) سایہ دار بکسوں کی تعداد = ______

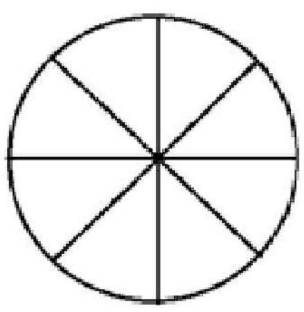


سایہ دار بکسوں اور کل بکسوں کی تعداد میں نسبت = ______



(ii) سایہ دار بکسوں کی تعداد = __________

سایہ دار بکسوں کی تعداد اور کل بکسوں کی تعداد میں نسبت = __________



(iii) سایہ دار قطع دائرہ کی تعداد = ___________

سایہ دار قطع دائرہ کی تعداد اور کل قطع دائرہ کی تعداد میں نسبت = ____________

نوٹ: اگر دو نسبت تناسب میں ہوں تب طرفین کا حاصل ضرب مساوی ہوتا ہے' درمیانی قدر کے حاصل ضرب کے

اگر $a : b :: c : d$ تب طرفین $a \times d = \times b \times c$ درمیانی قدر

مثال-8 : a کی قدر معلوم کیجئے' اگر $a : 3 :: 4 : 6$

حل: $a : 3 : : 4 : 6$ ($\because$ طرفین کا حاصل ضرب = درمیانی قدر کے حاصل ضرب کے)

$$a \times 6 = 3 \times 4$$

$$a = \frac{3 \times 4}{6} = 2$$

$$\therefore \ a = 2$$

مشغلہ-7 :

خالی جگہوں کو پر کیجئے جہاں طول اور عرض تناسب میں دیے گئے ہیں۔

طول:	4	8		36	44
عرض:	3		15	21	

مشغلہ-8 :

تناسب معلوم کرتے ہوئے خالی جگہوں کو پر کریں۔

سلسلہ نشان	تناسب	طرفین کا حاصل ضرب	درمیانی قدروں کا حاصل ضرب
.1	2:3 4:6		
.2	5:4 20:16		
.3	25:1 75:3		

مرکب نسبت: چند صورتوں میں ہم کو نسبتوں کا میل تبدیل کرنا ہوتا ہے جیسے مقدم کا حاصل ضرب اور تالی کا حاصل ضرب

$$a : b, \ c : d = a \times c : b \times d$$

ایک کاروبار میں A کی ایک سال کی لاگت 10,000 روپے اور B کی 9 ماہ کی لاگت 15,000 نفع آنے پر وہ کس نسبت میں تقسیم کریں گے۔

لاگت کی نسبت = $10000 : 15000 = 2 : 3$

درکار وقت کی نسبت = 12 ماہ : 9 ماہ = 4 : 3

مرکب نسبت = $2:3,\ 4:3 = 2\times4 : 3\times3 = 8:9$

وہ نفع کو 9 : 8 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔

راست تناسب (Direct proportion)

ایک نسبت میں اگر دونوں مقداریں یکساں بڑھتی اور گھٹتی ہیں جب کہ ان میں نسبت مساوی ہوتی ہے۔

جیسے $a:b$ = مستقل یا $\frac{a}{b} = K$

مثال-7 :

ایک نل سے 10 منٹ میں 4 بکٹ پانی بھرے جاتے ہیں۔ 6 بکٹ پانی بھرنے کے لئے کتنا وقت درکار ہوگا؟

حل: کل بکٹ کی تعداد اور نل سے بھرے جانے والے پانی کے وقت میں نسبت 10 : 4

سادہ نسبت = 5 : 2

بکٹ کی تعداد = 6

درکار وقت = x منٹ، نسبت = $6 : x$

دی گئی نسبت، راست تناسب میں ہیں۔

$$\therefore\ 2:5 = 6:x$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$$

$$\therefore\ x = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

$\therefore$ 6 بکٹ پانی بھرنے کے لئے 15 منٹ درکار ہوں گے۔

معکوس تناسب (Inverse proportion)

ایک نسبت میں ایک قدر بڑھتی ہے اور دوسری قدر گھٹتی ہے اور ان دونوں مقداروں کا حاصل ضرب مستقل ہو، تب وہ معکوس تناسب میں کہلاتا ہے۔ $a \times b = k$ یا $a \times b$ = مستقل

مثال-8 : کرشنا 6 روپے فی پن کے حساب سے 10 پن خریدتا ہے۔ تب وہ دوکاندار کو کتنی رقم ادا کرے گا؟ اگر دوکاندار فی پن 5 روپے فروخت کرتا ہے تب اس رقم میں کرشنا کو کتنے پن حاصل ہوں گے؟

حل:

پن کی تعداد	فی پن کی قیمت	جملہ قیمت
10	6	10 x 6 = 60
X	5	X x 5 = 60

$$x \times 5 = 10 \times 6$$

$$x = \frac{10 \times 6}{5} = 12$$

جب پن کی قیمت گھٹ کر 5 روپے ہوگی۔ تب پن کی تعداد بڑھ کر 12 ہو جائے گی ان کا حاصل ضرب مساوی ہوگا۔

مثال-9 : ایک کام کو مکمل کرنے میں مرد حضرات کی تعداد اور ایام کام کی تعداد معکوس تناسب میں ہے۔

مرد حضرات کی تعداد	32	16	8	4	64
کام کے ایام	8	16	32	64	4
	256	256	256	256	256

مرکب تناسب (Mixed proportion)

مثال-10 : دو درزی 6 شرٹ 3 دن میں سیتے ہیں' 12 شرٹ 4 دن میں سلوائی کے لئے کتنے درزی درکار ہوں گے؟

نوٹ: دو سے زائد مقدار بھی ہو تب وہ راست یا با لمچھند ایک دوسرے کے تناسب میں ہوں گے۔

درزی کی تعداد راست متناسب ہوتی ہے شرٹ کی تعداد کے $= \dfrac{\text{درزی کی تعداد}}{\text{شرٹ کی تعداد}}$

شرٹ کی تعداد راست متناسب ہے دنوں کی تعداد کے $= \dfrac{\text{شرٹ کی تعداد}}{\text{دنوں کی تعداد}}$

درزی کی تعداد	شرٹ کی تعداد	دنوں کی تعداد
3	6	2
4	12	X

$$\frac{2 \times 3}{6} = \frac{4 \times X}{12}$$

$$X = 3$$

4 دن میں 12 شرٹ سینے کے لئے درکار درزیوں کی تعداد 3 ہے۔

3.1.3 نسبت اور تناسب کا اطلاق

وقت اور کام

اگر 10 آدمی ایک نالہ، 24 دن میں مکمل کرتے ہیں 16 دن میں کام مکمل کرنے کے لئے کتنے آدمی درکار ہوں گے؟

آدمی اور دن معکوس تناسب میں ہیں۔

فرض کرو کہ x آدمی نالہ کو 16 دن میں مکمل کر سکتے ہیں۔

$$\therefore x \times 16 = 10 \times 24$$

$$x = \frac{10 \times 24}{16} = 15$$

16 دن میں اس نالہ کو مکمل طور پر بنانے کے لئے 15 آدمی درکار ہوں گے۔

وقت، فاصلہ اور رفتار

کیا آپ نے مشاہدہ کیا آپ کے گھر سے آپ کے کھیت کو جانے کے لئے کتنا وقت درکار ہوگا اور آپ کے گھر سے آپ کے کھیت کتنی دوری پر ہیں؟ کیا آپ اپنے کھیت کو گھر سے روزانہ اتنے ہی وقت میں پہنچتے ہیں۔ اگر نہیں تو کیوں؟

کچھ دن آپ گھر سے جلدی نکلتے ہیں تب آپ دیر سے اپنے کھیت پہنچتے ہیں۔ لیکن کچھ دن اگر آپ دیر سے گھر سے نکلتے ہیں لیکن اپنے کھیت پر وقت پر پہنچتے ہیں کیوں؟

یہ آپ کی رفتار پر منحصر ہوتا ہے۔ جب کہ وقت اور فاصلہ وہی ہوتا ہے

$$\text{رفتار} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

اگر رفتار مستقل ہوتی ہے تب وقت راست متناسب ہوتا ہے فاصلہ کے

لکشمی کار سے 120 کلومیٹر کا فاصلہ 4 گھنٹوں میں طئے کرتی ہے۔ اسی رفتار سے 90 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرنے میں کتنا وقت درکار ہوگا؟

$$\text{رفتار مستقل ہے} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$$

t کی قدر کیا ہوگی؟

قدر اور اکائی نظام

مثال-11: ایک ترکاری کی منڈی میں، ایک تاجر 5 کلو پیاز 40 روپے میں فروخت کرتا ہے اور دوسرا تاجر 6 کیلو پیاز 42 روپے میں فروخت کرتا ہے۔ اگر رامیا 3 کیلو پیاز خریدنا چاہتا ہے تو وہ کس تاجر سے خریدے گا؟

حل: پہلا تاجر 5 کیلو 40 روپے میں فروخت کر رہا ہے۔

پہلے تاجر کی ایک کیلو پیاز کی قیمت $\frac{40}{5}$ روپے ہوتی ہے۔

دوسرا تاجر 6 کیلو پیاز 42 روپے میں فروخت کررہا ہے۔

تب ایک کیلو پیاز کی قیمت 7 = $\frac{42}{6}$ روپے

پہلا تاجر 8 روپئے فی کیلو پیاز فروخت کررہا ہے اور

دوسرا تاجر 7 روپے فی کیلو پیاز فروخت کررہا ہے

اس طرح $8 > 7$

رامیا کو دوسرے تاجر سے پیاز خریدنا ہوگا۔

اس کے لئے اس کو $3 \times 7 = 21$ روپئے ادا کرنے ہوں گے۔

ایک طریقہ یا نظام جس میں اکائی کی قیمت دریافت کرتے ہیں اور مابعد بڑی قدر معلوم کی جاتی ہے۔ اکائی قدر کو ضرب دیتے ہوئے۔ اکائی نظام کہلاتا ہے۔

مشق

1. رانی اس کے گھر سے 20 منٹ میں مدرسہ جاتی ہے اور اوشا اپنے گھر سے 25 منٹ میں مدرسہ پہنچتی ہے۔ مدرسہ پہنچنے میں ان دونوں میں نسبت کیا ہوگی معلوم کیجئے۔
2. دیئے گئے نسبت کو ان کی مختصر شکل میں ظاہر کیجئے۔

   (i) 5 : 10 (ii) 16 : 18 (iii) 14 : 21 (iv) 8 : 24
3. 40 طلباء کی ایک جماعت میں 24 لڑکے ہیں۔
   (i) اس جماعت میں لڑکیوں اور لڑکوں کی نسبت کیا ہوگی؟
   (ii) جماعت کی کل تعداد اور لڑکیوں کی تعداد کی نسبت معلوم کیجئے۔
4. وشوانا تھ حصہ سیب راموکو دیتا ہے۔ تب سیب کے حصوں کی نسبت معلوم کیجئے۔
5. ایک باسکٹ میں ایک درجن موز ہیں۔ اکھیلا اور رادھا کو اس موز کو 1:3 نسبت میں تقسیم کرلیتا ہے۔ ہر ایک کے حصہ میں کتنے موز آئیں گے۔
6. شام اور کلیان میں 2400 کی رقم کو 3:5 کی نسبت میں تقسیم کرنے پر ہر ایک کو کتنی رقم حاصل ہوگی؟
7. ایک ملازم کی تنخواہ اور بچت میں 10:3 کی نسبت ہے' اگر اس کا خرچ 7000 روپئے ہو تب اس کی بچت معلوم کیجئے۔
8. چار بسکٹ پاکٹ کی قیمت 40 ہے۔ اس طرح کے 6 بسکٹ پاکٹ خریدنے پر آپ کو کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟
9. ہلدی کے پاس نیلے اور زرد گیند جو کہ 5:3 کی نسبت میں ہیں۔ تب
   (i) کتنی نیلی گیندیں ہلدی کے پاس ہوں گے جب کہ اس کے پاس 9 زرد گیندیں ہیں۔
   (ii) 24 عدد گیندوں میں کتنے عدد نیلے اور کتنے زرد گیندیں ہوں گی؟

10. ہری 5 عدد ٹینس کی گیند اسپورٹ کی دوکان سے خریدنا چاہتا ہے۔اگر ایک درجن گیندوں کی قیمت 180 ہو تب 5 گیندوں کی قیمت خرید کیا ہوگی؟

11. دی گئی نسبتوں کے وسطین اور طرفین معلوم کیجئے اور جانچ کیجئے کہ وہ تناسب میں ہیں یا نہیں؟

12. ایک کوئز کے مقابلہ میں، منگلی اور سمبا کے صحیح جوابات کی نسبت 10:11 میں ہے۔اگر وہ کل نشانات 84 حاصل کرتے ہیں تب سمبا کے حاصل کردہ نشانات کیا ہیں؟

13. ایک شطرنجی جس کا طول 180 میٹر ہے، 15 عورتیں 12 دن میں تیار کرتی ہیں۔ 32 عورتیں 512 میٹر طول کی شطرنجی جس کا عرض مساوی ہے، کتنے دن میں تیار کریں گی؟

14. ایک سمنٹ فیکٹری، 36 مزدور 700 سمنٹ کے تھیلے 12 دن میں تیار کرتے ہیں۔تب 24 مزدور 18 دن میں کتنے عدد تھیلے تیار کریں گے؟

15. ایک کار 16 لیٹر پٹرول میں 240 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرتی ہے۔کیا 25 لیٹر میں کار 450 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرے گی؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

16. ایک ہوائی جہاز دہلی سے 9:00 بجے صبح 1200 کلومیٹر کا فاصلہ طئے کرتے ہوئے ممبئی 11:00 بجے پہنچتا ہے، اگر ہوائی جہاز 12:00 بجے سفر شروع کرتے ہوئے 1500 کلومیٹر کا ممبئی سے فاصلہ طئے کرتے ہوئے کنیا کماری کا فاصلہ کب طئے کرے گا؟

آیئے اکٹھا کریں

- دو مقداروں کا تقابل ان میں فرق یا تقسیم کے طریقہ سے کرتے ہیں۔
- دو مساوی مقداروں میں تقابل نسبت کہلاتی ہے۔
- اگر دو مقداروں کی سادہ نسبتیں مساوی ہوتی ہیں تب وہ تناسب میں کہلاتی ہیں۔
- اگر دو نسبتیں تناسب میں ہوتی ہیں تب وسطین کا حاصل ضرب مساوی ہے طرفین کے۔
- اگر دو نسبتیں آپس میں ضرب کھاتی ہیں تب تالیوں کا حاصل ضرب اور مقدم کے حاصل ضرب کی نسبت ''مرکب نسبت'' کہلاتی ہے۔
- ایک نسبت میں دونوں مقداروں میں اضافہ یا کمی یکساں ہوں جب کہ نسبت مستقل ہو تب مقدار آپس میں بالراست کہلاتے ہیں۔
- ایک نسبت میں ایک مقدار بڑھتی یا گھٹتی ہے۔تب دوسری مقدار گھٹتی یا بڑھتی ہے۔جب کہ مقداروں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے، تب مقداریں بالعکس متناسب کہلاتی ہیں۔
- وقت اور کام ایک دوسرے سے تعلق رکھتے ہیں۔بالراست یا بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔
- وقت، فاصلہ اور رفتار کے تعلق کا ضابطہ، رفتار $= \dfrac{\text{فاصلہ}}{\text{وقت}}$ ہے۔
- ایک شئے کی قیمت خرید "Rate" کہلاتی ہے۔
- وہ طریقہ کار جس سے ایک یونٹ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے، جس کی بنا پر کئی یونٹ کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔اکائی نظام کہلاتا ہے۔

سبق 3.2

فیصدی، نفع اور نقصان

Percentages, Profit and Loss

3.2.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- قیمت خرید، قیمت فروخت، نفع، نقصان اور ان کے فیصدی پر تفہیم حاصل کریں گے۔
- فیصدی پر منحصر نفع و نقصان معلوم کریں گے۔
- فہرستی قیمت اور چھوٹ پر فہم حاصل کریں گے۔
- سادہ سود، اصل سود اور مرکب سود کے مقاصد کا فہم حاصل کریں گے۔

3.2.1 فیصدی

ہم فیصدی کو روزمرہ زندگی میں استعمال کرتے ہیں۔ امتحان کا نتیجہ بھی فیصدی میں معلوم کیا جاتا ہے۔ چھوٹ، نفع، نقصان اور کمیشن میں ہم فیصدی کا استعمال کرتے ہیں۔ ہم کو فیصدی کی ضرورت کیوں ہوتی ہے؟

وسو دیو کے مختلف مضامین میں ح اصل کردہ نشانات

حاصل کردہ نشانات	کل نشانات	مضمون
76	100	تلگو
36	50	انگلش
66	75	ریاضی
40	50	سائنس

کس مضمون میں وسو کو بہتر نشانات حاصل ہوئے؟ کیا وہ تلگو ہے؟ چونکہ وہ 100 میں سے 76 نشانات حاصل کئے۔ کیا آپ متفق ہیں کہ وہ تلگو میں سائنس سے زائد نشانات حاصل کئے؟

یہاں فیصدی کا عمل کارآمد ہے۔

ان کو فیصدی میں تبدیل کرنے پر ہم حاصل کردہ نشانات 100 میں سے معلوم کرتے ہیں۔

مضمون	کل نشانات	حاصل کردہ نشانات	100 میں سے حاصل کردہ نشانات	
تلگو	100	76	$\frac{76}{100} \times 100$	76
انگریزی	50	36	$\frac{36}{100} \times 100$	72
ریاضی	75	66	$\frac{66}{75} \times 100$	88
سائنس	50	40	$\frac{40}{50} \times 100$	80

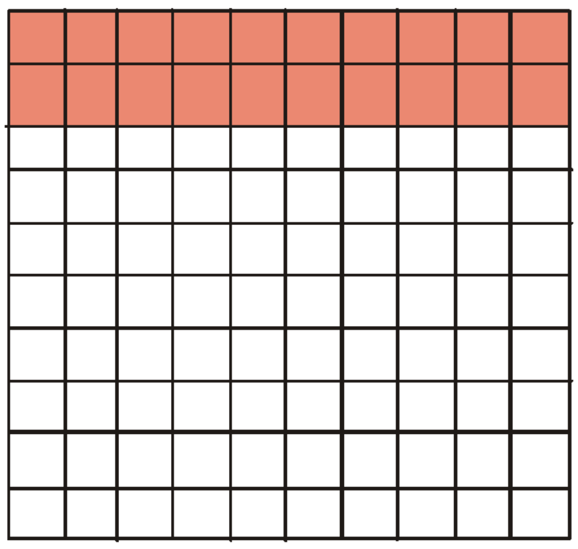
100 نشانات میں سے مختلف مضامین کے حاصل نشانات فیصد معلوم کریں۔ تب ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ وسو نے کس مضمون میں بہتر مظاہرہ کیا ہے۔

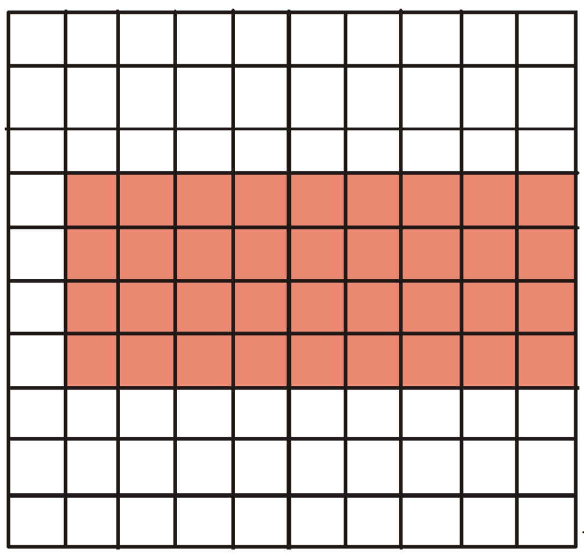
اس طرح 100 میں سے کا حساب فیصد کہلاتا ہے۔

Cent یعنی 100 Percent کے معنی ہیں 100، یعنی ''صد'' یعنی 100

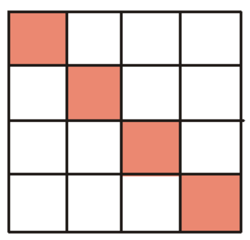
یہ کیجیے

100 عدد مربع خانوں کی ایک جال ہے۔ سایہ دار بکسوں کا فیصدی گئے گئے بکسوں کی کل تعداد کی مدد سے معلوم کیجیے۔ بتایئے سایہ دار بکس کل بکسوں کے کتنا فیصد ہے۔

(i)  ____:100

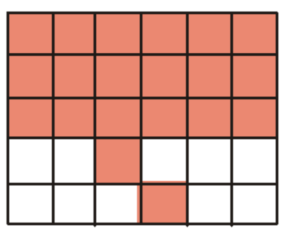
(ii)  ____:100

مندرجہ ذیل بکس پر غور کریں، کل بکس کی مدد سے سایہ دار بکسوں کا فیصدی معلوم کیجیے۔

(a 

نسبت =

فیصدی =

(b 

نسبت =

فیصدی =

کسر کے فیصد میں تبدیلی (Converting Fraction to percentage)

تمام اعداد جو $(q \neq 0.)$ $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کئے جاتے ہیں کسور کہلاتے ہیں۔

جہاں 'p' ''شمار کنندہ'' اور 'q' ''نسب نما'' کہلاتا ہے۔

نسب نما میں کوئی بھی عدد ہوسکتا ہے سوائے صفر کے۔ اگر نسب نما میں عدد 100 ہو تب فیصد کو ظاہر کرنا آسان ہوجاتا ہے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل کسور کو فیصدی میں ظاہر کیجیے۔

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{19}{25}$

حل :

(a) $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\%$

(b) $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 100 = 325 = 75\%$

(c) $\frac{19}{25} = \frac{19}{25} \times 100 = 194 = 76\%$

مثال 2 : عشاری اعداد کو فیصدی میں ظاہر کرنا۔

(a) 0.12 (b) 1.5

حل :

(a) $0{,}12\ \frac{12}{100} = \frac{12}{100} \times 100 = 12\%$

(b) $1.5 = \frac{15}{10} = \frac{15}{10} \times 100 = 150\%$

مثال 3 : دیئے گئے فیصدی کو اعشاری عدد میں ظاہر کیجیے۔

(a) 35% (b) 67%

حل:

(a) $35\% = \frac{35}{100} = 0.35$

(b) $67\% = \frac{67}{100} = 0.67$

مثال 4 : مندرجہ ذیل فیصدی کو کسور میں اور پھر نسبت میں ظاہر کیجیے۔

(a) 75% (b) 66%

حل:

(a) $\frac{75}{100} = \frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}} = \frac{3}{4}$

نسبت $= 3 : 4$

(b) $66\% = \frac{66}{100} = \frac{\cancel{66}^{33}}{\cancel{100}_{50}} = \frac{33}{50}$

نسبت $= 33 : 50$

مثال 5 : 40 کا 25% معلوم کیجیے۔

حل: 40 کا $25\% = \frac{25}{100} \times 40 = 10$

مثال 6 : 60 کا کتنا فیصد 12 ہوتا ہے؟

حل: 60 کا 12 فیصد: $\frac{12}{60} \times 100 = 20\%$

مثال 7 : 50 طلباء کی ایک جماعت میں اگر 28 لڑکیاں اور 22 لڑکے ہیں تو لڑکیوں اور لڑکوں کی تعداد کو فیصدی میں ظاہر کیجیے۔

حل:

فیصدی	عمل	کسر	طلباء کی تعداد	
56%	$\frac{28}{50} \times 100 = 56$	$\frac{28}{50}$	28	لڑکیاں
44%	$\frac{22}{50} \times 100 = 44$	$\frac{22}{50}$	22	لڑکے
			50	جملہ تعداد

مشغلہ 9 : ذیل کے جدول پر غور کریں اور خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

عشاری شکل	پہلی قدر پر دوسری قدر کی فیصدی	کسر کی شکل	دوسری تعداد	پہلی تعداد	سلسلہ نشان
0.40	$\frac{16}{40} \times 100 = 40\%$	$\frac{16}{40}$	40	16	1.
-	-	-	60	33	2.
-	50%	-	72	-	3.
-	36%	-	-	18	4.

3.2.2 نفع اور نقصان (Profit and Loss)

ایک کاروبار میں فروخت کی گئی شئے کی قیمت، قیمت فروخت (SP) کہلاتی ہے اور شئے کی خریدی گئی قیمت، قیمت خرید (CP) کہلاتی ہے۔

اگر کوئی شئے فروخت کی گئی اور اس کی قیمت خرید میں اور قیمت فروخت میں فرق، قیمت خرید سے زیادہ ہو "نفع" یا "حاصل" کہلاتا ہے جس کو P یا g سے ظاہر کرتے ہیں۔

جہاں (SP > CP) $\mathbf{P = SP - CP}$

اگر کوئی شئے قیمت خرید سے کم میں فروخت کی جاتی ہے تب اس کی قیمت کا فرق "نقصان" کہلاتا ہے۔ اس کو 'L' سے ظاہر کرتے ہیں۔

$L = CP - SP \quad (SP < CP)$

نفع اور نقصان کو فیصدی میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{نفع فیصدی} = g\% = \text{نفع / قیمت خرید} \times 100 = \frac{(SP - CP)}{CP} \times 100$$

$$\text{نقصان فیصدی} = L\% = \text{نقصان / قیمت خرید} \times 100 = \frac{(CP - SP)}{CP} \times 100$$

مثال 8 : ایک دوکاندار ایک ڈریس 1000 روپے میں خرید کر اس کو 1500 روپے میں فروخت کرتا ہے۔ کیا آپ سمجھتے ہیں کہ اس کو نفع ہوا ہے اور نفع فیصد معلوم کیجئے۔

حل: ایک دوکاندار ایک ڈریس کی خرید پر لگائی گئی رقم $= CP = 1000$

وہ رقم جو دوکاندار کو فروخت کرنے پر حاصل ہوتی ہے $= SP = 1500$

$SP > CP$

نفع $= SP - CP = 1500 - 1000$

نفع فیصدی $= 100 \times$ نفع / قیمت خرید $= g\%$

$$= \frac{500}{1000} \times 100 = 50\%$$

مثال 9 : بابو ایک کمپنی سے 20,000 میں ریفریجریٹر خریدتا ہے۔ بابو کا تبادلہ ہونے پر وہ اس کو فروخت کرنا چاہتا ہے۔ اس کا دوست فریج 18,000 میں خریدنے کی خواہش کرتا ہے۔ کیا یہ نفع ہے یا نقصان؟ کیا محسوس کرتے ہیں؟

حل: ریفریجریٹر کی قیمت خرید $= CP = 20,000$

ریفریجریٹر کی قیمت فروخت $= SP = 18,000 \qquad SP < CP$

نقصان $= CP - SP = 20,000 - 18,000 = 2000$

نقصان فیصد = نقصان / نفع فیصد x 100

$$= \frac{2000}{20000} \times 100 = 10\%$$

نقصان فیصد $= 10\%$

مشغلہ-10 : مندرجہ خالی جگہوں کو مثالوں کی مدد سے مکمل کیجئے۔

سلسلہ نشان	قیمت خرید	قیمت فروخت	نفع یا نقصان	نفع یا نقصان فیصد
1.	₹ 150/-	₹ 162/-	Profit = ₹ 12/-	$g\% = \frac{12}{150} \times 100 = 8\%$
2.	₹ 60/-	₹ 54/-	Loss = ₹ 6/-	$L\% = \frac{6}{60} \times 100 = 10\%$
3.	₹ 2000/-	₹ 2800/-	____	____
4.	₹ 10/-	₹ 8/-	____	
5.	₹ 100		Profit = ₹ 10/-	g% = × ____
6.	₹ 30	Profit = ₹ 5/-	____	g% = 20%
7.	₹ 500	____	____	L% = 10 %
8.	₹ 270	Loss = ₹ 30/-	____	____

مثال 10 : ایک میوہ فروش 10% نقصان سے تربوز فروخت کرتا ہے۔اس وجہ سے ہر تربوز پر 5 روپے کا نقصان ہوتا ہے۔کیا قیمت فروخت 45 ہے؟

حل: تربوز کی قیمت خرید = CP

نقصان = 5 نقصان فیصد = L % = 10%

لیکن، نقصان فیصد = نقصان / قیمت خرید x 100

100 x نقصان / نقصان فیصد = CP

$= \frac{5}{10} \times 100 =$ ` 50

نہیں قیمت خرید 45 ` نہیں ہے۔

مثال 11 : کرشنا ایک سیکل 4,000 ` میں خریدتا ہے۔اور 25% نفع سے فروخت کرتا ہے۔اگر آپ اس سیکل کو خریدنا چاہتے ہیں تب کرشنا کو کتنی رقم ادا کریں گے؟

نفع فیصدی = g% = 25%

کرشنا کی قیمت خرید = 4000`

قیمت خرید پر نفع = $\frac{g\%}{100}$ × قیمت خرید

$= \frac{25}{100} \times 4000 =$ ` 1000

قیمت فروخت = قیمت خرید + نفع

= 4000 + 1000 = ` 5000

کرشنا سے سیکل خریدنے کے لئے 5000 ` ادا کرنے ہوں گے۔

3.2.3 ڈسکاؤنٹ (چھوٹ)، ڈسکاؤنٹ فیصدی (چھوٹ فیصدی)

بعض اوقات دوکاندار مختص قیمت پر تخفیف دیتے ہیں۔اس کو Discount (ڈسکاؤنٹ) کہتے ہیں۔بازار کی مختص قیمت پر تخفیف ڈسکاؤنٹ ہوتا ہے۔قیمت جو شئے پر درج ہوتی ہے فہرستی قیمت کہلاتی ہے (MP) سے ظاہر کرتے ہیں۔بازار کی مختص قیمت پر تخفیف ڈسکاؤنٹ کہلاتا ہے۔اس کو 'd' سے ظاہر کرتے ہیں۔

فہرستی قیمت - قیمت فروخت = MP – SP

= d = ڈسکاؤنٹ

فہرستی قیمت / ڈسکاؤنٹ x 100

$$= \frac{d}{MP} \times 100$$

آ یئے ڈسکاؤنٹ پر مبنی سوالات کو حل کرتے ہیں، فہرستی قیمت و قیمت فروخت وغیرہ۔

مثال 12 : ایک دوکاندار ایک صابن 'A' پر 10% ڈسکاؤنٹ دیتا ہے۔ صابن 'A' جس کی فہرست قیمت 30 ` ہے اور 12% دوسرا صابن 'B' جس کی فہرستی قیمت 25 ` ہے۔ ہر صورت میں آپ کتنی قیمت ادا کریں گے؟

حل: صابن 'A' پر ڈسکاؤنٹ فیصد 10%

$$= \frac{10}{100} \times 30 = ` 3/-$$

فہرستی قیمت – ڈسکاؤنٹ = صابن A پر ڈسکاؤنٹ

صابن 'B' کی فہرست قیمت = 25 روپے

صابن 'B' پر ڈسکاؤنٹ فیصد = 12%

$$\text{صابن 'B' پر ڈسکاؤنٹ} = \frac{12}{100} \times 25 = ` 3/-$$

صابن 'B' پر قیمت فروخت = 25 – 3 = `22

3.2.4 ٹیکس اور GST (اشیاء اور محصول خدمات) GST (Goods and Services Tax)

ایک Tax یا محصول حکومت کی جانب سے عوام کی مختلف خدمات پر وصولی جانے والی رقم ہوتی ہے۔

کسی بھی شئے کو فروخت کرنے پر قیمت فروخت پر کچھ فیصد رقم حکومت وصول کرتی ہے اس کو Tax یا محصول کہتے ہیں۔ یہ محصول عوام کی خدمت کے عوض وصولی جاتی ہے GST کہلاتی ہے۔ مختلف اشیاء پر GST کی فیصد بھی مختلف ہوتی ہے۔

انکم ٹیکس (Income Tax) : انفرادی طور پر یا کمپنی کی آمدنی پر حکومت سے وصول کی جانے والی رقم کو انکم ٹیکس کہتے ہیں۔

GST (Goods and Services Tax): GST دراصل وہ محصول ہے جو ہندوستان میں تقریباً تمام گھریلو اشیاء پر وصول کیا جاتا ہے۔ GST کی تین اقسام ہیں: سنٹر کا GST جس کو (CGST)، اسٹیٹ کا GST جس کو (SGST) اور انٹی گریٹڈ GST یعنی (IGST)۔ Union Territories کے لئے یہ UTGST ہوگا۔ اشیاء جیسے انڈے، شہد، دودھ، نمک وغیرہ GST سے مستثنیٰ ہوں گے۔ اشیاء جیسے پٹرول، ڈیزل وغیرہ بھی GST کے تحت نہیں آتے کسی اور محصول کے تحت آتے ہیں۔ GST کونسل 1300 اشیاء اور 500 خدمات پر مختلف فیصدی GST عائد کی ہے۔ 5%, 12%, 18% اور 28%۔

مثال 13 : ایک دوکان میں واٹر ہیٹر کی فہرستی قیمت 1000 ہے۔ اس پر 18% GST وصول کیا جاتا ہے۔ واٹر ہیٹر کی قیمت فروخت کیا ہوگی؟

حل: واٹر ہیٹر کی قیمت خرید = 1000 روپے

فہرستی قیمت پر GST = 18%

$$GST = \frac{GST\%}{100} \times MP$$

قیمت فروخت = فہرستی قیمت + GST

$$= 1000 + 180$$

اس طرح قیمت فروخت = 1180 روپے

مثال 14 : ایک فیملی ہوٹل میں کھانے پر 350 خرچ کرتی ہے اور اس پر 5% GST زائد ادا کرتی ہے۔ تب CGST اور SGST معلوم کیجئے۔ (اگر CGST اور SGST مساوی ہوں)

حل: ایک ہوٹل میں ایک فیملی کی جانب سے خرچ کی گئی رقم = 350 روپئے

GST extra = 5%

نوٹ: GST = 50% مرکزی GST + 50% ریاستی GST

$$= \frac{1}{2}\text{ CGST} + \frac{1}{2}\text{ SGST}$$

$$\therefore\ 5\%\text{ GST} = 2.5\%\text{ CGST} + 2.5\%\text{ SGST}$$

$$CGST = \frac{2.5}{100} \times 350 = ₹\ 8.75/-$$

$$SGST = \frac{2.5}{100} \times 350 = ₹\ 8.75/-$$

مشق

1. کسور کو فیصد میں تبدیل کیجئے۔

(i) $\frac{1}{20}$ (ii) $\frac{13}{25}$ (iii) $\frac{27}{50}$ (iv) $\frac{18}{72}$

2. فیصدی کو کسور میں تبدیل کیجئے۔

(i) 35% (ii) 70% (iii) 125% (iv) $30\frac{1}{5}\%$

(v) 7.2% (vi) 90%

3. 40 کیلو پیاز کے ایک تھیلے میں 10% پیاز خراب ہوجاتی ہے۔ کتنے کیلو پیاز اچھی حالت میں موجود ہے؟

4. ایک کمپنی صابن پر 25% زائد کا پیش کش کرتی ہے اگر آپ 100 گرام کا صابن خریدتے ہیں تب اُس صابن کا وزن کیا ہوگا؟

5. ایک مرغی فروخت کرنے والی دکان میں دکاندار 12 کیلوگرام زندہ مرغی کا وزن کرتا ہے۔ اُس کی کٹائی کے بعد اس کا وزن 800 گرام ہوجاتا ہے۔ ضائع شدہ مقدار کا فیصد کتنا ہے؟

6. دسویں جماعت میں لڑکے اور لڑکیوں کی نسبت 12:13 ہے۔ تب لڑکیوں کا فیصدی معلوم کیجئے۔

7. رنجیت کی آمدنی 7500 روپے ہے۔ وہ آمدنی کا 25% حصہ بچت کرتا ہے۔ تب اُس کی کی گئی بچت کی رقم معلوم کیجئے۔

8. ایک جماعت میں 80 فیصد طلباء ہیں۔ اگر 14% فیصد ایک خاص دن پر غیر حاضر ہوں تو اُس دن جماعت میں کتنے طلباء حاضر ہیں۔

9. ایک شخص ایک کاروبار میں 120000 کا سرمایہ لگاتا ہے اور اس کو 150000 حاصل ہوتے ہیں۔ اُس کا نفع فیصدی معلوم کیجئے۔

10. للیتا ایک واٹر کین 300 روپے میں خریدتی ہے، اگر دکاندار کو اس پر 20% نفع ہوتا ہے تب واٹر کین کی قیمت خرید کیا ہے؟

11. ایک مشروب کی کمپنی سرما کے موسم میں تمام مشروبات پر 10% کا ڈسکاؤنٹ دیتی ہے۔ اگر ایک مشرب کی بوتل کی فہرستی قیمت 90 روپے ہو تب اُس پر کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟

12. امر ایک Wireless Head کا آرڈر کرتا ہے۔ پارسل پر اس کو 18% GST ادا کرنا ہوتا ہے جس کی فہرستی قیمت 500 روپے ہے۔ اُس کو کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟

آیئے نکات کو اکٹھا کریں

- ہر 100 اکائیوں کی مقدار کی تقابلی شمار کو فیصدی کہتے ہیں۔
- کسور جن کے نسب نما مساوی ہوتے ہیں عدد 100 کے، فیصدی شکل کو ظاہر کرتے ہیں۔
- فیصدی کو مختصر کرنے پر کسور میں ظاہر کر سکتے ہیں۔
- کسی شئے کی خریدی جانے والی قیمت کو قیمت خرید کہتے ہیں۔ جس کو CP سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- وہ قیمت جو شئے کو فروخت کرنے پر حاصل ہوتی ہے، قیمت فروخت کہلاتی ہے۔ جس کو SP سے ظاہر کرتے ہیں۔
- اگر قیمت فروخت، قیمت خرید سے زیادہ ہو تب نفع حاصل ہوتا ہے۔ جس کو P یا G سے ظاہر کرتے ہیں۔
- نفع = SP - CP
- اگر قیمت فروخت، قیمت خرید سے کم ہوتی ہے، تب نقصان ہوتا ہے جس کو 'L' سے ظاہر کرتے ہیں۔

نقصان = CP – SP

نفع % = نفع / قیمت خرید x 100

نقصان % = نقصان / قیمت خرید x 100

- کسی شئے پر چسپاں قیمت کو فہرستی قیمت کہتے ہیں جس کو MP سے ظاہر کرتے ہیں۔
- وہ قدر جس کو فہرستی قیمت سے کم دی جاتی ہے ڈسکاؤنٹ کہتے ہیں۔

ڈسکاؤنٹ % = ڈسکاؤنٹ / فہرستی قدر x 100

قیمت فروخت = فہرستی قیمت - ڈسکاؤنٹ

- وہ رقم جس کو گورنمنٹ عوام سے خدمات کے عوض وصول کرتی ہے، محصول یا Tax کہلاتی ہے۔
- اشیاء پر خدمات کے عوض لگایا جانے والا ٹیکس (محصول) GST کہلاتا ہے۔

سبق

3.3

سود مفرد اور سود مرکب

Simple Interest and Compound Interest

3.3.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- سود مفرد کے تصورات کی تفہیم کریں گے۔
- سود مفرد پر مبنی سوالات کو حل کریں گے۔
- سود مفرد پر مبنی رقم کا شمار کریں گے۔
- سود مرکب کے مقاصد کی تفہیم تفہیم کریں گے۔

3.3.1 سود مفرد (Simple Interest)

ضرورت مند لوگ قرض لیتے ہیں اپنی ضروریات کی تکمیل کے مابعد کچھ عرصہ میں ادا کر دیتے ہیں۔ ابتداء میں جو قرض کی رقم لی جائی ''اصل زر'' کہلاتی ہے اور اس کو p سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ رقم ادا کرتے وقت قرض لی گئی رقم پر زائد رقم ادا کرنی ہوتی ہے جو ''سود'' کہلاتی ہے اور اسے 'I' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

سود دراصل مدت اور لی گئی قرض کی رقم پر شمار ہوتا ہے۔

سود ہر 100 پر ادا کرنا ہوتا ہے۔ ایک مدت کے دوران (سال میں) شرح سود کہلاتا ہے جس کو 'R' سے ظاہر کرتے ہیں۔

سود دراصل اصل زر پر ایک خاص مدت پر شرح سود پر شمار کرتے ہیں۔ اس کو سود مفرد کہتے ہیں۔ جس کو 'SI' سے ظاہر کرتے ہیں۔

مقررہ مدت = T (جہاں مدت ہو سکتی ہے ایک مہینہ، سال، چار ماہی، 6 ماہی یا ششماہی رقم 100 پر سود، شرح سود کہلاتی ہے R=

ایک شخص 5 روپے شرح سود ہر 100 روپے پر 3 سال کی مدت کے لئے 1000 روپے رقم بطور قرض لیتا ہے۔

پہلے سال ادا کیا جانے والا سود $= 50/- = 1000 \times \frac{5}{100}$

دوسرے سال ادا کیا جانے والا سود $= 50/- = 1000 \times \frac{5}{100}$

تیسرے سال ادا کیا جانے والا سود $= 50/- = 1000 \times \frac{5}{100}$

تین سالوں میں کل ادا کیا جانے والا سود $= 50 + 50 + 50 = 3 \times 50$

$$= 1000 \times 3 \times \frac{5}{100}$$

جہاں 1000 روپے اصل زر (P)' 3 مدت سالوں میں (T) اور 5 شرح سود (R)

سودمفرد = شرح سود 100 پر × مدت × اصل زر = SI

$$SI = P \times T \times \frac{R}{100}$$

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

بطور قرض لی گئی کل ادا کردہ رقم جو کہ اصل زر اور سود پر منحصر ہوتی ہے ''ادا کردہ رقم'' کہلاتی ہے۔

جس کو 'A' سے ظاہر کرتے ہیں۔

جہاں $A = P + SI$

یا $A = P + \frac{PTR}{100}$

$$A = P\left[1+\frac{TR}{100}\right] = P\left[\frac{100+TR}{100}\right]$$

3.3.2 سودمرکب (Compound Interest)

چند صورتوں میں سود کو بھی اصل زر میں جمع کرنے اس پر سود شمار کرتے ہیں۔ اس طرح کا سود ''سود مرکب'' کہلاتا ہے جس کو CI سے ظاہر کرتے ہیں۔

آیئے غور کریں: اگر ایک شخص 1000 روپے قرض 10% شرح سود پر ایک سال کے لئے لیتا ہے تب سال کے اختتام پر ادا شدنی رقم = اصل زر + سودمفرد

مدت = 1 سال اور شرح سود $R = 10\%$

$$A_1 = 1000 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$= 1000 + 100$$

$A_1 = 1100$ (پہلے سال پر ادا کی جانے والی رقم)

اب یہ رقم A_1 اصل زر ہو جاتا ہے

مدت 1 سال شرح سود 10%

$$A_2 = 1000 + \frac{1000 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_2 = 1100 + 110$$

$A_2 = 1210$ (دوسرے سال پر ادا کی جانے والی رقم)

تیسرے سال $A_2 =$ اصل زر

$$A_3 = 1210 + \frac{1210 \times 1 \times 10}{100}$$

$$A_3 = 1210 + 121$$

$A_3 = 1331$ (تیسرے سال پر ادا کی جانے والی کل رقم)

اوپر دی گئی معطیات پر غور کرنے پر

$$A_1 = 1100 = 1000 \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)$$

$$= 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

$$A_2 = 1210 = 10 \times 121 = 10 \times 11 \times 11 = 1000 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

$$= 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^2 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

$$A_3 = 1331 = 11 \times 11 \times 11 = 1000 \times \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = 1000 \times \left(\frac{110}{100}\right)^3$$

$$= 1000 \times \left(\frac{100+10}{100}\right)^3 = 1000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

اس طرح سود مرکب کو شمار کرنے کا ضابطہ ہے:

$$A = P \times \left[1+\frac{R}{100}\right]^n$$

نوٹ: رقم کل مدتوں پر منحصر ہوتی ہے۔

جہاں 'n' = مدت کی تعداد

اگر شرح سود 1 سال کے لئے شمار کرتے ہیں، t سال کے لئے تب $n = t$

اگر شود سود 6 ماہی شمار کرتے ہیں t سال کے لئے تب $n = 2t$

اگر شرح سود 4 ماہی شمار کرتے ہیں t سال کے لئے تب $n = 4t$

اگر شرح سود سال میں دو بار شمار کرتے ہیں t سال کے لئے تب $\frac{t}{2}$

اس طرح سود مرکب کو چند اصول میں شمار کرنے کے لئے

$$CI = A - P$$

مثال 1 : 8% فیصد سالانہ شرح سود پر 4 سال کے لئے بدری، مہیش کو 25,000 روپے قرض دیتا ہے۔ مہیش کو کتنی رقم واپس ادا کرنی پڑے گی؟

حل: بدری کا مہیش کو دیا گیا اصل زر = 25,000 روپے

مدت T = 4 سال

سالانہ شرح سود = R% = 8%

$$SI = \frac{PTR}{100} = \frac{25000 \times 4 \times 8}{100} = \frac{25000 \times 4 \times 8}{100} = 250 \times 4 \times 8 = ` 8000$$

مہیش کو واپس ادا کرنے والی رقم = SI + اصل زر = A

$= 25000 + 8000$

$A = ` 33000/-$

مثال 2 : کتنی شرح سود پر 6000` اصل زر کا سود مفرد 1200 روپے 2 سال کے لئے ہوگا؟

حل: P = `6000 SI = `1200

مدت T = 2yrs R% = ؟

$$SI = \frac{PTR}{100}$$

$$1200 = \frac{6000 \times 2 \times R}{100}$$

$$1200 \times \frac{100}{6000 \times 2} = R$$

$$R = 1200 \times \frac{100}{6000 \times 2} = 10\%$$

∴ شرح سود R% = 10%

مشغلہ 1 : مثالوں دیئے گئے ہدایات پر درج ذیل جدول کو پر کریں۔

سلسلہ نشان	اصل زر	شرح سود	سود مفرد 2 سال کے لئے	سود مفرد 3 سال کے لئے	سود مفرد 1 سال کے لئے	سود مفرد 4 سال کے لئے
1.	1000/-	5%	50/-	100/-	150/-	200/-
2.	2000/-	4%				
3.	750	10%				
4.	20000	$2\frac{1}{2}\%$				

مثال 3 : یادگیری' ملیا سے 7% سالانہ شرح سود پر 5 سال کے لئے 1,40,000 رقم مبادلہ لیتا ہے۔ادا کرنے والی رقم معلوم کیجئے۔

حل: $P = 1,40,000 \quad T = 5 \quad R = 7\%$

$$A = P\left[\frac{100+TR}{100}\right] = ` 1,40,000 \times \left[\frac{100+5\times7}{100}\right]$$

یادگیری' ملیا کو 1,89,000 ادا کرنا ہوگا۔

مشغلہ 2 : مثال پر غور کرتے ہوئے خالی جگہوں کو پر کریں۔

سلسلہ نشان	اصل زر	مدت	شرح سود	سودمفرد	رقم(A)
1.	100/-	2	9%	18/-	118/-
2.	2500	6	7%		
3.	5000/-		10%	1500	
4.		5	6%	1200	
5.	7000	2		1120	

مثال 4 : ہری ایک Finance Company سے سالانہ شرح سود 10% سے 2 سال کے لئے سودمرکب لیتا ہے۔دوسال بعد ہری کمپنی کو کتنی رقم ادا کرنی ہے؟

حل: اصل زر $P = 1,00,000$

شرح سود $R\% = 10\%$

مدت = 2 سال

سودمرکب مدت $n = 2$

$$\text{رقم} = A = \times \left[\frac{100+R}{100}\right]^n = 1,00,000 \times \left[\frac{100+10}{100}\right]^2 = 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right]^2$$

$$= 1,00,000 \times \left[\frac{110}{100}\right] \times \left[\frac{110}{100}\right] = 1,00,000 \times \frac{11\cancel{0}}{1\cancel{0}0} \times \frac{11\cancel{0}}{1\cancel{0}0}$$

$$A = 1000 \times 11 \times 11 = ` 1,21,000$$

ہری کی ادا کرنے والی رقم = `1,21,000

سودمرکب = $CI = A-P = 1,21,000 - 1,00,000 = ` 21,000/-$

مشق

1. 9% شرح سود پر 2 سال کے لئے 50,000` پر سود مفرد معلوم کیجئے۔
2. جوزف 5% سالانہ شرح سود پر 2 سال کے لئے کرن سے 8000 روپے قرض لیتا ہے۔ سود مفرد اور کل ادا کی جانے والی رقم معلوم کیجئے۔
3. 9.5% شرح سود پر 4 سال کی مدت میں رامو 21,280` سود ادا کرتا ہے۔ کل رقم معلوم کیجئے۔
4. کتنی مدت پر 13% شرح پر 16,500` کی رقم 22,935` ہوجاتی ہے؟
5. کتنی شرح سود پر فصیح 2 سال 3 ماہ کی مدت کے لئے 48,000` اصل زر کی رقم 55,560` بینک کو ادا کرتا ہے۔ شرح سود معلوم کیجئے۔
6. اصل زر 3 سال کی مدت اور 13% شرح سود پر 17000` ہوجاتا ہے۔ اصل زر معلوم کیجئے۔
7. پدما 10% شرح سود پر 2 سال کے لئے سود مرکب ہر ایک بیوپاری سے 40,000` مبادلہ لیتی ہے۔ 2 سال بعد پدما کو کتنی رقم ادا کرنی ہوگی؟
8. ایک Finance Company چھ ماہ میں 6% شرح سود کی پیش کش کرتی ہے۔ اگر آپ 1st Oct. 2020 کو 6000` رقم جمع کرواتے ہیں تب آپ 1st April 2022 کو کتنی رقم حاصل کریں گے؟

آیئے نکات کو اکٹھا کریں

- مبادلہ لی جانے والی رقم اصل زر کہلاتی ہے۔ اس کو 'P' سے ظاہر کرتے ہیں۔
- مبادلہ لی جانے والی رقم کے علاوہ زائد رقم کا ادا کرنا ''سود'' کہلاتا ہے۔
- سود اصل زر پر ایک مدت کے لئے ہوتا ہے۔ اس کو I سے ظاہر کرتے ہیں۔
- 100 روپے پر سالانہ شرح سود ''شرح سود'' کہلاتا ہے اس کو 'R' سے ظاہر کرتے ہیں۔
- درکار مدت کو 'T' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- 100 روپے پر سالانہ شرح سود پر وصول کی جانے والی سود کی رقم سود مفرد کہلاتی ہے۔ اس کو SI سے ظاہر کرتے ہیں۔
- ضابطہ = $\frac{PTR}{100}$ (سود مفرد کے لئے)
- سال کے آخر میں (سود اصل + زر) کی رقم کو A سے ظاہر کرتے ہیں۔
- Amount = P+SI
- وہ طریقہ کار جس میں اصل زر میں سود جمع کرتے ہوئے اس پر سود لگایا جاتا ہے سود مرکب کہلاتا ہے۔ اس کو CI سے ظاہر کرتے ہیں۔
- سود مرکب کو معلوم کرنے کا ضابطہ $A = P\left[1+\frac{R}{100}\right]^n$
- سود مرکب سالانہ محسوب کرتے ہیں، اس طرح چھ ماہی اور شش ماہی وصول کیا جاتا ہے۔

اکائی 4 جیومٹری

سبق 4.1

جیومٹری کے بنیادی تصورات
Basic Geometrical Ideas

4.1.0 علمی مقاصد (Learning Objectives)

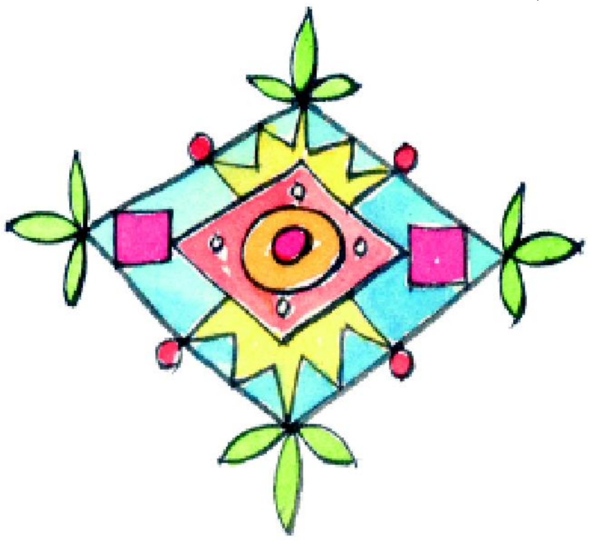
اس باب کے اختتام پر، آپ قابل ہوں گے:

- جیومٹری کے بنیادی تصورات جیسے نقطہ، خط، خط مستقیم، سطح، شعاع اور زاویوں کو سمجھانے کے قابل ہوں گے۔
- جیومٹری کے اشکال کو ماحول سے تلاش کرنے اور مثالیں دیں گے۔
- بنیادی جیومٹری اشکال اتارنے کے
- زاویوں کی درجہ بندی اور ان کے تقابل کے
- دیئے گئے خطوط کو متوازی خطوط اور قاطع خطوط اور عمودی خطوط میں ظاہر کریں گے۔
- خطی قطعہ، خطوط اور شعاع کی درجہ بندی کریں گے۔

4.1.1 تعارف (Introduction)

کیا آپ نے کبھی رنگولی کا مشاہدہ کیا ہے جس کو گھروں کے سامنے ڈالتے ہیں؟

کیا آپ نے کبھی مہندی کے ڈیزائن کا مشاہدہ کیا جو ہاتھ پر ڈالی جاتی ہے؟

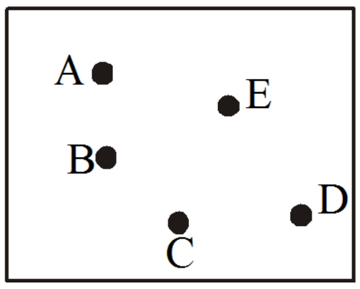


تمام اشیاء کی شکلیں دراصل مختلف جیومٹری اشکال پر منحصر ہوتی ہیں۔

وہ تمام اشیاء جو ہم اپنے گھر میں دیکھتے ہیں، جیسے ٹیلی ویژن، تیلی کی ڈبیہ، پانی کا گلاس، پوڈر کا بکس، گیند وغیرہ یہ تمام تر جیومٹری اشکال پر منحصر ہیں۔

آپ اس باب میں جیومٹری اشکال اور تصورات کو سیکھیں گے۔

4.1.2 جیومٹری کے بنیادی تصورات، نقطہ (Basic Geometrical Shapes, Point)

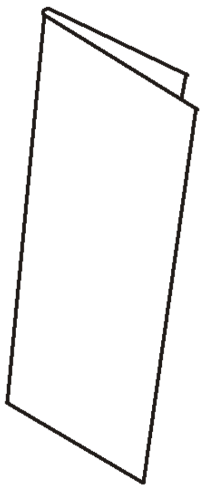


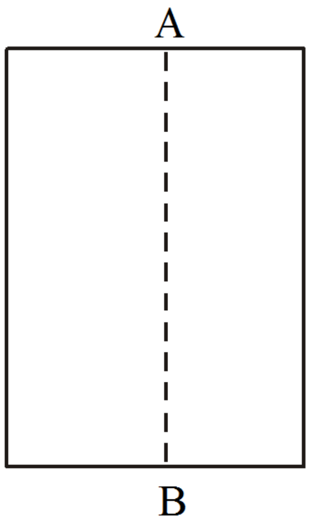
آپ ایک پنسل کی باریک نوک سے کاغذ پر ہلکا سا نشان لگائیں۔

یہ نقطہ کہلاتا ہے۔ نقطہ مقام کو ظاہر کرتا ہے۔

نقطہ کو Capital letters سے ظاہر کرتے ہیں۔

خطی قطعہ (Line Segment)





ایک سخت کاغذ لے کر اس کو شکل میں بتائے گئے طریقے سے تہہ کریں۔ تہہ کئے گئے کنارے پر غور کریں۔ یہ ہم کو خطی قطعہ کا تصور دیتا ہے۔ تہہ کی لکیر خطی قطعہ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کے دو مختتم نام ہوتے ہیں A اور B، اس کو خطی قطعہ AB کہتے ہیں، جس کو $\overline{AB}$ یا $\overline{BA}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

خط (Line)

تصور کیجئے کہ خطی قطعہ AB کو بڑھا دیا گیا A سے اور B کی جانب سے بھی۔

آپ کو خط کا تصور حاصل ہوگا۔

مخصوص طول کی خط کو کھینچا نہیں جا سکتا، ہم تیر کے نشان دونوں جانب لگا کر اس کی لا متناہی طول کو ظاہر کرتے ہیں۔ اس خط کو AB سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کو انگریزی کے چھوٹے حروف l، m، n سے ظاہر کرتے ہیں۔

شعاع (Ray)

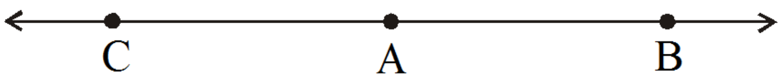
سورج کی شعاعیں، روشنی کی شعاعیں جو کہ ٹارچ سے نکلتی ہیں، یہ ''شعاع'' کے تصور کو بتاتی ہیں۔

شعاع دراصل خط کا ایک حصہ ہے۔ یہ ایک نقطہ سے شروع ہو کر دوسری سمت میں لا متناہی چلتی ہے۔

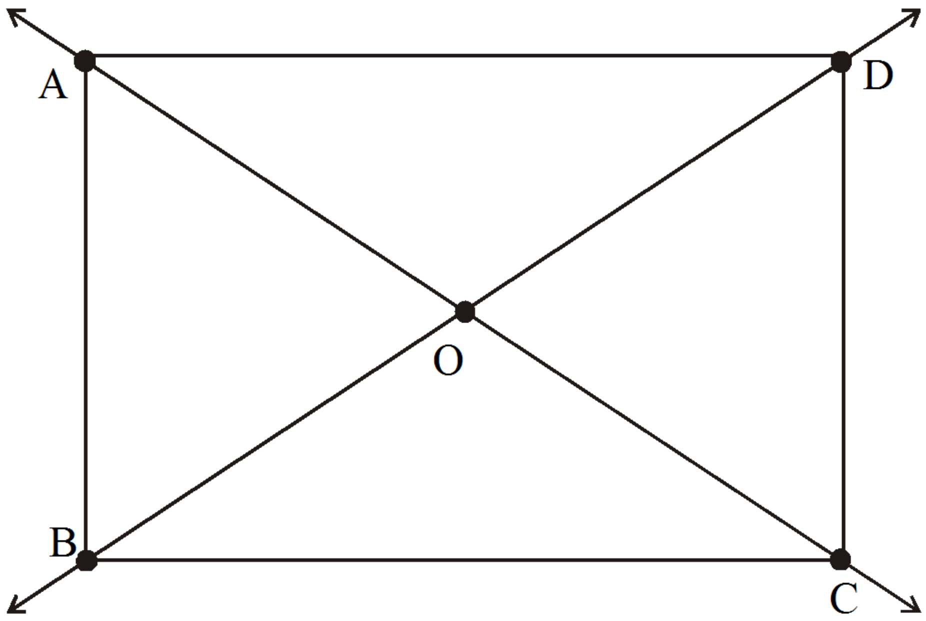
شعاع AB یا $\overrightarrow{AB}$

اس طرح شعاع میں ایک مختتم نقطہ ہوتا ہے۔

فرض کیجئے کہ ایک خط پر A ایک نقطہ ہے، اسی خط پر A کے دونوں جانب B اور C دو نقاط ہیں۔ تب $\overrightarrow{AB}$ اور $\overrightarrow{AC}$ دو شعاع ہیں۔



مشغلہ



دی گئی شکل کی رو سے

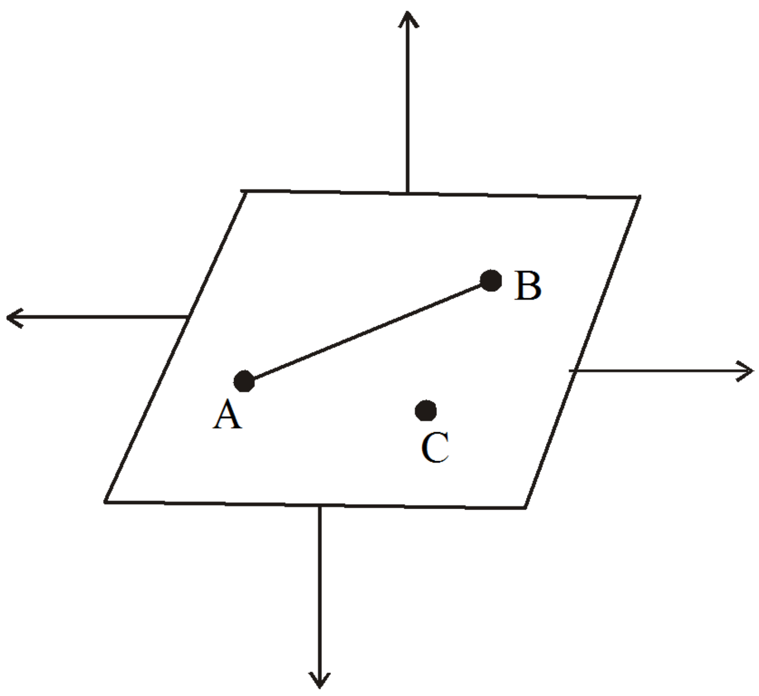
A, B, C, D اور **O** نقاط ہیں۔

$\overline{CD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ اور $\overline{AD}$ خطی قطعہ ہیں۔

$\overleftrightarrow{AC}$ اور $\overleftrightarrow{BD}$ خط مستقیم ہیں۔

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OD}$ شعاع ہیں۔

مستوی (Plane)



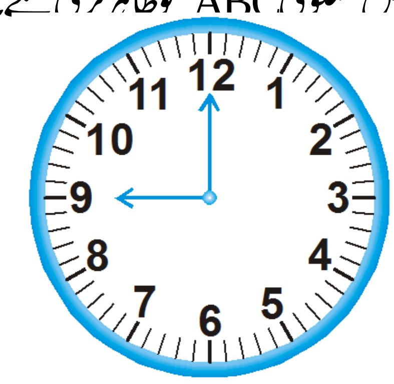
ایک مستوی، دو ابعادی سطح ہے جس کو ہر سمت میں لا متناہی پھیلایا جا سکتا ہے۔

میز کی سطح، بلاک بورڈ کی سطح، یا دیوار کی سطح یہ تمام مستوی کی مثال میں لی جا سکتی ہے۔

یہ متناہی ہیں لیکن مستوی لا متناہی طور پر پھیلتا ہے۔ ایک خطی قطعہ جو دو نقاط کو جوڑتی ہے وہ سطح کے اندر پائی جاتی ہے۔

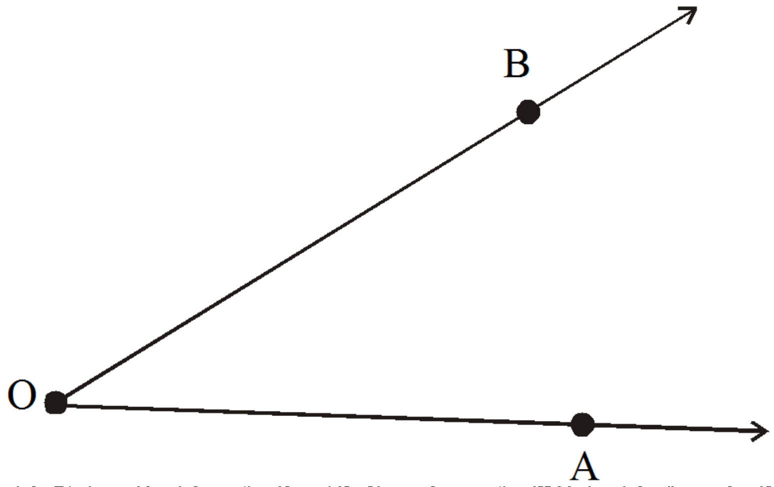
ایک مستوی کو اس کے غیر ہم خط نقاط سے ظاہر کرتے ہیں۔ ان نقاط کو Greek کے حروف الفا (α)، بیٹا (β) اور گاما (γ) وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔ متصلہ شکل مستوی ABC کو ظاہر کرتی ہے۔

زاویہ (Angle)



دیوار کی گھڑی کے دو کانٹوں کا مشاہدہ کیجیے۔ اس کے کانٹوں کے درمیان زاویہ بنتا ہے۔

زاویہ کیا ہے؟



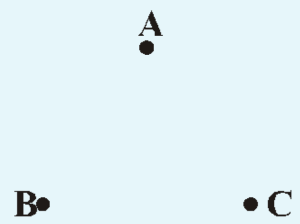
دو شعاع ایک مشترکہ نقطہ پر زاویہ بناتے ہیں۔ دو شعاع زاویہ کے بازو کہلاتے ہیں۔ مشترک نقطہ کو زاویہ کا ''راس'' کہا جاتا ہے۔

یہاں پر دو شعاع $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ دو بازو یا دو ضلع اور 'O' زاویہ کا راس کہلاتا ہے۔ زاویہ 'O' پر بنا ہے۔ اس طرح ہم اس زاویہ کو زاویہ AOB یا زاویہ BOA لکھتے ہیں۔ اس کو $\angle AOB$ یا $\angle BOA$ یا $\angle O$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

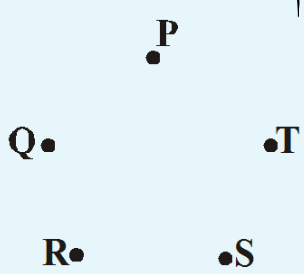
اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے -1

1. دئے گئے نقاط کو جوڑئے۔ اس طرح حاصل ہونے والے خطی قطعوں کے نام لکھئے۔

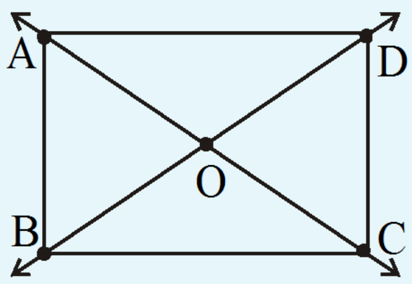
(i)



(ii)



2. دی گئی شکل کے نام لکھئے۔



(i) کوئی پانچ نقاط

(ii) کوئی پانچ خطی قطعے

(iii) کوئی تین شعاعیں

(iv) کوئی دو خطوط

3. خطوط کی تعداد بتایئے جو کھینچے جاسکتے ہیں۔

(i) ایک نقطہ سے   (ii) علیحدہ نقاط سے

اپنے جواب کے لئے خاکے بنایئے

4. مندرجہ ذیل میں کس کا متناہی طول ہے؟

(i) خط   (ii) نقطہ   (iii) خطی قطعہ   (iv) شعاع

5. مندرجہ ذیل کے کتنے مختتم نقاط ہیں؟

(i) خطی قطعہ   (ii) شعاع   (iii) خط

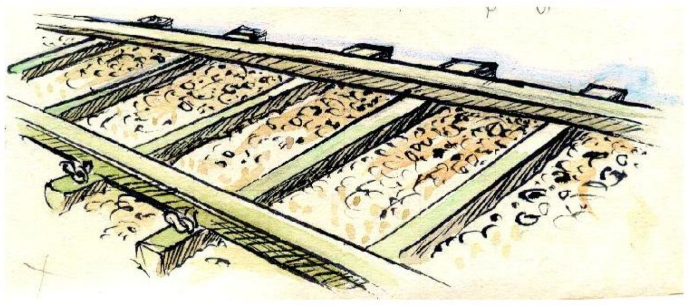
6. اتاریے اور نام لکھئے۔

(i) خط جس کا نقطہ P ہے

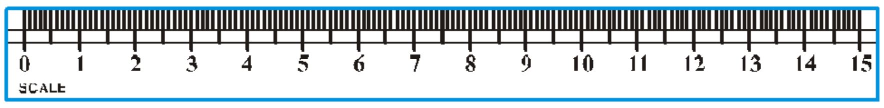
(ii) خط جو نقطہ R سے گذرتی ہے

4.1.3 متوازی خطوط (Paralled Lines)

اشکال کا مشاہدہ کریں۔



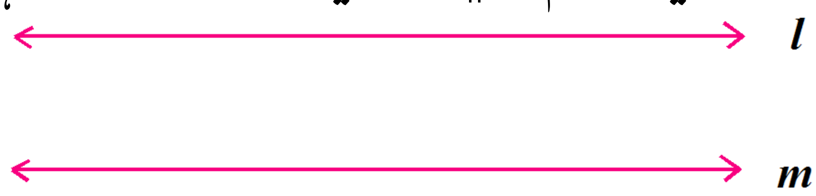
ریلوے کی پٹریاں



پٹری

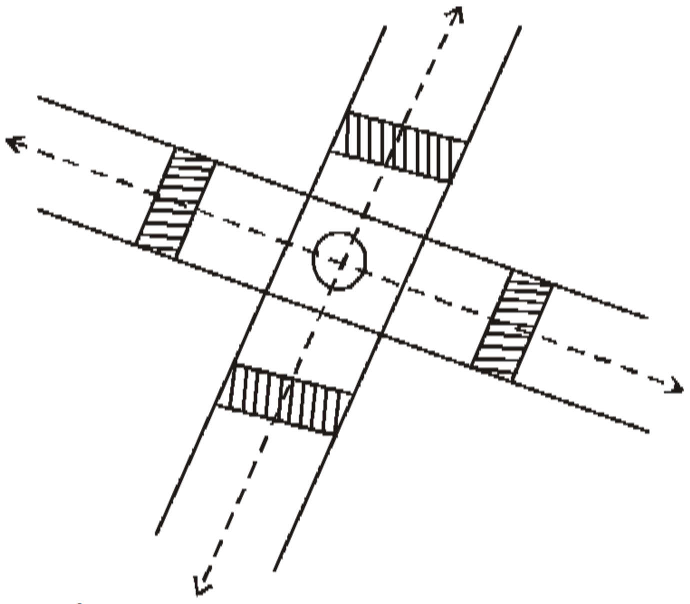
اگر دو خطوط ایک مستوی میں کسی بھی نقطہ پر قطعہ نہیں کرتے ہیں، وہ خطوط متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

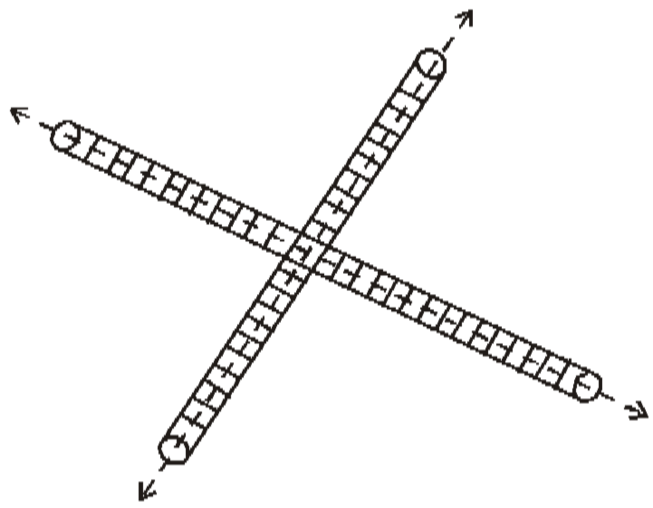
یہاں l اور m دو متوازی خطوط ہیں، ان کو ہم $l \parallel m$ لکھتے ہیں اور اس کو l متوازی ہے m کے پڑھا جاتا ہے۔

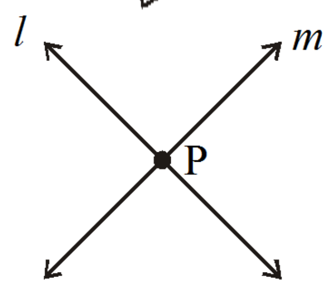


قاطع خطوط (Intersecting lines)

ذیل کی تصاویر کا مشاہدہ کریں۔

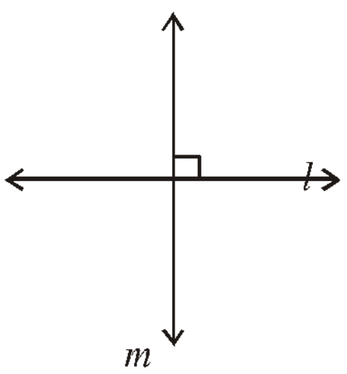






دو علیحدہ خطوط l اور m، نقطہ p پر قطع کرتے ہیں۔ وہ خطوط قاطع خطوط کہلاتے ہیں۔ اس کا ایک مشترک نقطہ ہوتا ہے۔

عمودی خطوط (Perpendicular lines)



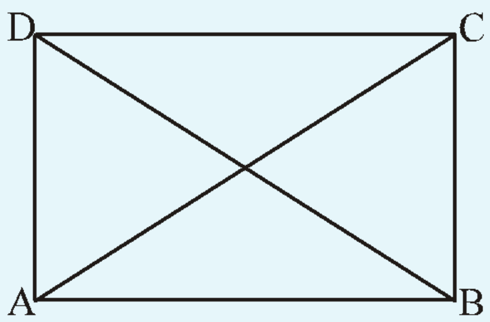
اگر دو خطوط قطع کرتے ہوئے قائم الزاویہ بناتے ہیں، عمودی خطوط کہلاتے ہیں۔

یہاں خط 'l' عمودوار ہے m پر اس $l \perp m$ لکھا جاتا ہے۔

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے - 2

1. متوازی خطوط اور قاطع خطوط کی روزمرہ زندگی کی مثالیں دیجئے۔

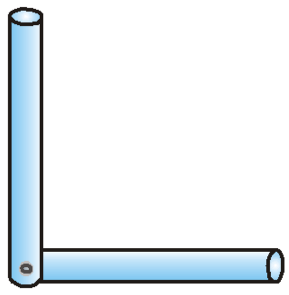
2. ABCD ایک مستطیل ہے (i) متوازی خطوط کی جوڑ (ii) عمودی خطوط کی جوڑ (iii) قاطع خطوط دیئے گئے شکل سے کون سے ہیں؟



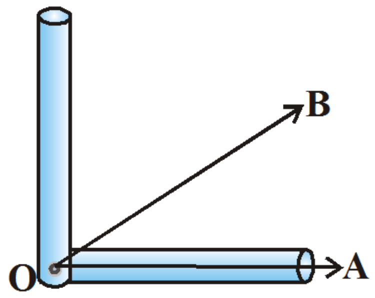
4.1.4 زاویوں کے اقسام (Types of Angles)

مشغلہ

دو عدد مشروب کی نلکیاں (Straws) لیجئے۔ شکل میں بتائے گئے طریقے پر ایک نلکی کے کونے کو دوسرے پر رکھ کر ایک پن لگادیں۔ اس نقطہ کو 'L' شکل میں تبدیل کریں۔ یہاں آپ کو قائم الزاویہ حاصل ہوگا۔



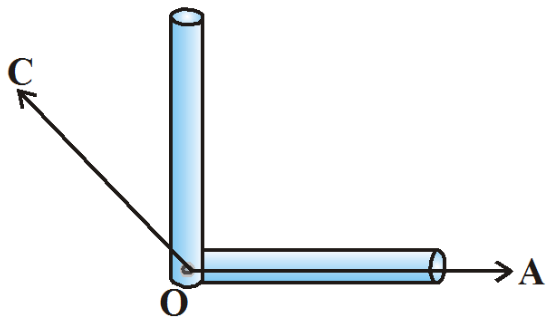
شکل 1



شکل 2

شکل 2 میں زاویہ قائم الزاویہ سے کم ہے۔ یہاں $\angle AOB$ ایک حادہ زاویہ ہے۔

شکل 3 میں زاویہ قائم الزاویہ سے بڑا ہے۔ یہاں $\angle AOC$ اور منفرجہ زاویہ ہے۔



شکل 3

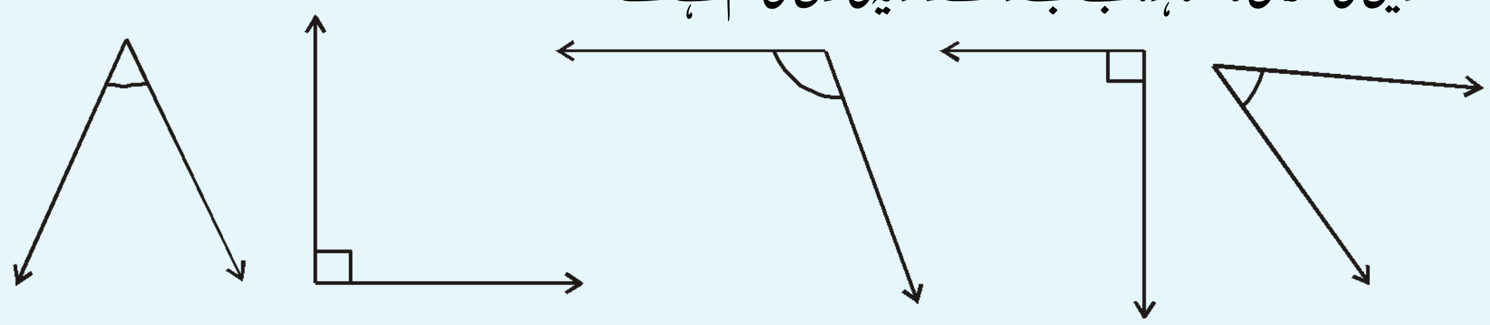
پیمائش	زاویوں کی اقسام
صفری زاویہ	0^0
زاویہ قائمہ، قائم الزاویہ	90^0
منفرجہ زاویہ	180^0
زاویہ مستقیم، خطی زاویہ	360^0
زاویہ معکوس	0^0 اور 90^0 کے درمیان پائے جانے والا
مکمل زاویہ	90^0 اور 180^0 کے درمیان پائے جانے والا
حادہ زاویہ	180^0 اور 360^0 کے درمیان پائے جانے والا

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے - 3

1. ذیل میں دیئے گئے حادہ، قائم الزاویہ، منفرجہ زاویہ، خطی زاویہ اور زاویہ معکوس کی درجہ بندی کیجئے۔

(i) 65^0 (ii) 109^0 (iii) 90^0 (iv) 125^0 (v) 270^0 (vi) 180^0

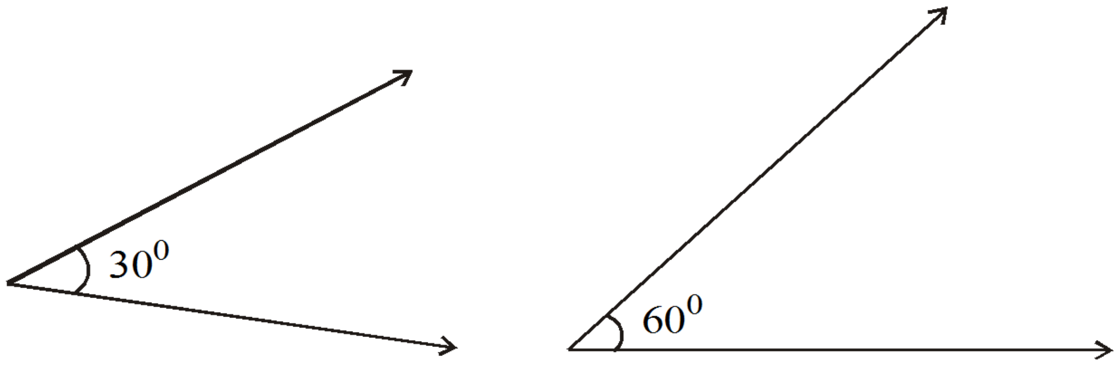
2. ذیل کی اشکال کا مشاہدہ کیجئے بننے والے زاویہ کی کون سی قسم ہے لکھئے۔



4.1.5 زاویوں کے جوڑ (Pair of Angles)

اتمامی زاویے (Complementary Angles)

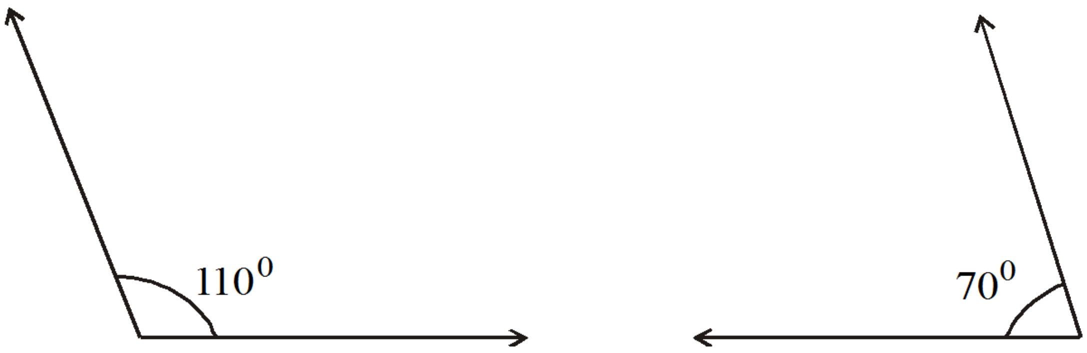
اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90 ہو تو ان زاویوں کو تکمیلہ زاویے کہتے ہیں۔



یہ تکمیلہ زاویے ہیں' ان کا مجموعہ $30^0 + 60^0 = 90^0$ ہے۔

تکمیلہ زاویے (Supplementary Angles)

اگر دو زاویوں کا مجموعہ 180^0 کے مساوی ہو تو' وہ زاویے تتمہ زاویہ کہلاتے ہیں۔

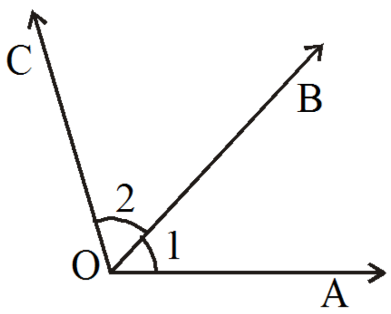


یہ تتمہ زاویوں کا جوڑ ہے' جس کا مجموعہ $110° + 70° = 180°$

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $110°$ کا تتمہ $70°$ ہے اور $70°$ کا تتمہ $110°$ ہے۔

متصلہ زاویے (Adjacent Angles)

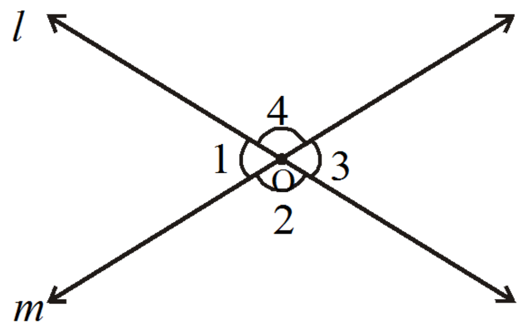
زاویے جن کے مشترکہ باز و اور مشترکہ راس اور غیر مشترکہ باز و مشترکہ باز و کے دونوں جانب ہوں متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔



زاویے $\angle AOB$ اور $\angle BOC$ دیئے گئے شکل میں متصلہ زاویے ہیں۔ ان کا ایک مشترکہ راست ہوتا ہے جو 'O' پر واقع ہے اور مشترکہ باز و $\overline{OB}$ ' مشترکہ باز و $\overline{OB}$ کے دونوں جانب OA اور OC باز و متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔

مقابل کے راسی زاویے (Vertically Opposite Angles)

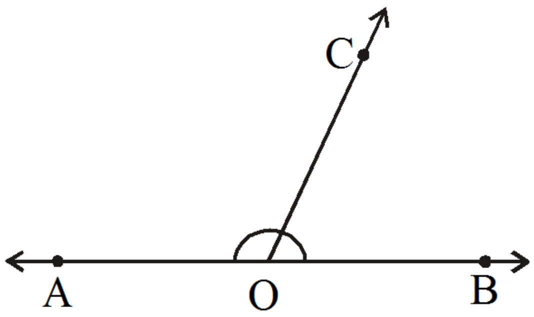
جب دو خطوط آپس میں قطع کرتے ہیں، تب نقطہ قاطع پر بننے والے مقابل کے زاویے مقابل کے راسی زاویے کہلاتے ہیں۔



شکل میں دو خطوط l اور m نقطہ O پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ $\angle 1$ اور $\angle 3$ مقابل کے زاویے ہیں اور اس طرح دوسری جوڑی $\angle 2$ اور $\angle 4$ ہے۔ اس طرح $\angle 1, \angle 3$ اور $\angle 2, \angle 4$ دو مقابل کے راسی زاویوں کے جوڑ ہیں۔

خطی جوڑ (Linear pair)

متصلہ زاویوں کا جوڑ جن کا مجموعہ (180°) ہو زاویہ مستقیم کہلاتا ہے اور یہ جوڑ خطی جوڑ کہلاتے ہیں۔



شکل پر غور کیجیے۔ $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ متصلہ زاویے ہیں اور ان زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ اس طرح $\angle AOC$ اور $\angle BOC$ خطی جوڑ بناتے ہیں۔

اپنی قابلیت کی جانچ کیجیے - 4

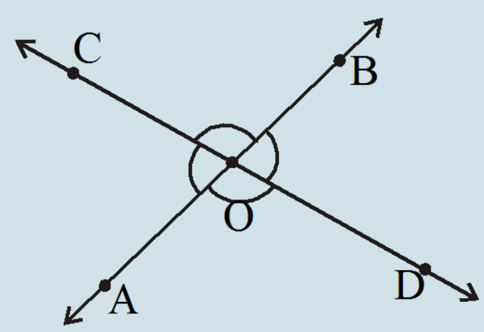
1. انوشا کہتی ہے "اتمامی زاویوں کے جوڑ ہمیشہ حادہ ہوتے ہیں" کیا آپ اس کے بیان سے متفق ہیں؟ کیوں؟
2. دئے گئے زاویوں میں تکمیلہ زاویے معلوم کیجیے۔

(1) 115° (ii) 95° (iii) 10° (iv) 40°

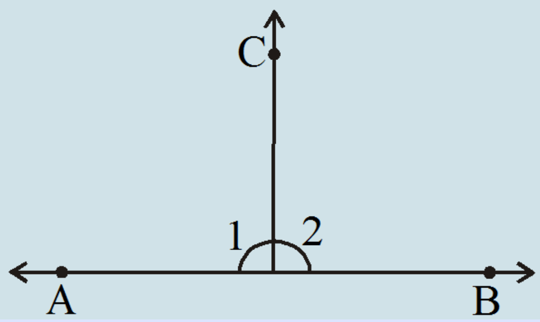
3. دی گئی شکل کی رو سے جوڑ معلوم کیجیے۔

(i) متصلہ زاویے

(ii) مقابل کے راسی زاویے

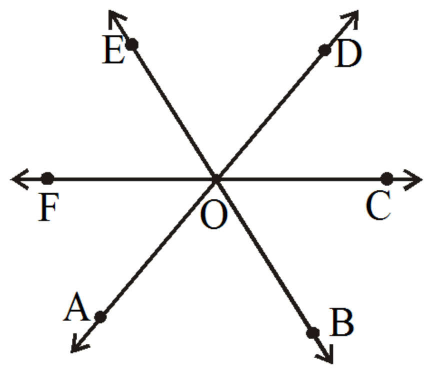


4. دی گئی شکل میں، رگھو کہتا ہے $\angle 1$ اور $\angle 2$ متصلہ زاویے اور اتمامی زاویے ہیں۔ جہاں رامو کہتا ہے $\angle 1$ اور $\angle 2$ خطی جوڑ ہے۔



آپ کس سے متفق ہیں اور کیوں؟

مشق - 1

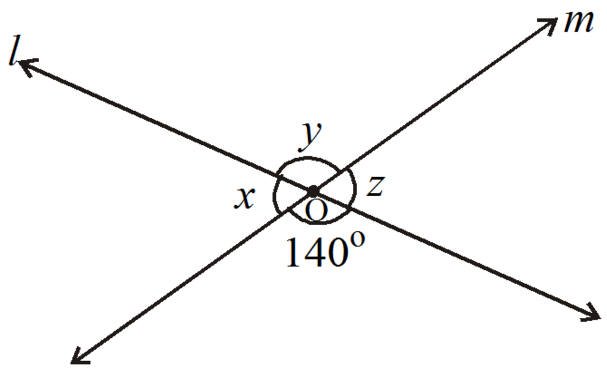
.1 

لکھیے۔

(i) متصلہ زاویوں کے کوئی چار جوڑ

(ii) مقابل کے راسی زاویوں کے تین جوڑ

دی گئی شکل پر غور کرتے ہوئے لکھیے۔

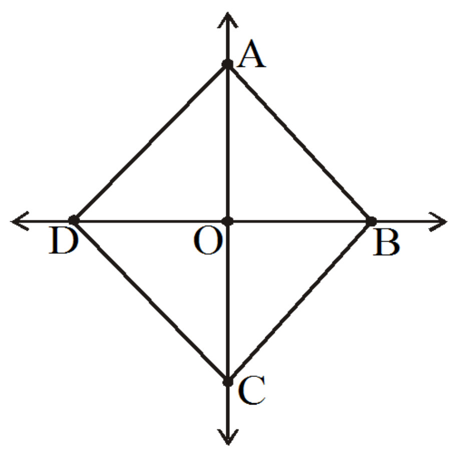
.2 

دو خط مستقیم l اور m نقطہ O پر قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں ظاہر ہے۔ تب x، y اور z کی قدریں معلوم کیجیے۔

.3 دیئے گئے اوقات میں گھڑی کے بازوؤں کے درمیان بننے والے زاویے لکھیے۔

(i) صبح 9 بجے (ii) دوپہر 12 بجے (iii) شام 6 بجے (iv) رات 8 بجے

.4 دی گئی شکل کی رو سے نام لکھیے۔



(i) کوئی پانچ نقاط

(ii) کوئی پانچ خطی قطعے

(iii) کوئی دو شعاع

(iv) کوئی دو خطوط

.5 مندرجہ ذیل میں کون سے متوازی خطوط اور کون سے عمودی خطوط ہیں؟

(i) ریل کی پٹریاں (ii) انگریزی حروف کا حرف "T"

(iii) دروازے کے کنارے (iv) جمع کی علامت "+"

.6 دو اشکال حادہ اور مفرجہ زاویوں کے بنائیے۔

.7 دو زاویے اتمامی ہیں اور دونوں مساوی ہیں۔ معلوم کیجیے۔

.8 مندرجہ ذیل بیانات میں صادق و کاذب معلوم کیجیے۔

(i) شعاع خط کا حصہ ہے [ ]

(ii) خطی قطعہ کا صرف ایک مختتم نقطہ ہوتا ہے [ ]

(iii) ایک مکمل زاویہ °360 کا ہوتا ہے [ ]

(iv) ایک نقطے سے ہم لا متناہی خطوط کھینچ سکتے ہیں [ ]

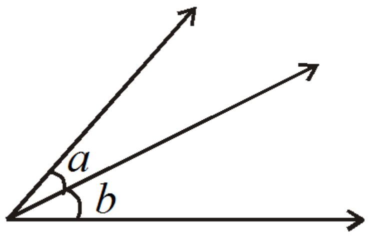
.9 زاویہ مستقیم ہے __________ [ ]

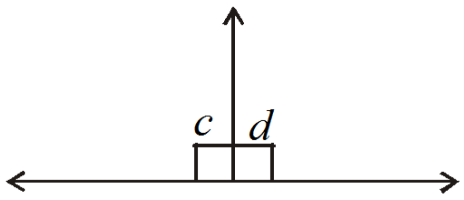
(A 90° (B 180° (C 270° (D 360°

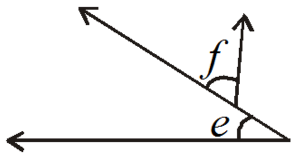
.10 ان میں سے کون سا تکمیلہ زاویہ کی جوڑ نہیں ہے؟ [ ]

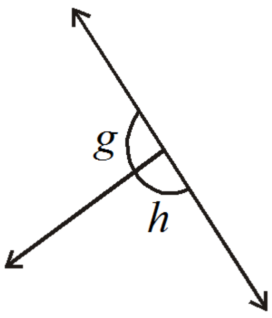
(A 110° , 70° (B 90°, 90° (C 50°, 140° (D 105°, 75°

.11 مندرجہ ذیل اشکال میں متصلہ زاویوں کی جوڑ نہیں ہے؟

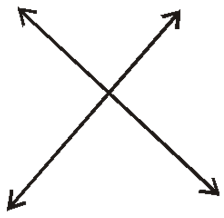
(A


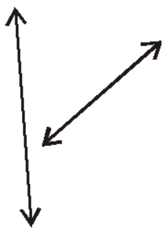
(B


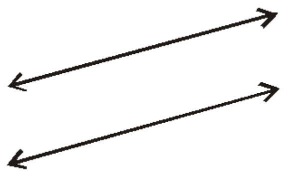
(C


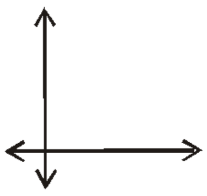
(D


.12 ان میں سے کون عمودی خطوط ہیں؟

(A


(B


(C


(D


آیئے نکات کو اکٹھا کریں

- جیومٹری دراصل اشکال کے خصوصیات اور پیمائشات کا علم دیتی ہے۔
- مستوی اور ایک ایسی سطح ہے اگر کوئی دو نقاط لیں، خطی قطعہ مکمل طور پر اس کے سطح میں بنتا ہے۔
- اگر ایک مستوی میں دو خطوط آپس میں کسی بھی نقطہ پر قطع نہیں کرتے ان کو متوازی خطوط کہتے ہیں۔
- اگر دو خطوط ایک مشترک نقطہ رکھتے ہیں، تب وہ قاطع خطوط کہلاتے ہیں۔
- دو شعاع ایک مشترک نقطہ پر جڑتی ہیں تب ایک زاویہ بنتا ہے۔
- اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90 ہو تب وہ اتمامی زاویے کہلاتے ہیں۔
- اگر دو زاویوں کا مجموعہ 180 ہو تب وہ تکمیلہ زاویے کہلاتے ہیں۔
- زاویے جن کے مشترکہ نقطہ ہو، اور مشترک راس ہو، مشترکہ بازو کے دونوں جانب بازو ہوں اس سے بننے والے زاویے متصلہ کہلاتے ہیں۔
- جب دو خطوط آپس میں قطع کرتے ہیں۔ جب نقطہ تقاطع پر بننے والے مقابل زاویے مقابل کے راسی زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویہ مستقیم کہلاتا ہے۔ اور یہ جوڑ خطی جوڑ کہلاتے ہیں۔
- متصلہ زاویوں کا جوڑ جس کا مجموعہ 180 ہو۔

سبق

4.2

متوازی خطوط

Parallel Lines

4.2.0 علمی مقاصد(Learning objectives)

اس باب کی تکمیل پر آپ قابل ہوں گے:

- متوازی خطوط کی شناخت اور فہم کے۔
- متبادلہ زاویے، اندرونی زاویے، بیرونی زاویے، نظیری زاویے وغیرہ عرضی قاطع خط جب دو متوازی خطوط کو دو مختلف مقامات پر قطع کرتی ہے، کو سمجھیں گے۔
- زاویوں کی خصوصیات کی بنا پر جو کہ عرضی قاطع خط کے متوازی خطوط کو قطع کرنے پر وجود میں آتے ہیں۔ ان پر مبنی سوالات حل کر سکیں گے۔

4.1.1 تعارف (Introduction)

آپ نے ریل کی پٹریوں کا مشاہدہ کیا ہوگا؟ یہ پٹری متوازی خطوط کو ظاہر کرتی ہے آپ اس کو ایک قاطع خط قطع کرتا ہے۔

ہم ان Sleepers کو کیا کہیں گے؟

شکل.1 ریلوے ٹریک

ہم روزمرہ زندگی میں سیڑھی کا استعمال کرتے ہیں۔

کیا آپ نے سیڑھی کے قدموں کا مشاہدہ کیا ہے؟
آپ ان قدموں کو کیا کہیں گے؟ پہلی شکل میں Sleepers
اور دوسری شکل میں قدم عرضی قاطع خط (Transversal)
کہلاتا ہے۔

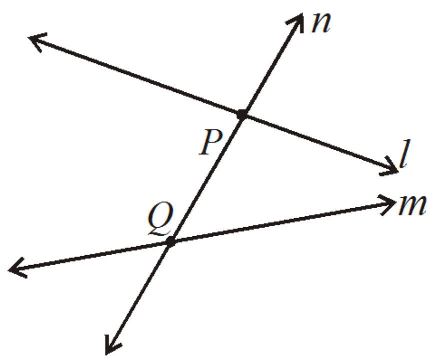
شکل 2. سیڑھی

ایک خط جو دو یا دو سے زیادہ خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے، عرضی قاطع خط کہلاتا ہے۔

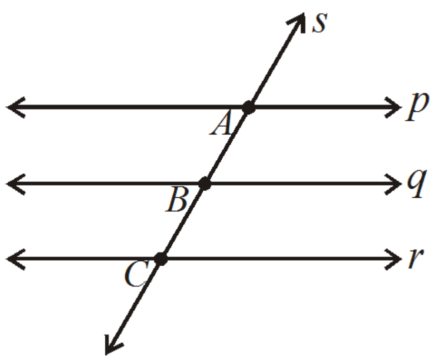
4.2.2 متوازی خطوط (Parallel lines)

1. عرضی قاطع خط (Transversal line)

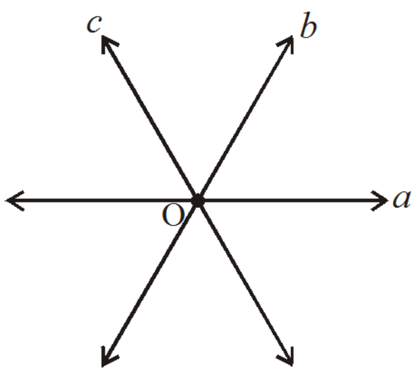
مندرجہ ذیل اشکال پر غور کیجئے۔



شکل 1.



شکل 2.



شکل 3.

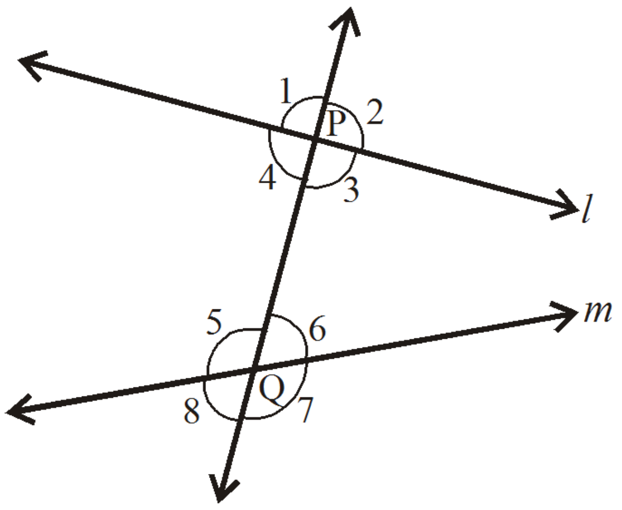
شکل (1)، میں دو خطوط l اور m دو مختلف نقاط پر خط n سے قطع ہوتے ہیں اس لئے l اور m پر n ایک عرضی قاطع خط ہے۔

شکل (2)، میں تین خطوط p اور 1 اور r کو خط s تین مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔ اس لئے خط s کو عرضی قاطع خط کہا جاتا ہے۔

شکل (3)، میں دو خطوط a اور b اور خط c سے قطع ہوتے ہیں، خط c کا نقطہ تقاطع خطوط a اور b کا بھی نقطہ تقاطع ہے۔ اس لئے یہ تین خطوط متقاطع خطوط ہیں۔ ان میں کوئی بھی عرضی قاطع خط نہیں ہے۔

2. عرضی قاطع خط سے بننے والے زاویے (Angles Fomed by a Transversal)

عرضی قاطع خط جب دو خطوط l اور m کو دو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے تب 8 زاویے تشکیل پاتے ہیں۔ اس طرح ہر قاطع نقطہ پر 4 زاویے تشکیل پاتے ہیں۔



اگر ہم شکل کا مشاہدہ کرتے ہیں، یہاں l اور m دو خطوط جو عرضی قاطع خط p پر قطع ہوتے ہیں تب $\angle 1, \angle 2, \angle 3,$ $\angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7$ اور $\angle 8$ تشکیل پاتے ہیں۔

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ اور $\angle 8$ بیرونی زاویے ہیں۔

$\angle 3, \angle 4, \angle 5$ اور $\angle 6$ اندرونی زاویے ہیں۔

$(\angle 1, \angle 5)$، $(\angle 2, \angle 6)$، $(\angle 4, \angle 8)$ اور $(\angle 3, \angle 7)$ یہ زاویوں کے جوڑ نظیری زاویے کہلاتے ہیں۔

ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ زاویے جو مختلف نقاط پر بنتے ہیں۔ یہ زاویے عرضی قاطع خط کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔ اور ان میں ایک زاویہ بیرونی جانب اور ایک اندرونی جانب واقع ہیں۔ نظیری زاویے کہلاتے ہیں۔

شکل کی رو سے $(\angle 3, \angle 5)$ اور $(\angle 4, \angle 6)$ متبادلہ بیرونی زاویے کہلاتے ہیں۔ جب ہم مختلف نقاط پر بننے والے زاویوں کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ یا متبادلہ داخلی زاویے کہلاتے ہیں۔

یہ زاویے خطوط l اور m کے اندرونی جانب بنتے ہیں۔ یہ عرضی قاطع خط کے متبادل جانب بنتے ہیں۔ ان زاویوں کو متبادلہ خارجی خاویے کہتے ہیں۔

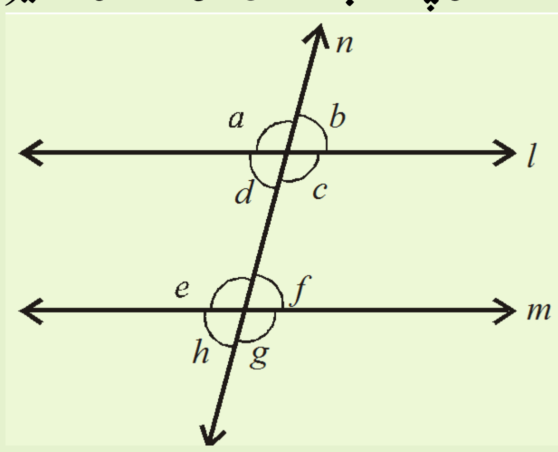
شکل کی رو سے $(\angle 2, \angle 8)$ اور $(\angle 1, \angle 7)$ متبادل اندرونی زاویے کہلاتے ہیں۔

اس طرح، $(\angle 2, \angle 8)$ اور $(\angle 1, \angle 7)$ متبادلہ خارجی زاویے کہلاتے ہیں۔

$(\angle 4, \angle 5)$ اور $(\angle 3, \angle 6)$ عرضی قاطع خط کے کے ایک ہی جانب واقع ہیں۔

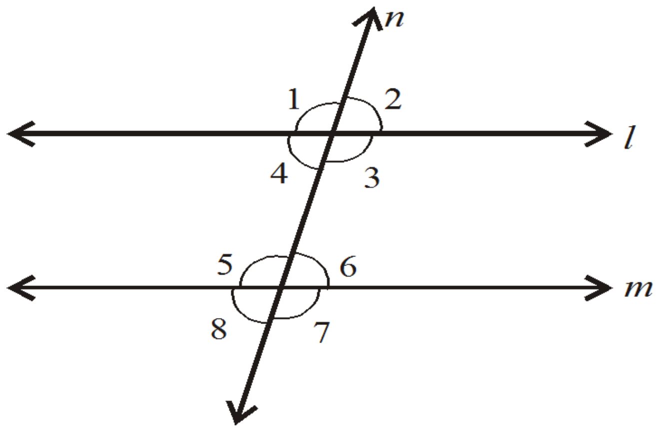
اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے

1. متصلہ شکل پر غور کیجئے اور ان میں اندرونی اور بیرونی زاویوں کو لکھئے۔



4.2.3 متوازی خطوط پر عرضی قاطع خط

متصلہ شکل میں 'l' اور 'm' دو متوازی خطوط اور 'n' ایک عرضی قاطع خط ہے جو دو مختلف نقاط پر قطع کرتی ہے۔



نظیرے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

$\angle 1 = \angle 5, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7, \angle 4 = \angle 8$

خارجی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں

$\angle 1 = \angle 7, \angle 2 = \angle 8$

داخلی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں

$\angle 4 = \angle 6, \angle 3 = \angle 5$

$\angle 1 = \angle 3$ ، $\angle 2 = \angle 4$ ، $\angle 5 = \angle 7$ اور $\angle 6 = \angle 8$

Co-interior angles are supplementary

$\angle 4 + \angle 5 = 180^0$ اور $\angle 3 + \angle 6 = 180^0$

Conversely

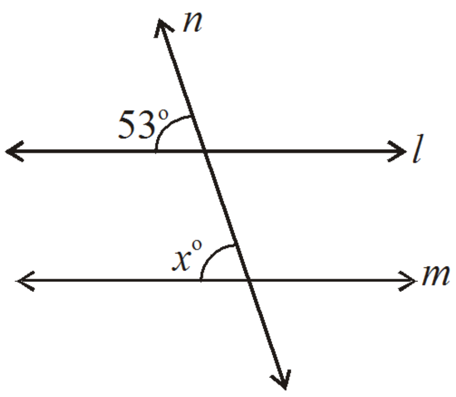
اگر متوازی خطوط کے جوڑ عرضی قاطع خط سے قطع ہوتے ہیں تب عرضی قاطع خط کے ایک ہی جانب بننے والے داخلی زاویے تکمیلی ہوتے ہیں۔ اس طرح اگر کوئی عرضی قاطع خط دو خطوط کو قطع کرتا ہو اور ان کے نظیرے زاویوں کے جوڑ مساوی ہوں تب وہ دو خطوط آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔

مثال-1 :

متصلہ شکل میں l ، m دو متوازی خطوط ہیں۔

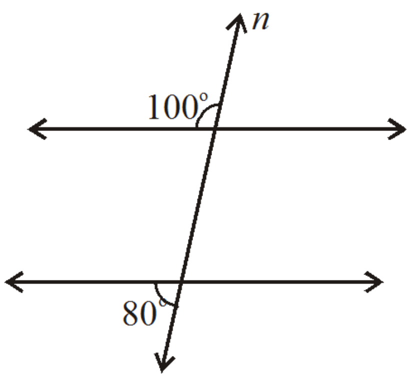
'n' ایک عرضی قاطع خط ہے۔

تب زاویہ 'x' معلوم کیجئے۔

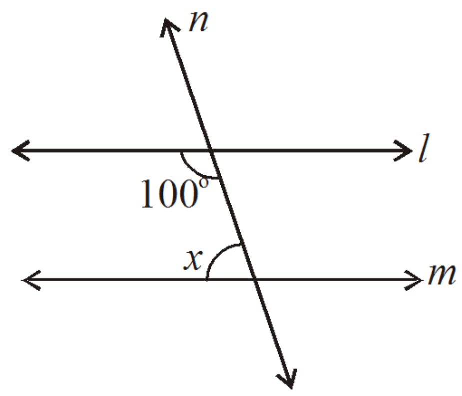


حل:

$\angle S = 53^0$ یہ نظیرے زاویے ہیں۔



مثال-2 :



متصلہ شکل میں اگر $l \parallel m$ ، 'n' ایک عرضی قاطع خط ہے تب زاویہ 'x' معلوم کیجئے۔

حل :

$l \parallel m$ اور n عرضی قاطع خط ہے۔

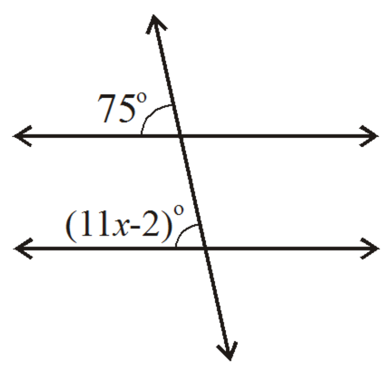
ایک جانب کی زاویوں کے جوڑ تکمیلہ زاویہ بناتے ہیں۔

$\therefore \quad 100^0 + x^0 = 180^0$

$x = 180 - 100$

$\boxed{x = 80^0} \quad \Rightarrow \quad \angle x = 80^0$

مثال-3 :



متصلہ شکل میں،
$l \parallel m$ اور 'n' ایک عرضی قاطع خط ہے
تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

حل :

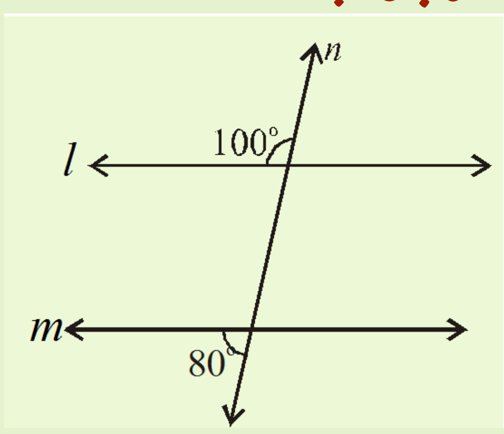
$l \parallel m$ ، n ایک عرضی قاطع خط ہے تب نظیرے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

$\therefore \quad 75 = 11x - 2$

$75 + 2 = 11x \quad \Rightarrow \quad 11x = 77^0$

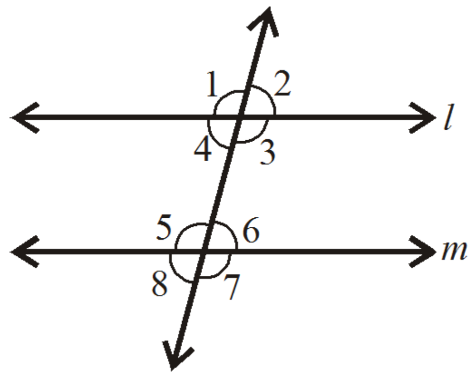
$\Rightarrow x = \frac{77^\circ}{11} = 7^\circ.$

اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے۔

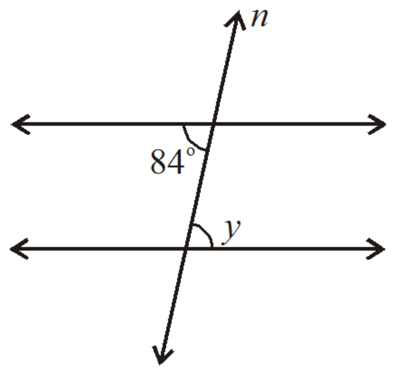
1. 

کیا l اور m متوازی ہیں؟

.2 متصلہ شکل میں $l \parallel m$ ، اور n ایک عرضی قاطع خط ہے۔
اگر $\angle 2 = 75^0$ تب تمام زاویے معلوم کیجئے۔

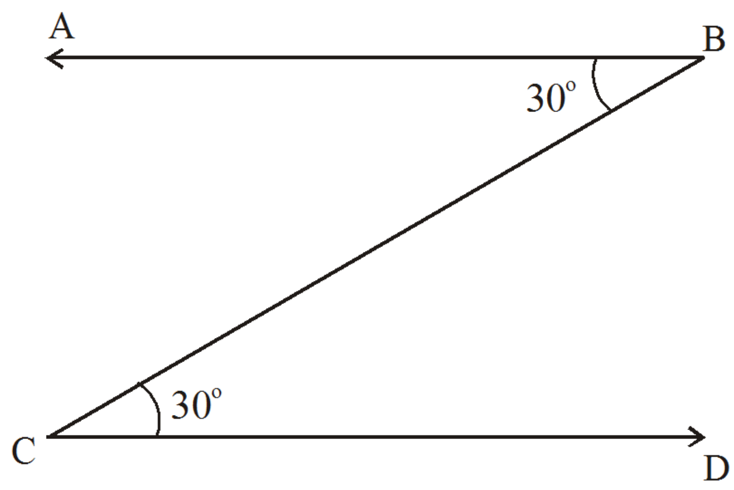


.3 اگر $l \parallel m$ ، اور n ایک عرضی قاطع خط ہے
تب زاویہ y معلوم کیجئے۔

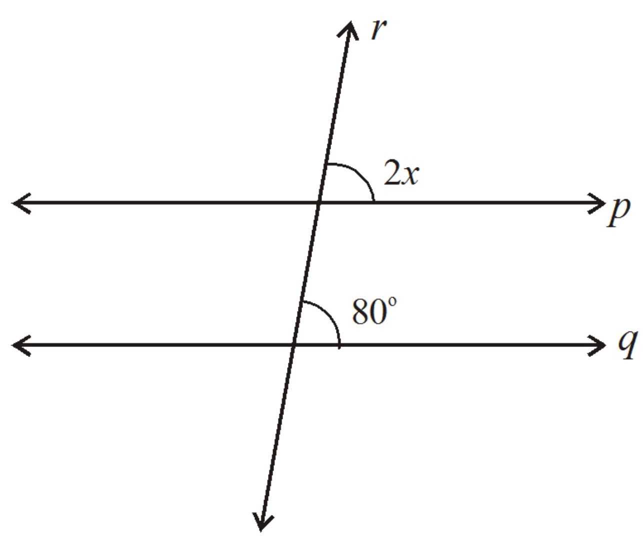


مشق

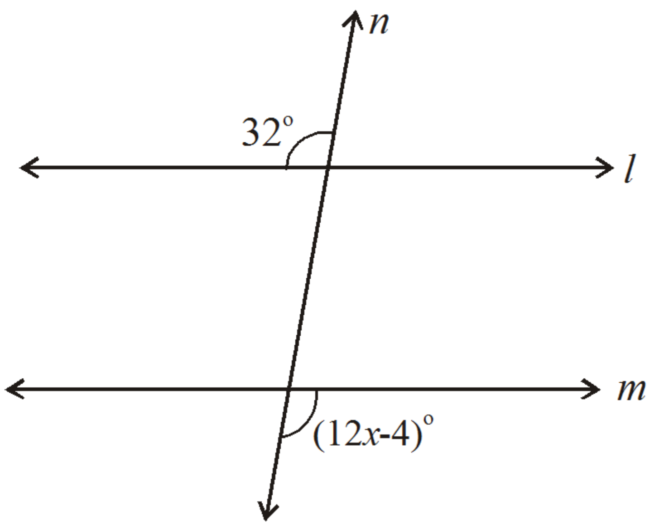
.1 متصلہ شکل میں
، کیا AB اور CD متوازی ہیں؟ کیوں؟



.2 متصلہ شکل میں، اگر
$p \parallel q$ ، اور r ایک عرضی قاطع خط ہے
تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

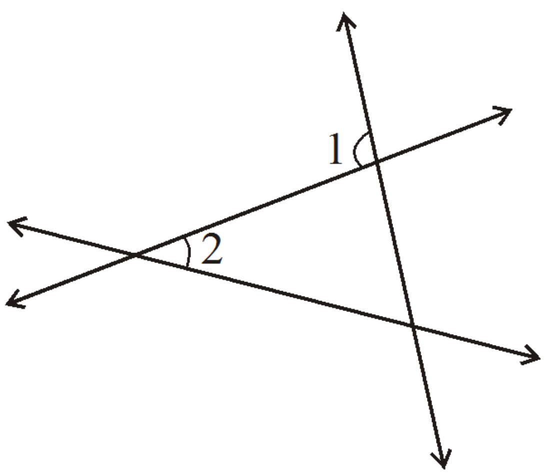


.3 متصلہ شکل میں،
$l \parallel m$ ‘ اور n ایک عرضی قاطع خط ہے‘
تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

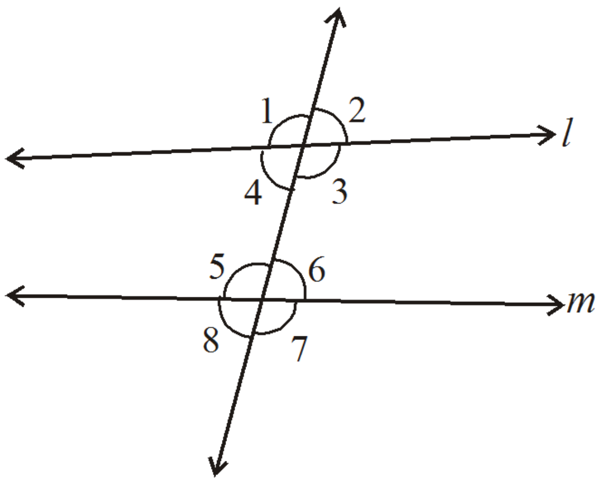


.4 اگر ایک عرضی قاطع خط تین خطوط کو مختلف مقامات پر قطع کرتا ہے تب کتنے زاویے بنتے ہیں؟ شکل بنائیے۔

.5 متصلہ شکل میں زاویوں کے نام بتائیے۔



.6 دی گئی شکل پر غور کرتے ہوئے جوڑ لگائیے۔



(i)	داخلی متبادلہ زاویے	[ ]	(A ($\angle 3, \angle 6$)
(ii)	نظیری زاویے	[ ]	(B ($\angle 1, \angle 7$)
(iii)	خارجی متبادلہ زاویے	[ ]	(C ($\angle 2, \angle 6$)
(iv)	ایک جانب بننے والے زاویوں کے جوڑ	[ ]	(D ($\angle 3, \angle 5$)

آیئے نکات کو اکٹھا کریں

- ایک خط جو دو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے عرضی قاطع خط کہلاتا ہے۔
- اگر دو متوازی خطوط ایک عرضی قاطع خط سے قطع ہوتے ہیں تب:

- نظیری زاویے مساوی ہوتے ہیں
- داخلی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- خارجی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- ایک ہی جانب بننے والے زاویوں کا مجموعہ 180 یا تکمیلہ زاویہ ہوتا ہے۔
- اس کے برخلاف، اگر کوئی عرضی قاطع خط دو خطوط کو قطع کرتا ہو تب

  نظیری زاویوں کی جوڑ مساوی ہوتی ہے (یا)

  متبادلہ زاویوں کی جوڑ مساوی ہوتی ہے (یا)

  خط کے ایک ہی جانب داخلی یا خارجی تکمیلہ زاویہ بناتے ہیں۔

  تب وہ خطوط آپس میں متوازی ہوتے ہیں۔

سبق 4.3

مثلثات
Triangles

4.3.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوگا ثابت کریں گے۔
- مثلث کے دو اندرونی (داخلی) زاویوں کا مجموعہ اس کے بیرونی (خارجی) زاویہ کے مساوی ہونے کی تصدیق کریں گے۔
- مثلث کے دو مقابل کے زاویئے جن کے اضلاع مساوی ہوں، مساوی ہوں گے کی تصدیق کریں گے۔(اور اس کے برعکس)
- مثلث کی نابرابری (نامساوات/عدم مساوات) کی تصدیق کریں گے۔
- مثلث کی خصوصیات پر مبنی سوالات حل کریں گے۔

4.3.1 تعارف

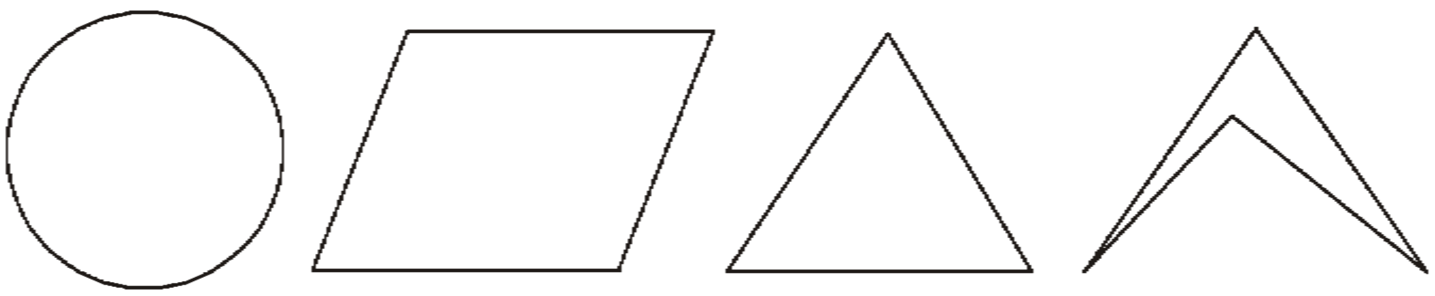
جیومٹری میں اشکال کی خصوصیات اور ان کی پیائشیات کا مطالعہ بھی شامل ہوتا ہے۔قدیم زمانے میں جیومٹری مکانات کی تعمیرات جیسے عملی مقاصد کے لئے مرتب کی گئی تھی۔

ہمارے ماحول میں پائی جانے والی اشیاء جن کا ہم روزمرّہ مشاہدہ کرتے ہیں پر جیومٹریائی نظریات کا گہرا اثر پڑتا ہے۔ گاڑیاں، جیسے سیکل، کار، موٹر بائیک، بس، لاری وغیرہ جیومٹریائی اشکال ہی کی مدد سے بنائی گئی ہیں۔

اس باب میں ہم جیومٹریائی تصور 'مثلثات' کے بارے میں سیکھیں گے۔

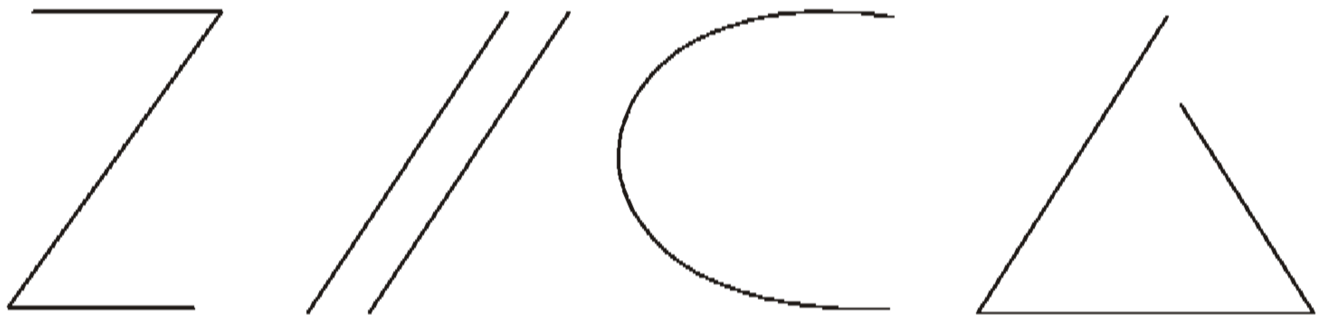
4.3.2 مثلث، اس کی خصوصیات

ایک جیومٹریہ شکل خطوط مستقیم یا خطوط منحنی سے گھری ہوئی ہوتی ہے۔بعض اوقات یہ دونوں خطوط مستقیم اور خطوط منحنی پر مشتمل ہوتی ہے۔کوئی بھی جیومٹریہ شکل یا تو بند ہوتی ہے یا کھلی ہوتی ہے۔



(i) (ii) (iii) (iv)

بند جیومٹریہ اشکال



(v) (vi) (vii) (viii)

کھلی جیومٹریہ اشکال

شکل 4.3.1

مندرجہ بالا اشکال میں مثلث کونسا ہے۔

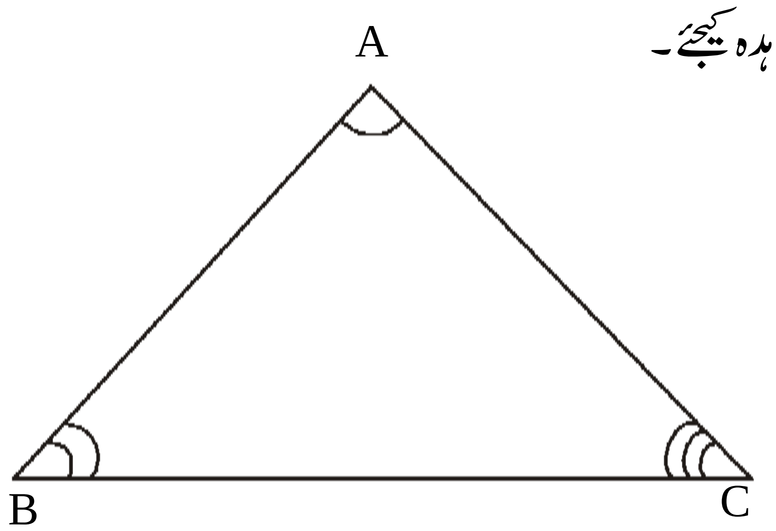
شکل (iii) مثلث ہے۔ ہم صرف شکل (iii) کو ہی مثلث کیوں مانتے ہیں۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کے اس میں تین خطی قطعات ہیں اور یہ ایک بند شکل ہے۔

اس طرح مثلث کیا ہے؟

تین خطی قطعوں سے گھیری ہوئی سادہ بند شکل مثلث کہلاتی ہے۔

حسب ذیل شکل کا مشاہدہ کیجئے۔



(i) مندرجہ بالا شکل، بند شکل ہے۔

(ii) یہ تین خطی قطعات سے گھیری ہوئی ہے۔ یعنی $\overline{AB}$ یا $\overline{BA}$ ، $\overline{BC}$ یا $\overline{CB}$ اور $\overline{AC}$ یا $\overline{CA}$

یہ اضلاع (ضلعے) کہلاتے ہیں۔

(iii) جیسا کہ یہ $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ سے گھیری ہوئی ہے تب یہاں تین زاویہ بنتے ہیں وہ اس طرح ہیں

$\angle CAB$ یا $\angle BAC$ یا $\angle A$

$\angle CBA$ یا $\angle ABC$ یا $\angle B$

$\angle BCA$ یا $\angle ACB$ یا $\angle C$

مندرجہ بالا مثلث کو ہم کس طرح تعبیر کریں گے۔ اس کو ΔABC یا ΔBCA یا ΔCAB سے تعبیر کریں گے۔

اس طرح ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ΔABC میں

5 ضلعے : $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$

5 زاویے: $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ ، $\angle BCA$ ← 6 عناصر

3 راس : A ، B ، C

آیئے اب ہم مثلثات کے بارے میں مزید معلومات حاصل کریں گے۔

راس 'A' کے مقابل کا ضلع کونسا ہے؟ راس 'A' کے مقابل کا ضلع $\overline{BC}$ ہے۔

اسی طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ راس 'B' اور راس 'C' کے مقابل ضلعے بالترتیب CA اور AB ہوں گے۔

کیا آپ ضلع BC کے مقابل کے زاویہ کا نام بتا سکتے ہیں۔

ضلع BC کے مقابل کے زاویہ کا نام $\angle BAC$ یا $\angle A$ ہے۔

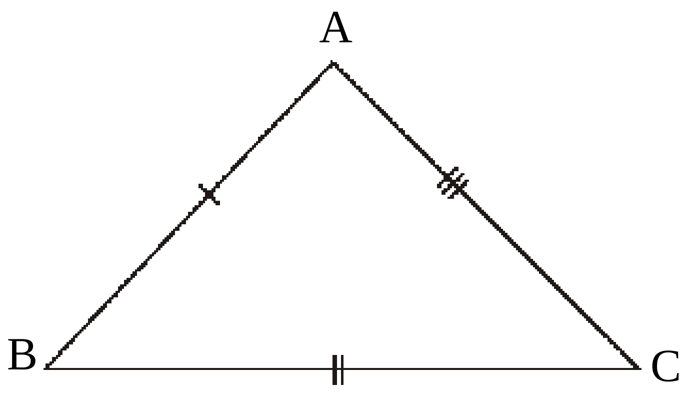
اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ $\angle B$ اور $\angle C$ بالترتیب اضلاع CA اور AB کے مقابل کے زاویے ہوں گے۔

کیا ہم مثلثات کی درجہ بندی کر سکتے ہیں؟ اگر ایسا ممکن ہے تب درجہ بندی کس طرح کریں گے؟ آیئے اب ہم مثلثات کی اقسام جاننے کی کوشش کریں گے۔

4.3.3 مثلثات کی اقسام

مثلثات کو دو طریقوں سے درجہ بند کیا جاسکتا ہے۔

I. بلحاظِ اضلاع (اضلاع کی بنیاد پر)



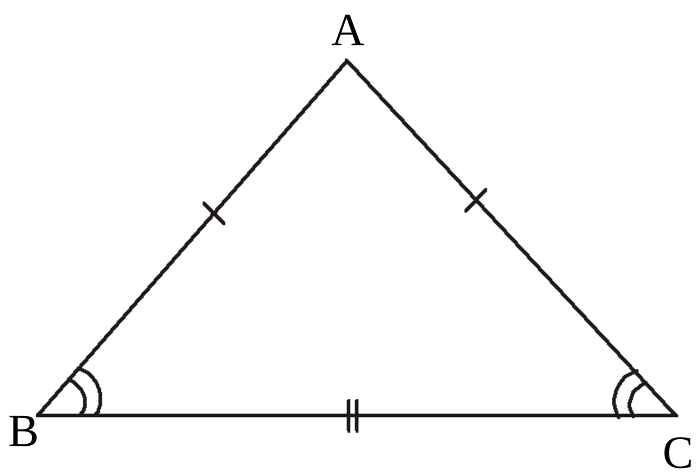
(i) **مختلف اضلاع مثلث:** ایک مثلث جس کے تمام اضلاع کے طول مختلف ہوں مختلف الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔

(ii) **مساوی الساقین مثلث:** ایک مثلث جس کے کوئی دو ضلعے مساوی ہوں مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے۔

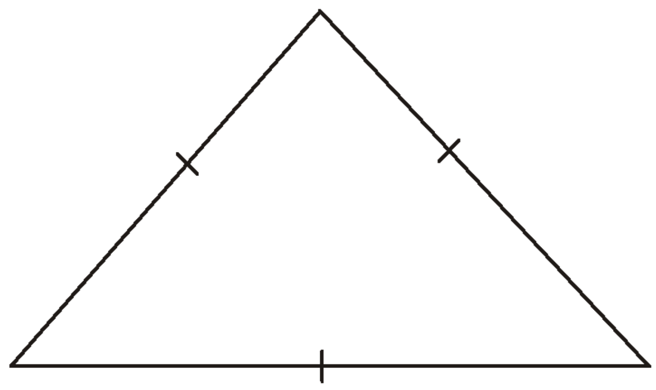
- BC ← قاعدہ
- $\angle B$ ، $\angle C$ ← قاعدہ کے زاویے
- $\angle A$ ← راس کا زاویہ

$AB = AC$

$\angle B = \angle C$



(iii) **مساوی الاضلاع مثلث:** ایسا مثلث جس کے تمام تینوں ضلعے مساوی ہوں مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔



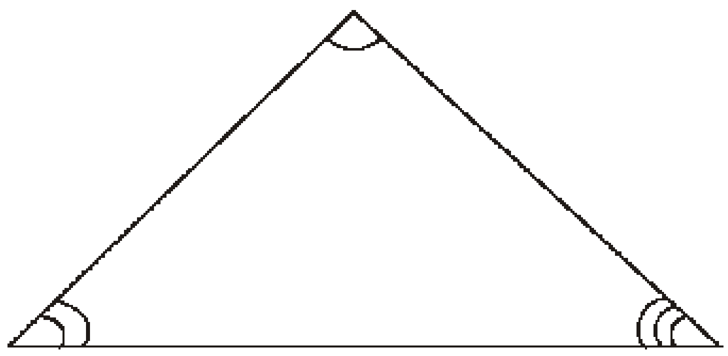
[نوٹ کیجئے کہ اضلاع کے مساوی ہونے کی نشاندہی کیجئے۔

$PQ = QR = PR$

$\angle P = \angle Q = \angle R = 60^o$

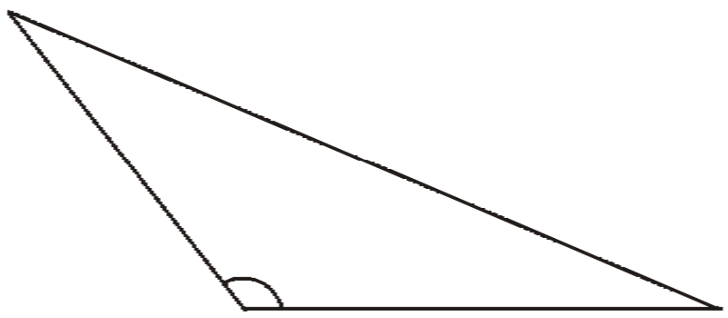
II. بلحاظ زاویہ (زاویوں کی بنیاد پر)

(i) **حادہ زاویائی مثلث:** ایسا مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ زاویے ہوں حادہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔



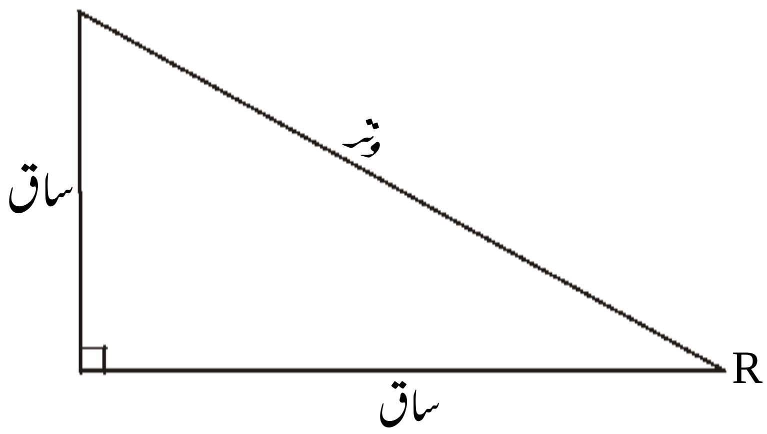
[ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle A$ ، $\angle B$ اور $\angle C$ ہر ایک 90^o سے چھوٹے ہیں]

(ii) **منفرجہ زاویائی مثلث:** ایسا مثلث جس کا کوئی ایک زاویہ منفرجہ زاویہ ہو منفرجہ زاویائی مثلث کہلاتا ہے۔



[ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle Y$ ، 90^o سے بڑا ہے]

(iii) **قائم الزاویہ مثلث:** ایسا مثلث جس کا کوئی ایک زاویہ قائمہ زاویہ ہو قائم الزاویہ مثلث کہلاتا ہے۔



[ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle Q = 90^o$]

- زاویہ قائمہ کے مقابل کا ضلع وتر کہلاتا ہے۔
- دوسرے دو ضلعے ساق یا عمود وار ضلعے کہلاتے ہیں

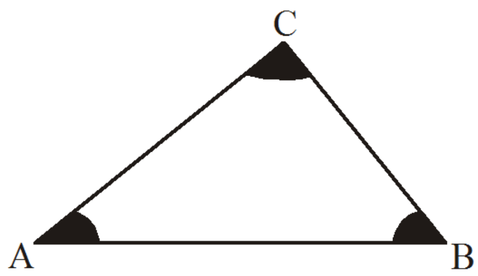
اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. ΔPQR کے چھ عناصر (یعنی 3 ضلع اور 3 زاویے) لکھئے۔
2. ΔABC میں راس 'B' کے مقابل کے ضلع کا نام لکھئے۔
3. ΔRAT میں ضلع RT کے مقابل کے راس کا نام لکھئے۔
4. اگر ایک مثلث کے اضلاع کے طول 8 سمر، 5 سمر اور 8 سمر ہیں تب یہ کس قسم کا مثلث ہے۔

آیئے اب ہم مثلث کے چند اہم خصوصیات کی جانچ کریں گے۔

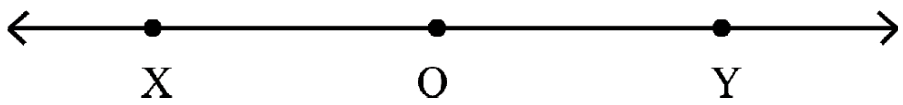
4.3.4 مثلث کے زاویوں کا مجموعہ والی خاصیت

ایک سفید کاغذ پر ایک مثلث AB کھینچئے کلر پنسلز کی مدد سے زاویوں کی نشاندہی کیجئے جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔

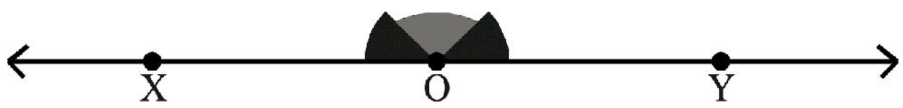


قینچی کی مدد سے تینوں زاوی خطوں کو کاٹ لیجئے۔

ایک خطی قطع XY کھینچئے اور نقطہ 'O' کی نشاندہی کیجئے۔



کاٹے گئے تینوں زاویائی خطوں کو نقطہ 'O' پر ایک بازو ایک اس طرح جمایئے کہ زاویہ تشکیل پائے۔ جیسا کہ حسب ذیل شکل میں بتلایا گیا ہے۔



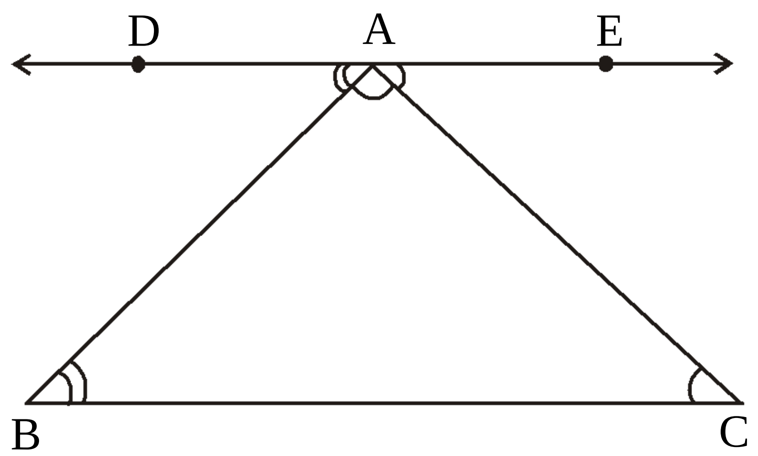
آپ یہ معلوم کریں گے کہ یہ تینوں زاویہ مل کر زاویہ مستقیم تشکیل دیتے ہیں۔ اس طرح ایک مثلث کے زاویوں کی پیائش کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

آیئے اب ہم اسکو ایک مسئلہ کی طرح ثابت کریں گے۔

مسئلہ 1: ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے۔

دیا گیا ہے : ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب : $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$



بناوٹ: ایک خطی قطع DE‘ BC کے متوازی کھینچئے۔

اب AB ایک قاطع خطہ ہے۔

$\therefore$ $\angle B = \angle DAB$ [$\because$ متبادلہ زاویوں کے جوڑ)

$\angle C = \angle EAC$ [$\because$ متبادلہ زاویوں کے جوڑ)

دیا گیا ہے $\angle B + \angle C = \angle DAB + \angle EAC$ ...... (1)

مساوات کے دونوں جانب $\angle A$ کو ملانے پر

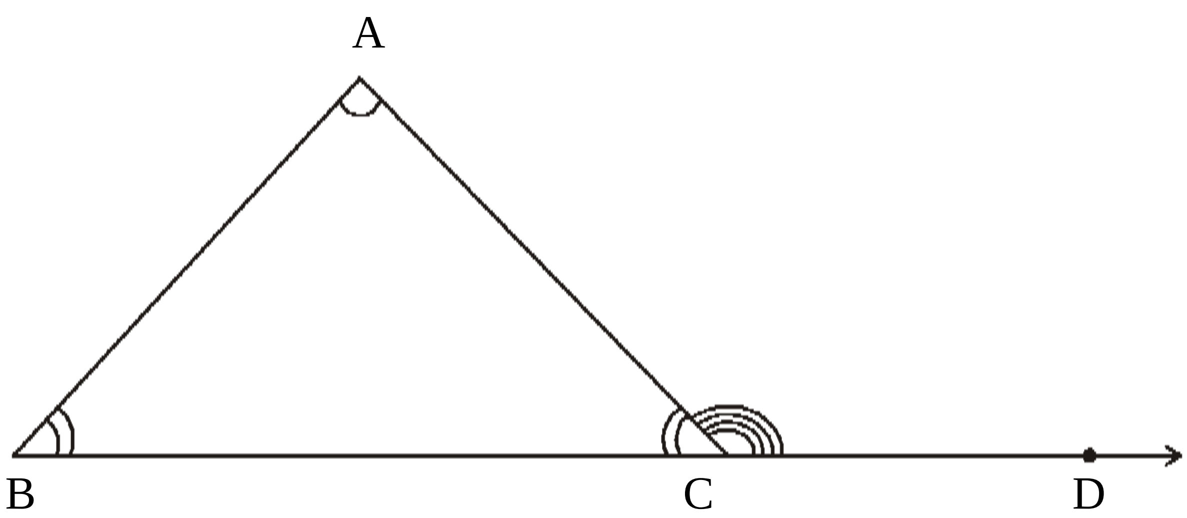
$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle DAB + \angle EAC = 180^{o}$ (زاویہ مستقیم 180^{o} ہے)

لہٰذا ثابت ہوا۔

4.3.5 بیرونی زاویے (خارجی زاویے)

مشغلہ - 2

آیئے اب ہم ایک مثلث ABC کھینچیں گے اور اس کے ایک ضلع کو بڑھائیں گے (خارج کریں گے) BC کو بڑھایا گیا جیسا کہ شکل سے ظاہر ہے۔ مشاہدہ کیجئے کہ نقطہ 'C' پر ایک زاویہ ACD تشکیل پاتا ہے۔



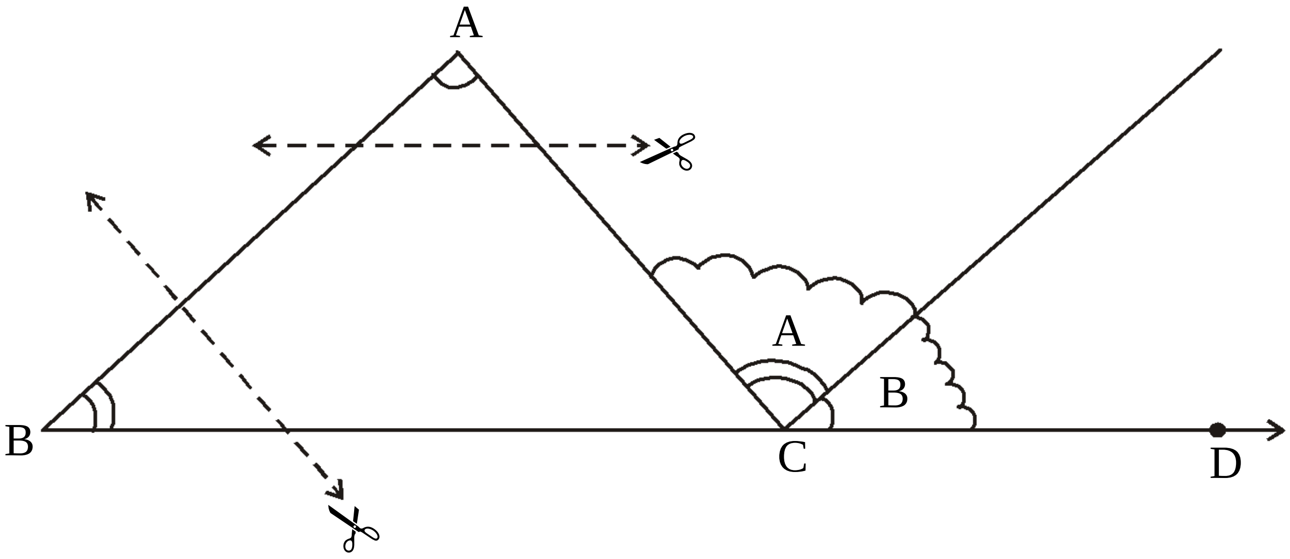
$\angle ACD$ کہاں واقع ہے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle ACD$ مثلث ABC کے بیرون واقع ہے۔ آپ $\angle ACD$ کو کیا کہیں گے؟ $\angle ACD$ کو ΔABC کا بیرونی زاویہ (خارجی زاویہ) کہتے ہیں۔ جو راس 'C' پر بنتا ہے۔

اب آپ $\angle BCA$ کے بارے میں کیا کہیں گے؟ $\angle BCA$ جو $\angle ACD$ کے متصل ہے۔

جب کہ $\angle A$ ، $\angle B$ ‘ $\angle ACD$ کے اندرونی (داخلی) مقابل کے زوایہ کہلاتے ہیں۔

کیا آپ $\angle ACD$ ‘ $\angle A$ اور $\angle B$ کے درمیان رشتہ کو ایک آسان مشغلہ کو انجام دیتے ہوئے قائم کر سکتے ہیں۔

اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو کاٹ لیں اور ان کو ایک دوسرے کے متصل اس طرح رکھیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔



کیا وہ ایک ساتھ مکمل طور پر $\angle ACD$ کا احاطہ کرتے ہیں۔

ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ $\angle ACD = \angle A + \angle B$

آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔

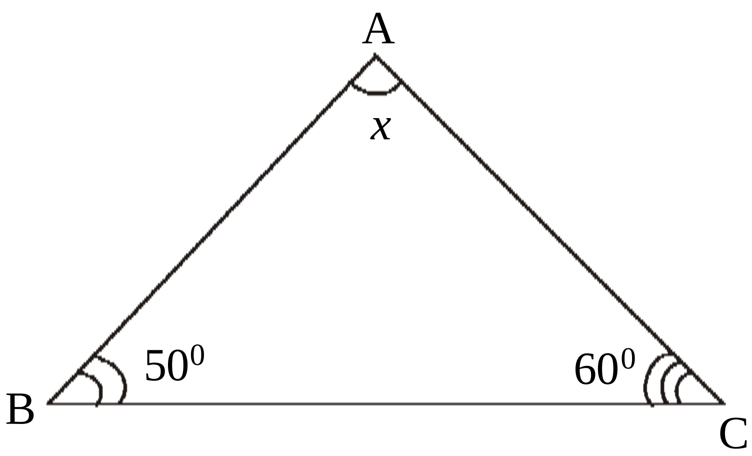
ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں جو حسب ذیل ہے

مثلث کا بیرونی زاویہ اس کے مقابل کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

یہ مثلث کے بیرونی زاویہ کی خاصیت کہلاتی ہے۔

آیئے اب ہم چند مثالوں پر بحث کریں گے۔

مثال-1 : حسب ذیل شکل میں x کی قدر معلوم کیجئے۔



حل: دیا گیا ہے کہ $\angle C = 60^0$ ، $\angle B = 50^0$ ، $\angle A = x$

مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے

$$\angle B + \angle B + \angle C = 180^0$$

$$\Rightarrow x + 50^0 + 60^0 = 180^0$$

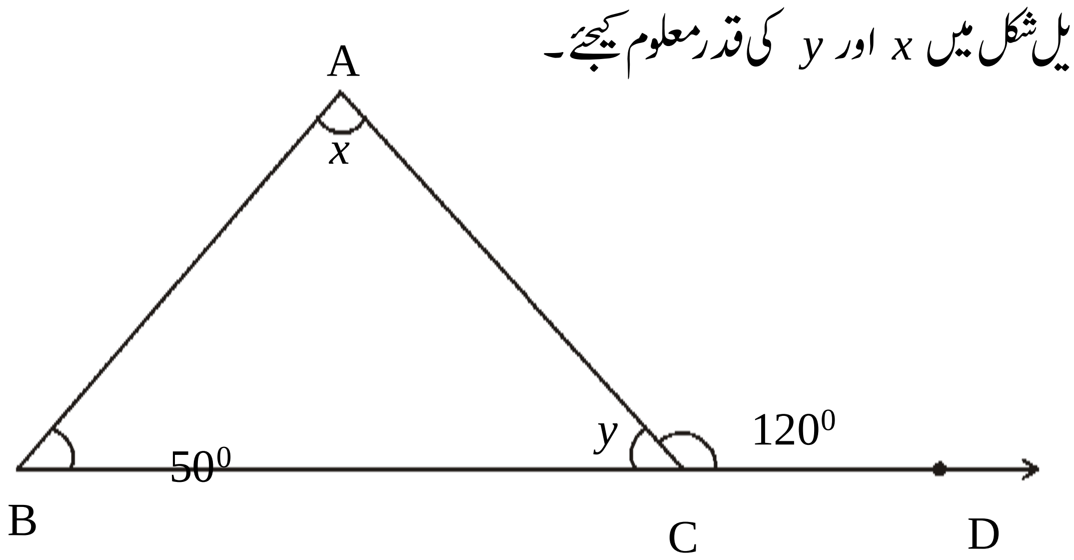
$$\Rightarrow x + 110^0 = 180^0$$

$$\therefore x = 180^0 - 110^0$$

$$= 70^0$$

لہٰذا $\boxed{x = 70^0}$

مثال-2 : حسب ذیل شکل میں x اور y کی قدر معلوم کیجئے۔



حل: ΔABC دیا گیا ہے کہ

$\angle A = x$ ، $\angle B = 50^0$ ، $\angle C = y$

$\angle ACD = 120^0$

مثلث کے زاویوں کے مجموعہ کی خصوصیات کے استعمال سے

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$x + y = 180^0 - 50^0$

$\Rightarrow x + 50^0 + y = 180^0$ [$\because 50^0$ کو مساوات

$\Rightarrow x + y = 130^0$ کی دوسری جانب لانے پر]

اب ہمارے پاس $\angle C + \angle ACD = 180^0$ [خطی جوڑ کے اُصول کی رو سے]

$\Rightarrow y + 120^0 = 180^0$ [120^0 کو دوسری جانب

$\Rightarrow y = 180^0 - 120^0 = 60^0$ لانے پر]

(1) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $x = 130^0 - y$

$= 130^0 - 60^0$ [$y = 60^0$ رکھنے پر]

لہٰذا $x = 70^0$

$y = 60^0$

مثال-3 : مثلث کے دو زاویے 30^0 اور 80^0 ہیں تیسرا زاویہ معلوم کیجئے۔

حل: ΔABC دیا گیا ہے کہ

مان لیجئے کہ $\angle A = 30^0$

$\angle B = 80^0$

$\angle C = x$

زاویہ مجموعہ خاصیت کی رو سے

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

$$\Rightarrow 30 + 80 = 180^0$$

$$110^0 + x = 180^0$$ [110^0 کو RHS مستقل کرنے پر]

$$\therefore x = 180^0 - 110^0$$

$$= 70^0$$

تیسرا زاویہ $= 70^0$

مثال-4 : ایک مثلث کے دو زاویے 2:3:4 کی نسبت میں ہے۔ زاویے معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ مثلث کے زاویے 2:3:4 کی نسبت میں ہیں۔ زاویوں کی نسبت کا مجموعہ $= 4 + 3 + 2 = 9$

اس لئے پہلا زاویہ $= \frac{2}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 40^0$

دوسرا زاویہ $= \frac{3}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 60^0$

تیسرا زاویہ $= \frac{4}{\cancel{9}_1} \times \cancel{180^0}^{20^0} = 80^0$

مثلث کے زاویے 80^0 اور 60^0، 40^0 ہیں۔

مثال-5 : ایک مثلث ABC کا ایک زاویہ 50^0 اور بقیہ دو زاویے مساوی ہیں تب اس کا ہر ایک زاویہ معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ $\angle A = 50^0$

اور $\angle B = \angle C = x^0$

زاویہ – مجموعہ خاصیت کی رو سے

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

$$50^0 = x^0 + x^0 = 180^0$$

$$50^0 + x^0 = 180^0$$

$$2x^0 = 180^0 - 50^0$$ [50^0 کو RHS میں منتقل کرنے پر]

$$2x^0 = 130^0$$

$$\frac{130^0}{2} = 65^0$$ [دونوں جانب 2 سے تقسیم کرنے پر]

لہٰذا $\angle B = \angle C = 65^0$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

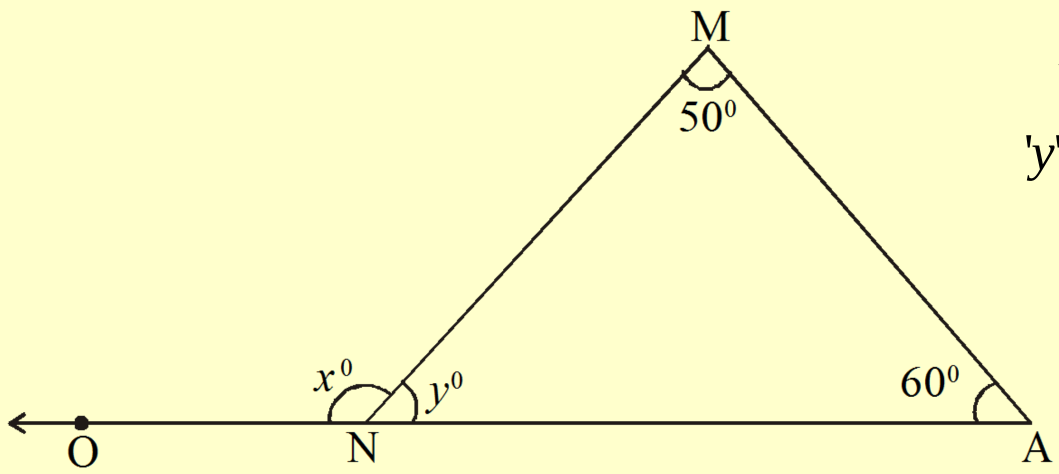
.1 اگر ایک مثلث کے دو زاوئیے 38^o اور 102^o ہوں تب تیسرا زاویہ معلوم کیجئے۔

.2 اگر ایک قائم الزاویہ مثلث میں ایک حادہ زاویہ 30^o ہے تب دوسرا حادہ زاویہ معلوم کیجئے۔

.3 اگر ایک مثلث کے زاوئیے 1:4:5 کی نسبت میں ہوں تب اس مثلث کے زاوئیے معلوم کیجئے۔

.4 راجندر کہتا ہے کہ ''ایک مثلث میں دو قائمہ زاوئیے ہوسکتے ہیں۔'' کیا آپ اس سے متفق ہیں؟ اپنے جواب کے لئے جواز پیش کریں۔

.5 حسب ذیل میں 'x' اور 'y' کی قدریں معلوم کریں۔



آیئے ہم مزید چند مثالوں پر بحث کریں گے۔

مثال-6 : ایک مثلث کا بیرونی زاویہ 70^o ہے اور اس کا ایک اندرونی زاویہ 25^o ہے۔ اس مثلث کا اندرونی مقابل کا زاویہ معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے۔ بیرونی زاویہ = 70^o

اس کا ایک اندرونی زاویہ = 25^o

بیرونی زاویہ کی خاصیت کی رو سے

اندرونی مقابل کے زاویوں کا مجموعہ = بیرونی زاویہ

$\Rightarrow 70^0 = 25^0 + x^0$

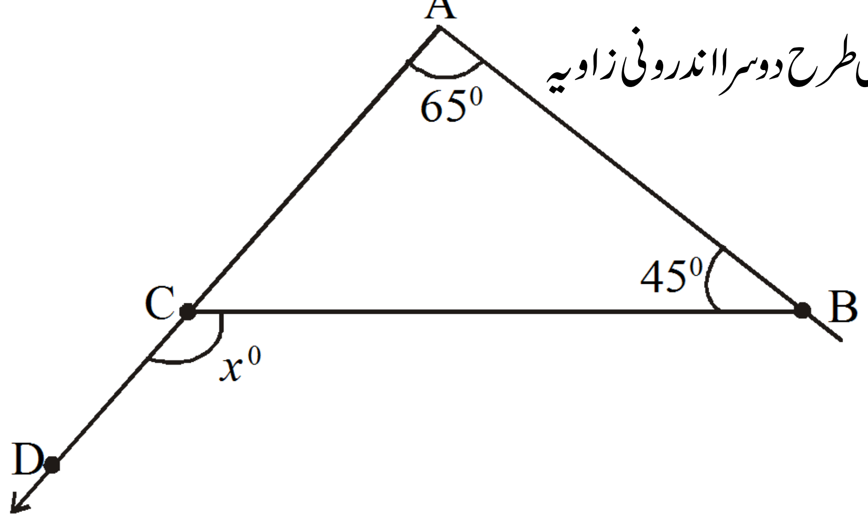
$\Rightarrow x^0 + 25^0 = 70^0$ [25^o کو RHS منتقل کرنے پر]

$x^0 = 70^0 - 25^0 = 45^0$

اس طرح دوسرا اندرونی زاویہ = 45^0

مثال-7 : حسب ذیل شکل میں 'x' کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے۔ بیرونی زاویہ = 70^o



حل: ΔABC میں دیا گیا ہے کہ

$\angle A = 65^0, \angle B = 45^0, \angle BCD = x$

مثلثات کی بیرونی زاویہ کی خاصیت کی رو سے

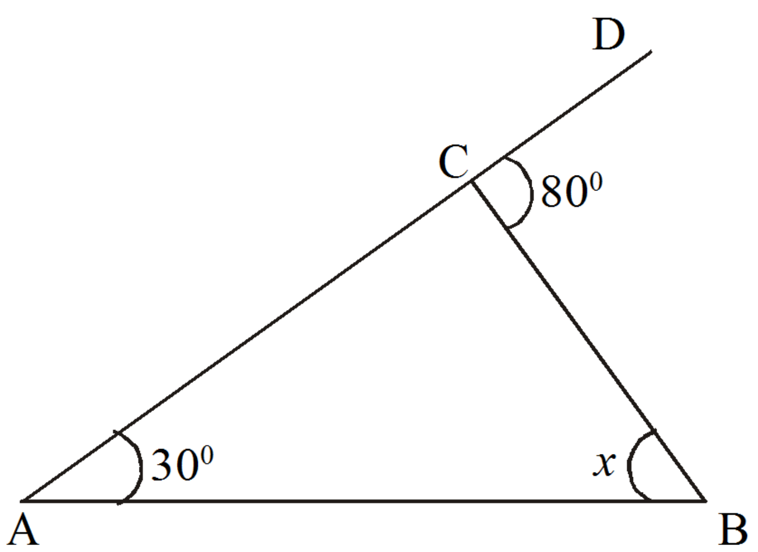
$\Rightarrow \angle BCD = \angle A + \angle B$

$\Rightarrow x^o = 65^0 + 45^0$

$= 110^0$

اس طرح $\boxed{x = 110^0}$

مثال-8 : دی گئی شکل میں x کی قدر معلوم کیجئے۔



حل: دی گئی شکل کی مدد سے ایک اندرونی زاویہ = 30^0

دوسرا اندرونی زاویہ = x

بیرونی زاویہ = 80^0

مثلثات کی بیرونی زاویہ کی خاصیت کی رو سے

مقابل کے اندرون زاویوں کا مجموعہ = بیرون زاویہ

$\Rightarrow 80^0 = 30^0 + x$

$\Rightarrow x + 30^0 = 80^0$

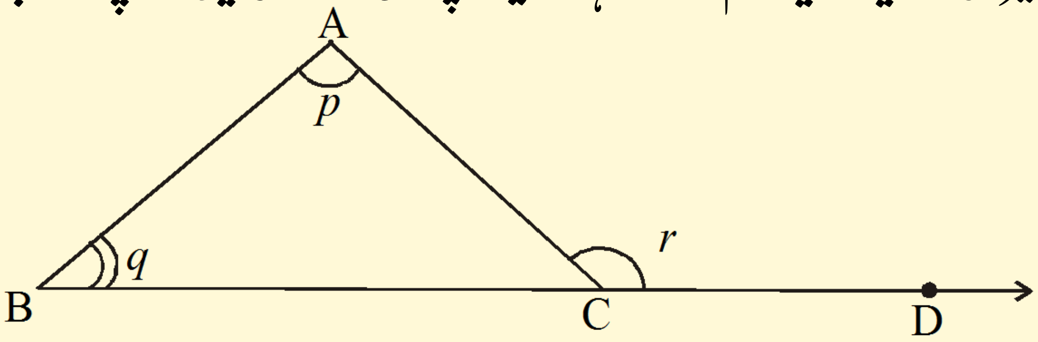
$\Rightarrow x = 80^0 - 30^0$ [30^0 کو RHS منتقل کرنے پر]

$= 50^0$

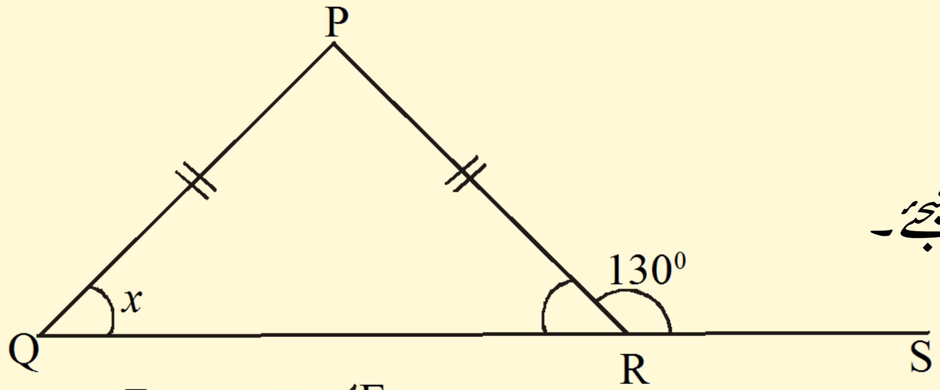
اس طرح $\boxed{x = 50^0}$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

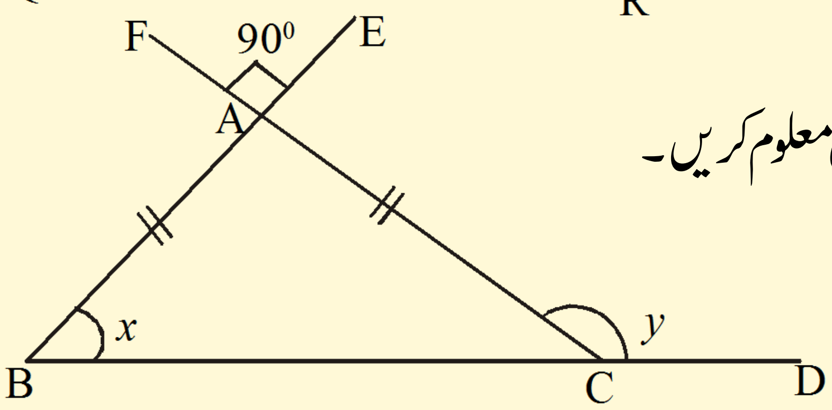
1. دتّو کہتا ہے کہ ''ایک مثلث کا بیرونی زاویہ، زاویہ مستقیم ہوسکتا ہے''۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجئے۔



2. دی گئی شکل میں 'p'، 'q' اور 'r' کے مابین رشتہ بیان کیجئے۔



3. دی گئی شکل میں 'x' کی قدر معلوم کیجئے۔



4. دی گئی شکلوں میں 'x' اور 'y' کی قدریں معلوم کریں۔

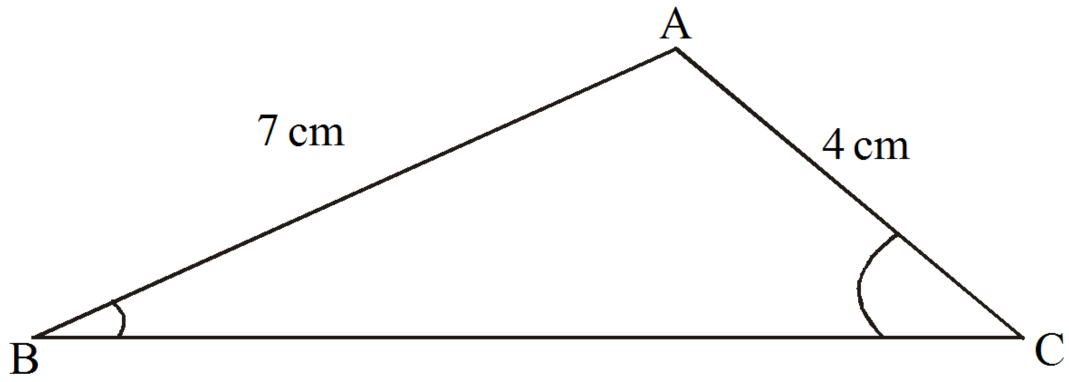
4.3.6 ایک مثلث کی نامساواتیں

ہم ایک مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے مابین موجود رشتہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے مزید چند رشتوں کو جاننے کی کوشش کریں گے کہ یہ کب مساوی نہیں ہوتے۔ اس پر بحث کرنے سے پہلے آیئے ہم چند نامساواتوں کی علامتوں اور ان کے معنی ومطالب کا اعادہ کریں گے۔

نامساواتوں کے لئے استعمال ہونے والی علامتیں

مثالیں	معنی ومطلب	علامت
>	بڑا ہے	$90^0 > 30^0$ کو 90 درجہ بڑا ہے 30 درجہ سے پڑھا جاتا ہے
<	چھوٹا ہے	$30^0 < 90^0$ کو 30 درجہ چھوٹا ہے 90^0 درجہ سے پڑھا جاتا ہے
$\neq$	غیر مساوی ہے	$90^0 \neq 30^0$ کو 90 درجہ غیر مساوی ہے 30 درجہ سے پڑھا جاتا ہے

آیئے ہم حسب ذیل مثلث کا مشاہدہ کریں گے۔



آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

AB > AC	⇒	∠C > B
∠C > B	⇒	AB > AC

ΔABC میں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ضلع AB ضلع AC سے بڑا ہے۔ آیئے اب ہم ∠B اور ∠C کی پیائش کرتے ہیں۔ آپ کیا نوٹ کرتے ہیں۔ ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ ∠B غیر مساوی ہے ∠C کے یعنی ∠B ≠ ∠C اور ∠C بڑا ہے بہ نسبت ∠B کے۔

اس طرح ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ سب سے بڑا ہوتا ہے۔

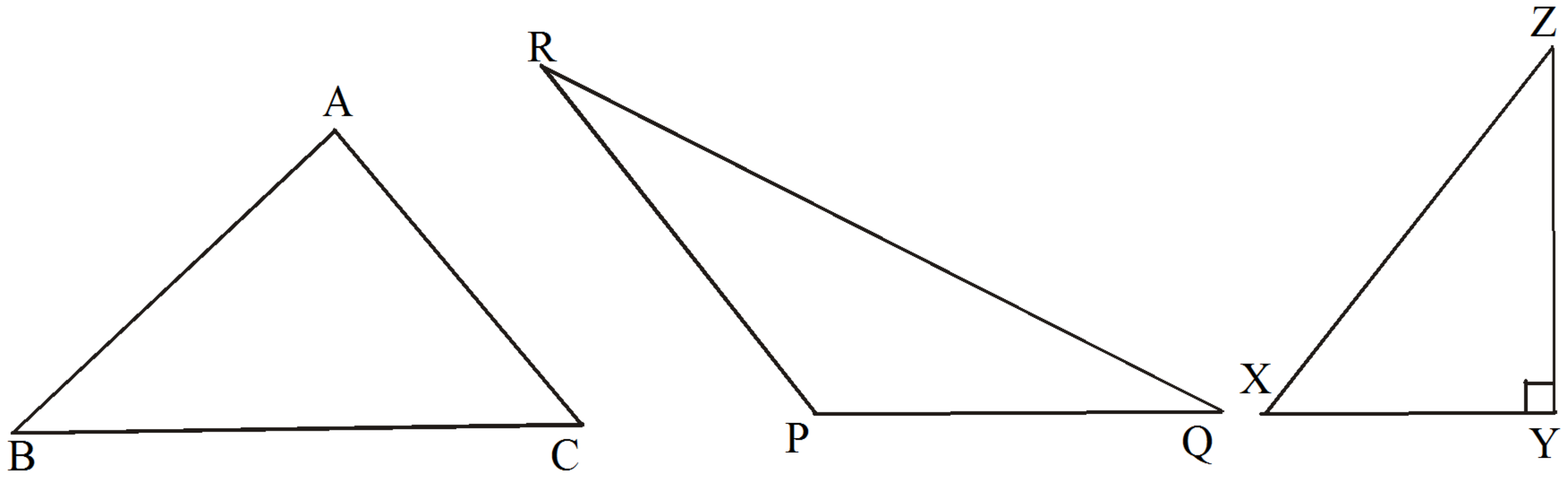
اسی طرح ہم اس کی بھی تصدیق کر سکتے ہیں کہ ایک مثلث کے بڑے زاویہ کے مقابل کا ضلع بڑا ہوتا ہے۔

آیئے اب ہم مثلث کے اضلاع کے مابین رشتہ کو جاننے کی کوشش کریں گے۔

4.3.7 مثلث کے دو ضلعوں کے طول کا مجموعہ

مشغلہ :

آیئے اب ہم ایک مشغلہ کو انجام دیں گے۔ اپنی نوٹ بک میں کوئی تین مثلث اُتاریئے۔ اور انہیں ΔABC، ΔPQR اور ΔXYZ کا نام دیں۔



آیئے ہم ان کے اضلاع کے طول معلوم کرتے ہوئے نیچے دیئے گئے جدول میں درج کریں گے۔

مثلث کا نام	مثلث کا ضلع	دو ضلعوں کا مجموعہ	کیا یہ درست ہے	ہاں/نہیں
ΔABC	$AB =$	$AB + BC =$	$AB + BC > CA$	
	$BC =$	$BC + CA =$	$BC + CA > AB$	
	$CA =$	$CA + AB =$	$CA + AB > BC$	
ΔPQR	$PQ =$	$PQ + QR =$	$PQ + QR > RP$	
	$QR =$	$QR + RP =$	$QR + RP > PQ$	
	$RP =$	$RP + PQ =$	$RP + PQ > QR$	
ΔXYZ	$XY =$	$XY + YZ =$	$XY + YZ > ZX$	
	$YZ =$	$YZ + ZX =$	$YZ + ZX > XY$	
	$ZX =$	$ZX + XY =$	$ZX + XY > YZ$	

مندرجہ بالا جدول میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک مثلث میں دو ضلعوں کے طول کا مجموعہ اس کے تیسرے ضلع کے طول سے بڑا ہوتا ہے۔

4.3.8 ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول کا فرق

مشغلہ : آیئے ہم انھیں مثلث پر غور کرتے ہیں جب آپ کے نوٹ بک میں اُتارے گئے ہیں۔ جدول کا مشاہدہ کریں اور آپ کے نتائج کو درج کریں۔

مثلث کا نام	اضلاع کے طول	اضلاع کے مابین فرق	کیا یہ درست ہے	ہاں/نہیں
ΔABC	$AB =$	$\|BC - CA\| =$	$\|BC - CA\| < AB$	
	$BC =$	$\|CA - AB\| =$	$\|CA - AB\| < BC$	
	$CA =$	$\|AB - BC\| =$	$\|AB - BC\| < CA$	
ΔPQR	$PQ =$	$\|QR - RP\| =$	$\|QR - RP\| < PQ$	
	$QR =$	$\|RP - PQ\| =$	$\|RP - PQ\| < QR$	
	$RP =$	$\|PQ - QR\| =$	$\|PQ - QR\| < RP$	
ΔXYZ	$XY =$	$\|YZ - ZX\| =$	$\|YZ - ZX\| < XY$	
	$YZ =$	$\|ZX - XY\| =$	$\|ZX - XY\| < YZ$	
	$ZX =$	$\|XY - YZ\| =$	$\|XY - YZ\| < ZX$	

نوٹ: $|6-5| = |5-6| = 1$

$|x-y|$ کی قدر ہمیشہ مثبت ہوتی ہے؛ $|x-y|$ میں 'x' اور 'y' کی قدر ہمیشہ مطلق ہوتی ہے۔

مندرجہ بالا مشاہدات سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں۔ ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دو اضلاع کے طول کا مطلق فرق اس کے تیسرے ضلع کے طول سے چھوٹا ہوتا ہے۔

آیئے ہم مثلث کی نامساواتوں سے متعلق چند مثالیں حل کریں گے۔

مثال-9 : آمنہ کہتی ہے کہ ایک مثلث کے اضلاع کے طول 6 سمر، 5 سمر اور 8 سمر ہو سکتے ہیں۔ کیا آپ اس سے متفق ہیں؟ اپنے جواب کے لئے جواز پیش کریں۔

حل: مان لیجئے کہ مثلث کے اضلاع کے طول اس طرح ہیں:

AB = 6 سمر

C = 5 سمر

CA = 8 سمر

اب کوئی دو ضلعوں کے طول کے مجموعہ پر غور کریں

$\Rightarrow \quad AB + BC = 6 + 5 = 11 > 8$

$BC + CA = 5 + 8 = 13 > 6$

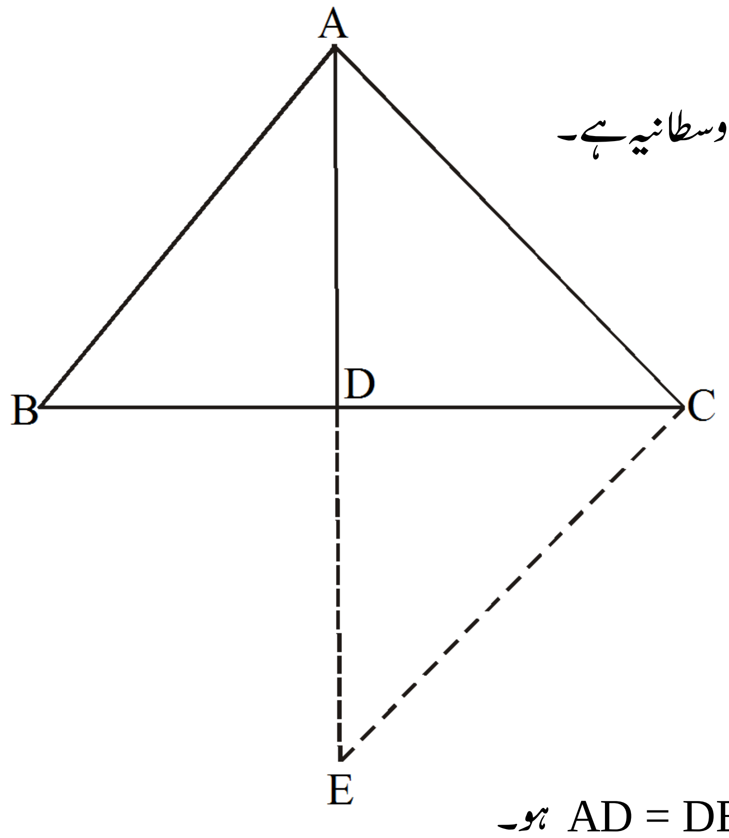
$CA + AB = 6 + 8 = 14 > 5$

چوں کہ کوئی بھی دو ضلعوں کے طول کا مجموعہ تیسرے ضلع کے طول سے بڑا ہے اس لئے ان پیمائشات سے مثلث بنایا جا سکتا ہے۔

ہاں میں آمنہ سے متفق ہوں۔

مثال-10 : دی گئی شکل میں AD مثلث ΔABC کا وسطانیہ ہے۔

ثابت کیجئے کہ $AB + AC > 2AD$



حل: AD کو نقطہ 'E' تک اس طرح بڑھایئے کہ $AD = DE$ ہو۔

نقطہ C سے E کو ملایئے۔

ΔABC اور ΔECD پر غور کریئے۔

دیا گیا ہے $\quad BD = DC$

[∵ D، BC کا وسطی نقطہ ہے]

$\angle ADB = \angle EDC$ [∵ مقابل کے عمودی زاویئے]

$AD = DE$ [بناوٹ]

$\therefore \ \Delta ADB \cong \Delta ECD$ [ضلع - زاویہ - ضلع مماثلت سے]

$\therefore \ AB = EC$ [متماثل شلث کے نظیری ضلع مساوی ہوتے ہیں]

اب ΔACE میں

$\Rightarrow EC + AC > AD + DE$ [مثلث کے دو ضلعوں کا مجموعہ تیسرے ضلع سے بڑا ہوتا ہے]

$\Rightarrow EC + AC > AD + DE$ [$\because AE = AD + DE$]

$\Rightarrow EC + AC > AD + AD$ [$\because DE = AD$]

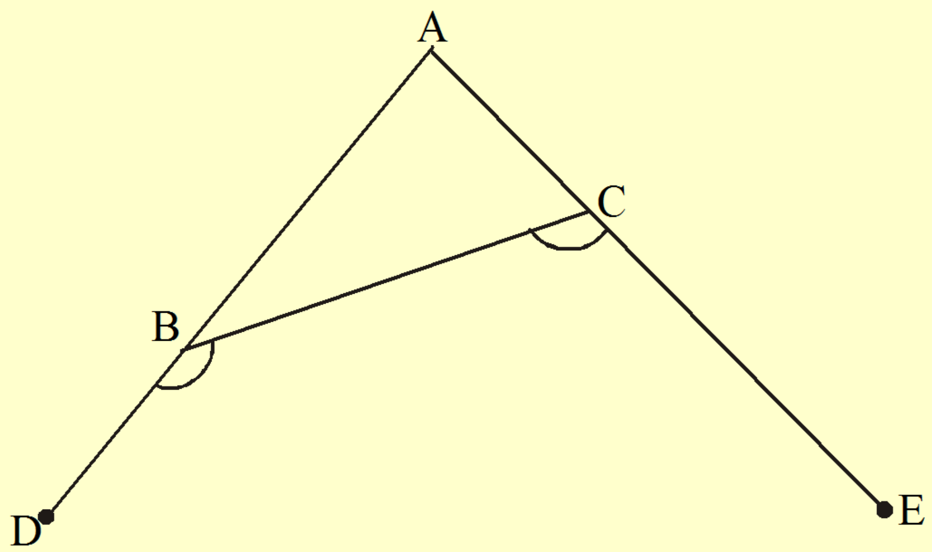
اس لئے $EC + AC > 2AD$

$AB + AC > 2AD$ [$\because EC = AB$]

لہٰذا ثابت ہوا۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے۔

1. ΔABC میں AB = 5.7 سمر، BC = 6.2 سمر، CA = 4.8 سمر ہوں تب اس مثلث کا سب سے بڑا زاویہ اور سب سے چھوٹا زاویہ کا نام بتایئے۔
2. ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول 6 سمر اور 9 سمر ہیں۔ اگر تیسرے ضلع کا طول مثبت صحیح عدد ہو تب تیسرے ضلع کے تمام ممکنہ طول لکھیے۔
3. حسب ذیل شکل میں اگر $\angle BCE > \angle CBD$ ہو تب ثابت کیجئے کہ $AB < AC$



4. ثابت کیجئے کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کا مجموعہ اس کے تینوں وسطانیوں کے مجموعہ سے بڑا ہوتا ہے۔

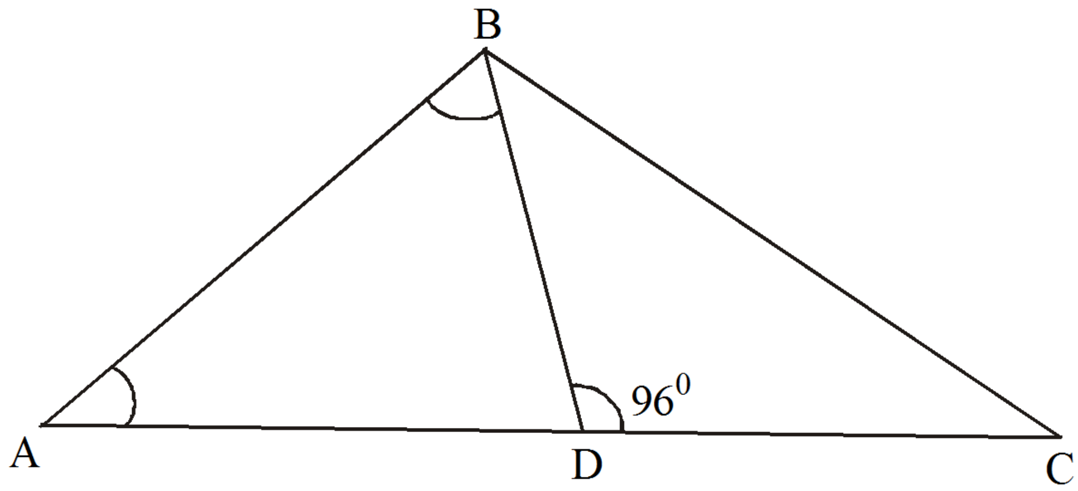
[**اشارہ:** ایک خطی قطع جو راس سے اس کے مقابل ضلع کے وسطی نقطہ پر کھینچا جاتا ہے وسطانیہ کہلاتا ہے۔ مثال 10 دیکھئے]

مشق

.1 ΔABC میں اگر $\angle A = 3\angle B$ اور $\angle C = 2\angle B$ ہو تب مثلث ABC کے تمام تین زاویوں کو معلوم کیجئے۔

[اشارہ: فرض کیجئے کہ $\angle B = x$ تب $\angle C = 3x$ اور $\angle C = 2x$ [$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$] کو استعمال کیجئے۔

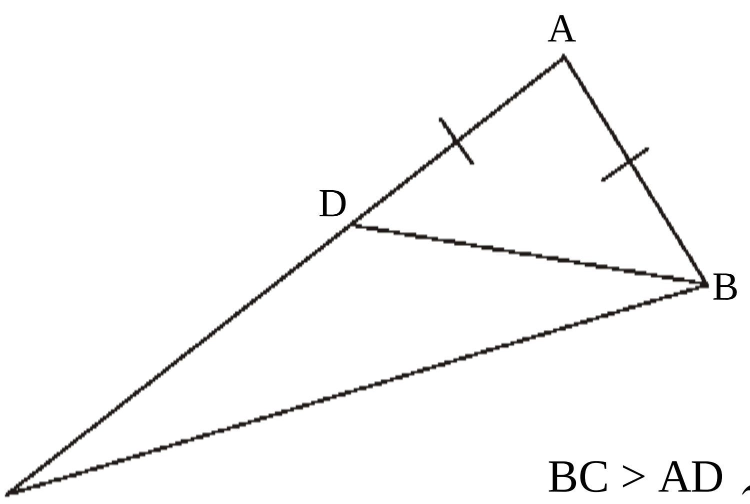
.2 دی گئی شکل میں $\angle ABD = 3\angle DAB$ اور $\angle BDC = 96^0$ ہو تب $\angle ABD$ معلوم کیجئے۔



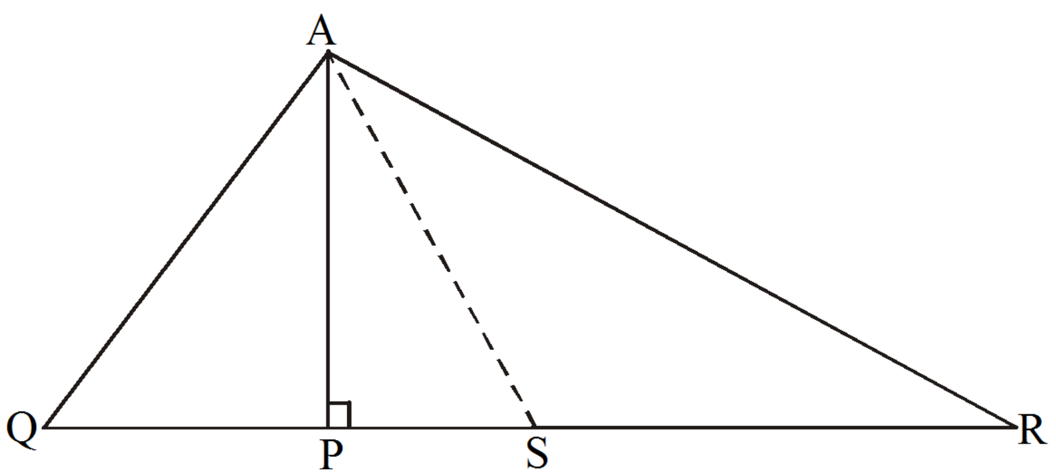
.3 کیا کسی مثلث میں دو قائمہ زاویے ہو سکتے ہیں؟

.4 ایک مثلث کا بیرونی زاویہ 125^o ہے اور اس کے اندرونی زاویوں میں 2:3 کی نسبت ہے تب اس مثلث کے زاویے معلوم کیجئے۔

.5 دی گئی شکل میں ΔABC میں ضلع BC پر 'D' کوئی نقطہ ہے۔ اگر $AB > AC$ ہو تب ثابت کیجئے کہ $AB > AD$



.6 دی گئی شکل میں اگر $AB = AD$ ہو تب ثابت کیجئے کہ $BC > AD$



.7 دی گئی شکل میں $AP \perp QR$ ، $PR > PQ$ اور $PS = PQ$ بتلایئے کہ $AR > AQ$

[اشارہ: A سے S کو ملایئے]

آ یئے ہم خلاصہ کریں

- ایک مثلث تین خطی قطعوں سے گھیری ہوئی سادہ بند شکل ہوتی ہے۔
- اضلاع کے مطابق مثلثات کی تین اقسام ہوتی ہیں۔
- ایسا مثلث جس کے تینوں ضلعوں کے طول غیر مساوی ہوتے ہیں مختلف الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔
- ایسا مثلث جس کے کوئی دو ضلعوں کے طول مساوی ہوتے ہیں وہ مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے۔
- ایسا مثلث جس کے تمام تین ضلعوں کے طول مساوی ہوں ہو مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔
- زاویوں کے مطابق مثلثات کی تین اقسام ہوتی ہیں۔
- ایسا مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں وہ حادہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔
- ایسا مثلث جس کا کوئی ایک زاویہ منفرجہ زاویہ ہو وہ منفرجہ زاویہ مثلث کہلاتا ہے۔
- ایسا مثلث جس کا کوئی ایک زاویہ قائمہ زاویہ ہو وہ قائم الزاویہ مثلث کہلاتا ہے۔
- ایک مثلث کے عناصر میں تین ضلعے اور تین زاویے ہوتے ہیں۔
- ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^{o} ہوتا ہے۔
- ایک مثلث کا بیرونی زاویہ اس کے اندرونی مقابل کے زاویوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔
- اگر ایک مثلث کے دو ضلعے غیر مساوی ہوں تب بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ مثلث کا سب سے بڑا زاویہ ہوتا ہے۔
- ایک مثلث میں اس کے کوئی دو ضلعوں کا مجموعہ اس کے تیسرے سے بڑا ہوتا ہے۔
- ایک مثلث کے کوئی دو ضلعوں کا مطلق فرق اس کے تیسرے ضلع سے چھوٹا ہوتا ہے۔

سبق 4.4

مثلثات کی متماثلت

Congruence of Triangles

4.4.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے کہ:

- دی گئی اشکال متماثل ہیں یا نہیں تصدیق کریں گے اور وضاحت کریں گے۔
- مثلثات کی متماثلت کے لئے اصول بیان کریں گے۔
- مثلثات کی متماثلت کے اصول کو سوالات حل کرنے میں استعمال کریں گے۔

4.4.1 تعارف

ہماری روزمرہ زندگی میں ہم بے شمار جیومٹریہ اشکال کا مشاہدہ کرتے ہیں جیسے ٹاورس، مینار وغیرہ۔ عام طور پر ہم ٹاورس اور عمارتوں پر مثلثات کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ ایک جیسے ٹاورس اور عمارتوں پر یہ مثلثات ایک ہی طرح کے نظر آتے ہیں۔

ایسی اشیاء جن کی ایک ہی جسامت اور شکل ہوتی ہے متماثل ہوتی ہیں اور یہ خاصیت متماثلت کہلاتی ہے۔

اس باب میں ہم مثلثات کی متماثلت اور ان کی خصوصیات کے بارے میں تفصیلی مطالعہ کریں گے۔

مشغلہ:

ایک ہی مالیت کے دو کرنسی نوٹ لیجئے۔ ایک نوٹ دوسرے پر رکھیں۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

شکل 4.4.1

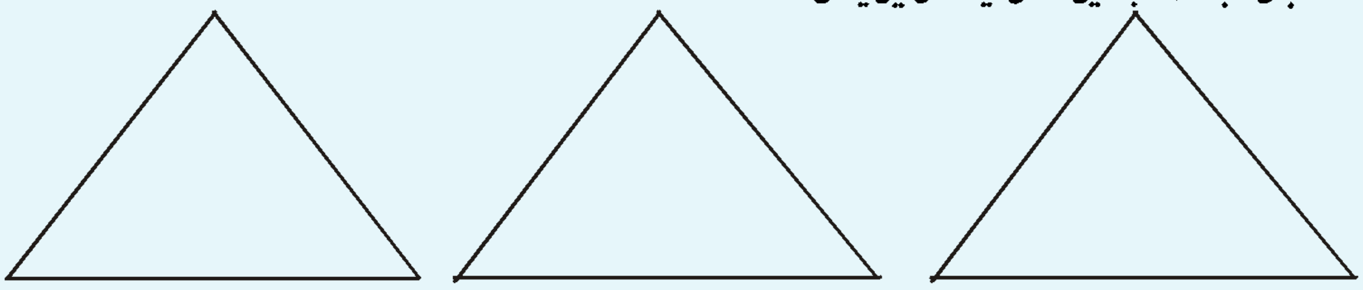
ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک نوٹ دوسرے نوٹ کو مکمل طور پر اور بالکل ٹھیک ٹھیک احاطہ کرتا ہے۔ یعنی یہ ایک دوسرے پر بالکل منطبق ہوجاتے ہیں۔

اس ٹسٹ کے ذریعہ کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوٹ یکساں جسامت اور ایک ہی شکل کے ہیں؟ ایسی اشیاء متماثل کہلاتی ہیں۔ متماثل اشیاء ایک دوسرے کی ہو بہو ہوتی ہیں۔ کیا آپ ایسی ہی متماثل اشیاء کی چند اور مثالیں دے سکتے ہیں۔

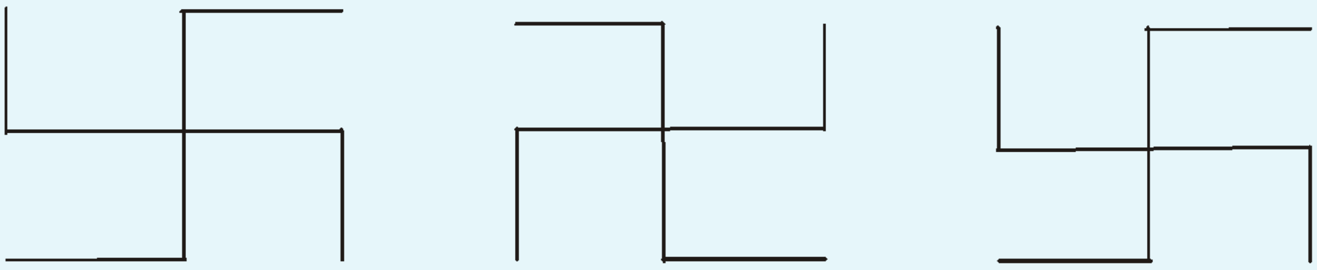
اپنے اکتساب کی جانچ کرلیں

1. جانچ کیجیے کہ حسب ذیل اشکال آیا متماثل ہیں یا نہیں

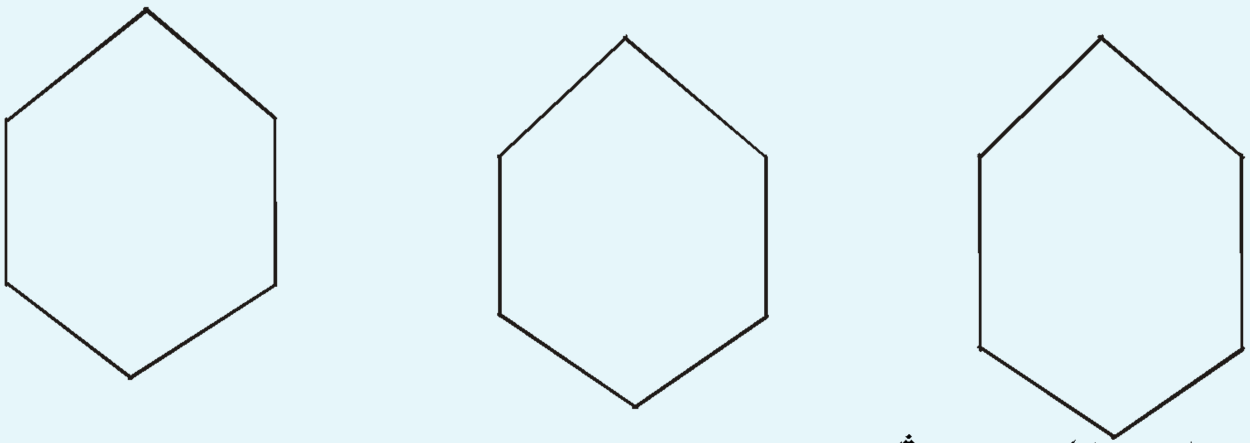
(i)



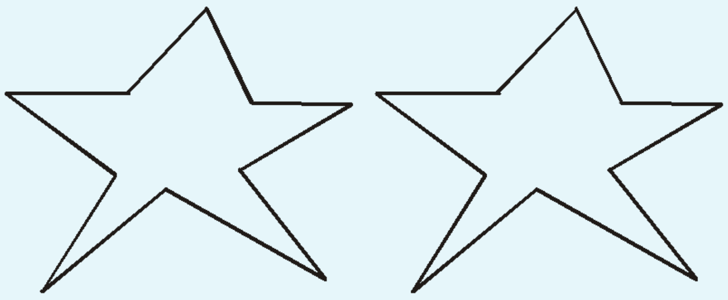
(ii)



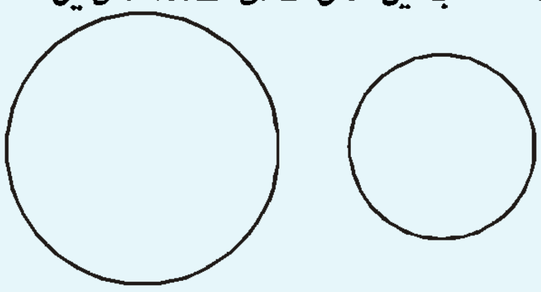
(iii)



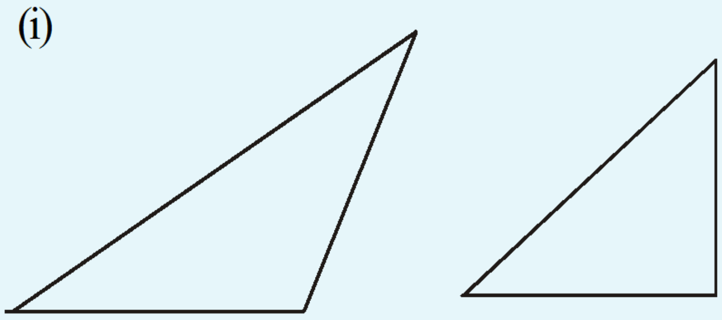
2. حسب ذیل اشکال کے کون سے جوڑ متماثل ہیں؟



(i)



(ii)

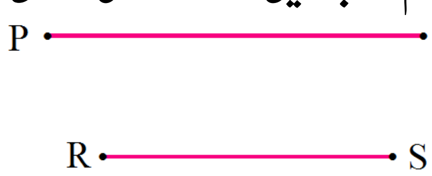


(iii)

4.4.2 خطی قطعوں کی مماثلت

آیئے ہم حسب ذیل دیے گئے خطی قطعوں کے دو جوڑ کا مشاہدہ کریں گے۔

شکل (i)



شکل (ii)

اگر ہم خطی قطعہ AB کو خطی قطعہ CD پر رکھیں تو ہم کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ AB بالکل CD پر منطبق ہوجاتی ہے۔لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ خطی قطعات متماثل ہیں۔

علامتی اظہار کے لئے ہم اس طرح لکھتے ہیں:

متماثلت کی علامت $\rightarrow \cong$

$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

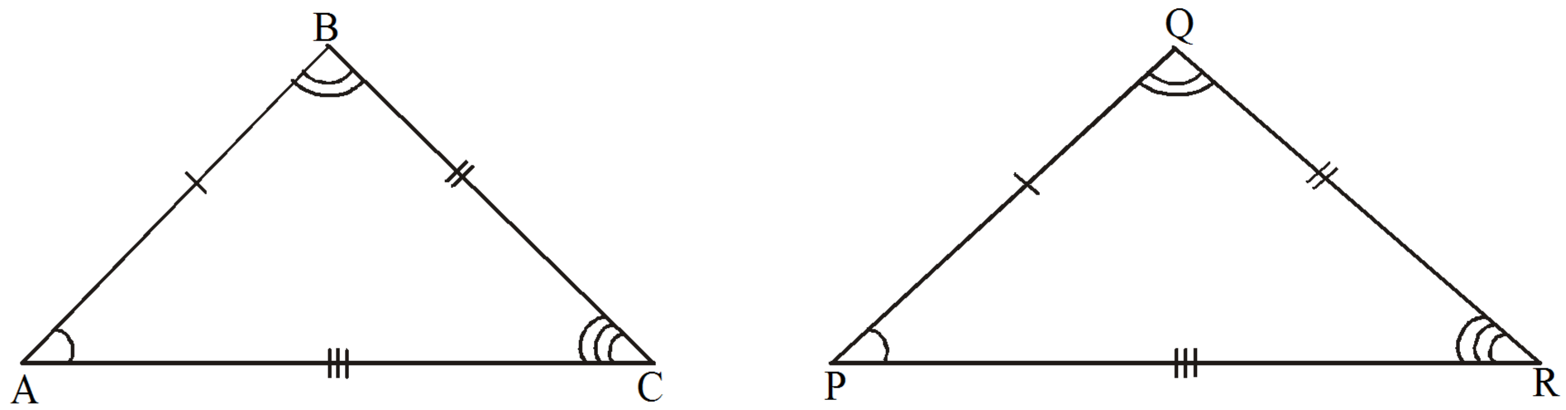
اسی طرح سے اگر ہم خطی قطعہ PQ کو خطی قطعہ RS پر رکھیں تب ہم کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\overline{PQ}$ اور $\overline{RS}$ متماثل ہیں؟

چونکہ خطی قطعات کا جوڑ PQاور RSایک دوسرے سے میل نہیں کھاتے اس لئے یہ متماثل نہیں ہیں۔ **ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں اگر دو خطی قطعات کے طول مساوی ہوں تب یہ متماثل ہوں گے۔ اسکے برعکس اگر دو خطوط متماثل ہوں تب ان کے طول مساوی ہوں گے۔** ہم بعض اوقات صرف اتنا کہتے ہیں کہ خطی قطعات مساوی ہیں اور ہم AB = CD بھی لکھتے ہیں اس کا مطلب یہ ہے کہ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

4.4.3 مثلثات کی متماثلت

ہم نے یہ سیکھا ہے کہ دو خطی قطعات متماثل ہوتے ہیں جب کہ ان کے طول مساوی ہوں۔کیا ہم اس تصور (خیال) کو مثلثات تک توسیع کر سکتے ہیں۔آیئے اب ہم مثلثات کی متماثلت کے بارے میں جاننے کی کوشش کریں گے۔دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں اگر یہ ایک دوسرے کے ہو بہو ہوں اور ان کو ایک دوسرے کے اوپر رکھا جائے تب وہ ایک دوسرے کا مکمل احاطہ کرتے ہوں یعنی وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہوں۔

آیئے ہم حسب ذیل مثلثات کا مشاہدہ کریں۔



آپ ΔABC اور ΔPQR کے بارے میں کیا کہیں گے۔

چونکہ ΔABC اور ΔPQR ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں یعنی وہ جسامت اور شکل میں یکساں ہیں۔

اس لئے ہم کہتے ہیں کہ ΔABCاور ΔPQR متماثل مثلثات ہیں۔اس لئے ہم ان کو ΔABC ≅ ΔPQR لکھتے ہیں۔

اس سے ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ جب ہم ΔPQR کو ΔABC پر رکھتے ہیں۔ تب P ‘A پر منطبق ہوتا ہے۔ Q ‘B پر منطبق ہوتا ہے اور R ‘C پر منبطق ہوتا ہے اسی طرح $\overline{PQ}$ ‘ $\overline{AB}$ کے ساتھ منطبق ہوتی ہے‘ $\overline{QR}$ ‘ $\overline{BC}$ کے ساتھ منطبق ہوتی ہے اور

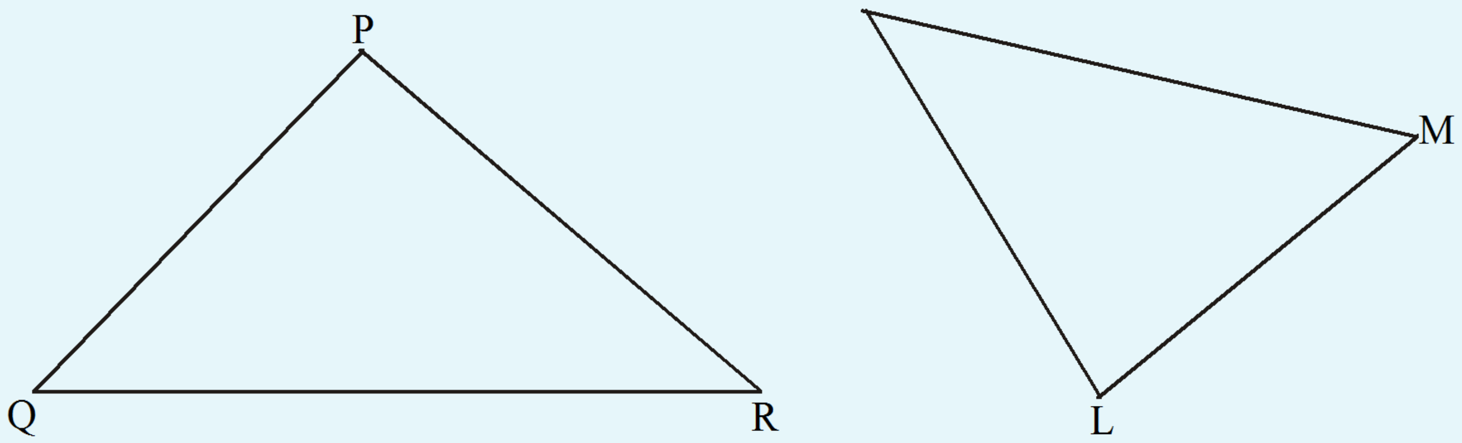
$\overline{PR}$ ‘ $\overline{AC}$ کے ساتھ منطبق ہوتی ہے۔

ΔABC اور ΔPQR میں	
(متناظر راس)	$A \to P, B \to Q, C \to R$
(متناظر زاویے)	$\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$
(متناظر ضلع)	$\overline{AB} \cong \overline{PQ}, \overline{BC} \cong \overline{QR}, \overline{AC} \cong \overline{PR}$
تب ہم کہہ سکتے ہیں کہ	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

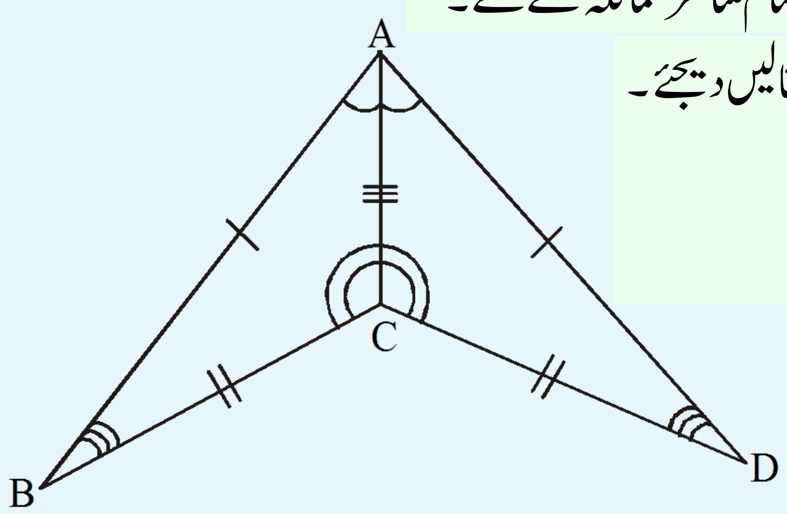
لہٰذا متماثل مثلثات کے متناظر حصے مساوی ہوتے ہیں۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. حسب ذیل شکل میں $\Delta PQR \neq \Delta LMN$ ان دو مثلثات کے متناظر راس، زاویے اور ضلع لکھئے۔



2. $\Delta ABX \neq \Delta DEF$ ہو تب ان مثلثات کے تمام متناظر متماثلہ حصے لکھئے۔



3. متماثلہ اشکال کے لئے اپنی حقیقی زندگی کی کوئی دو مثالیں دیجئے۔
4. دی گئی شکل میں متماثلہ مثلثات کے نام لکھئے۔
اور علامت $\cong$ استعمال کرتے ہوئے بیان لکھئے۔

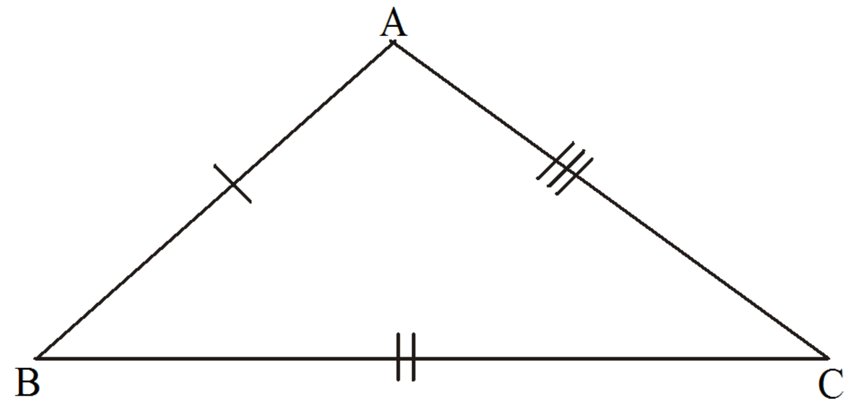
4.44 مثلثات کی متماثلت کے لئے جانچ کا اصول

اگر آپ کو دو مثلثات دیے جائیں کہ یہ آیا متماثل ہیں یا نہیں جانچ کرنی ہو تب آپ کیا کریں گے؟ عام طور پر ہم ایک مثلث کو دوسرے مثلث پر منطبق کرتے ہیں۔ لیکن ہمیشہ اس طریقہ کے ذریعہ جانچ کرنا ممکن نہیں ہوسکتا۔ دیے گئے مثلثات متماثل ہیں یا نہیں جانچ کے لئے درکار کم از کم پیمائشات کی تعداد کے بارے میں مطالعہ کریں گے۔

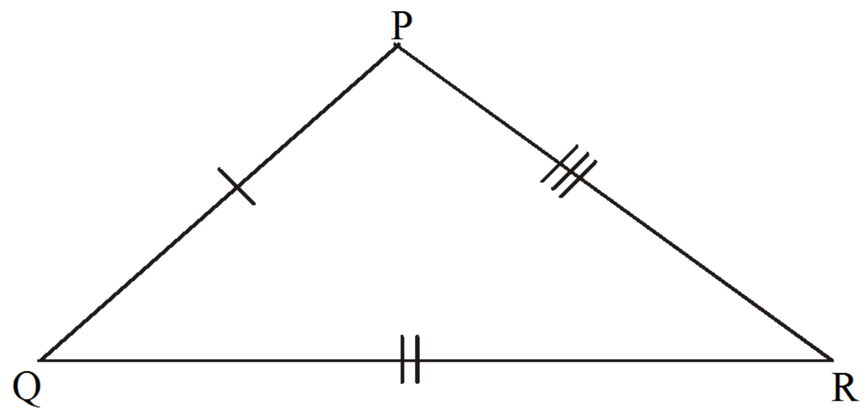
آیئے اب ہم مثلثات کی متماثلت کے لئے جانچ کے اصول بیان کریں گے اور ان کی مدد سے چند سوالات حل کرنے کی کوشش کریں گے۔

مشغلہ:

آیئے ہم ΔABC پر غور کریں گے جو کہ حسب ذیل شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔



ایک اور ΔPQR اس طرح بنایئے کہ $PQ = AB$، $QR = BC$ اور $PR = AC$ (شکل دیکھئے)



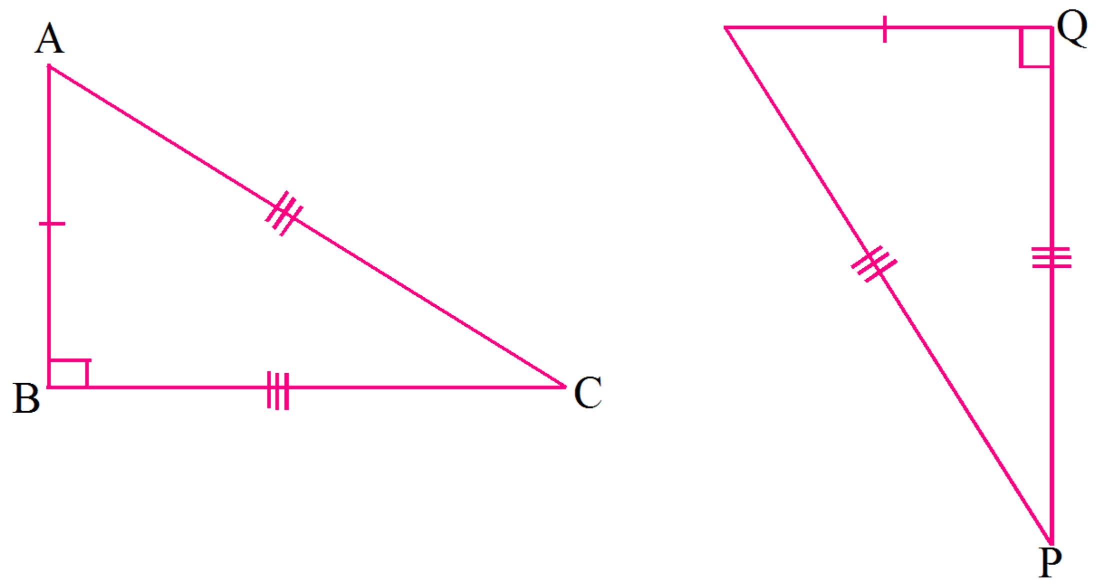
اگر ہم ABC کو تراش لیں اور اس کو PQR پر رکھ دیں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک مثلث دوسرے مثلث کا مکمل طور پر احاطہ کر لیتا ہے یعنی وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں متماثل ہیں اور مزید ہم یہ بھی نوٹ کرتے ہیں کہ تمام نظیری حصے بھی مساوی ہوتے ہیں۔

ΔABC کے متماثل ایک اور ΔPQR کی بناوٹ کے دوران یہ بھی غور کیا جانا چاہئے کہ ہم نے اضلاع کے تین حصے $PQ = AB$، $QR = BC$ اور $PR = AC$ استعمال کئے ہیں۔

اس کا مطلب یہ ہے کہ یہی تین نظیری حصوں کی مساویت (تساوی) کا نتیجہ متماثل مثلث ہے۔ باضابطہ طور پر ہم اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں۔ ضلع۔ضلع۔ضلع (SSS) متماثلت کے لئے جانچ کا اُصول۔ **''اگر ایک مثلث کے تین ضلعے کسی اور مثلث کے تین نظیری ضلعوں کے مساوی ہوں تب یہ مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔**

مثال 1 : حسب ذیل دی گئی شکل میں جانچ کیجئے کہ $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ یا نہیں۔



حل: ΔPQR اور ΔABC کی دی گئی شکل سے دیا گیا ہے کہ

لہٰذا $AB = PQ$

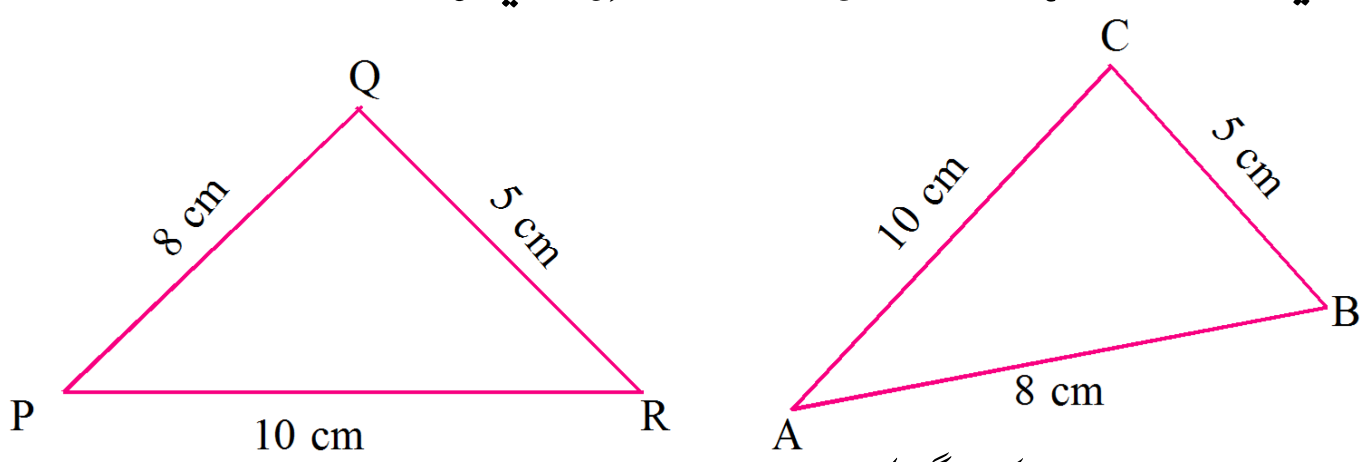
$BC = QR$

$AC = PR$

SSS متماثلت کے اصول کی رو سے

ΔPQR اور ΔABC

مثال 2 : کیا $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ کہ؟ ان دومثلثات کے نظیری زاویے بھی لکھئے۔



حل: ΔPQR اور ΔABC کی دی گئی شکل کے مطابق دیا گیا ہے کہ

$PQ = AB = 8$ cm

$QR = BC = 5$ cm

$PR = AC = 10$ cm

$\boxed{\Delta PQR \cong \Delta ABC}$

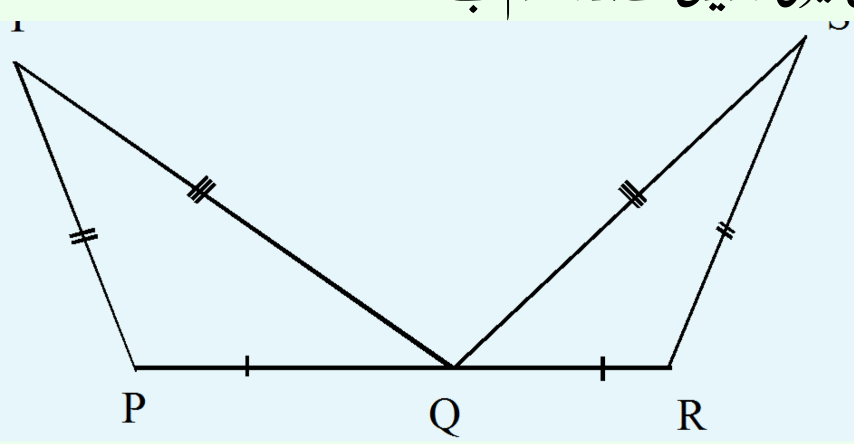
لہٰذا SSS متماثلت کے اصول کی رو سے

$\Delta PQR \cong \Delta ABC$

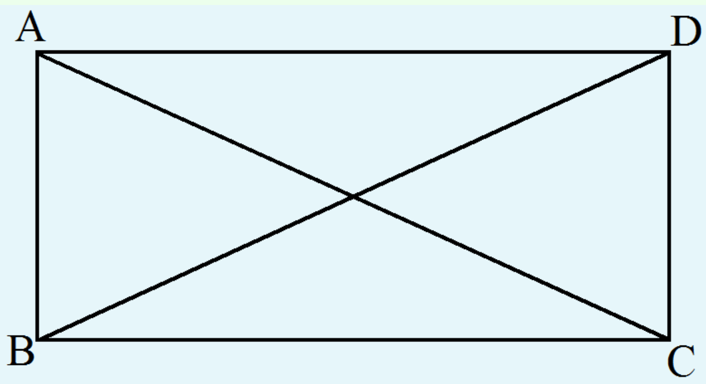
جیسا کہ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ P مطابقت تو رکھتا ہے نقطہ A سے Q مطابقت رکھتا ہے نقطہ B سے اور R مطابقت رکھتا ہے نقطہ C سے۔ اس لئے $\angle A$ $\angle P$ ؛ $\angle B$ $\angle Q$ ؛ $\angle C$ $\angle R$ نظیری زاویوں کے جوڑ ہیں۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

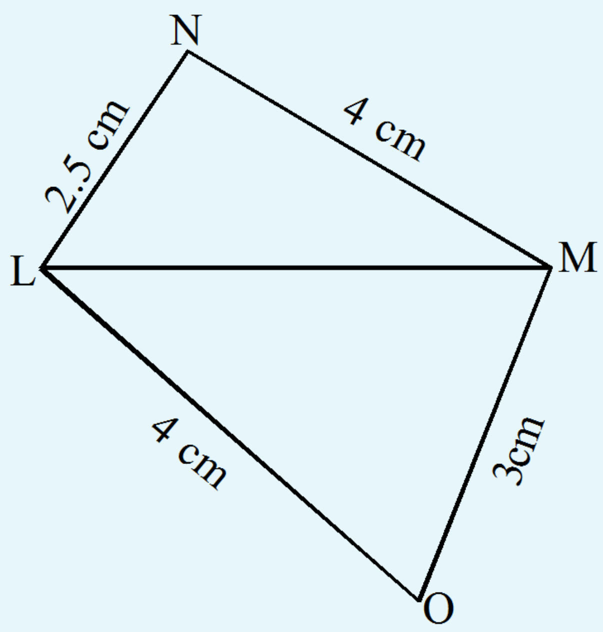
1. حسب ذیل متماثل مثلثات میں نظیری زاویوں کے جوڑ معلوم کیجئے۔



2. حسب ذیل شکل میں اگر AB = DC اور AC = DB ہو تو بتلایئے کہ

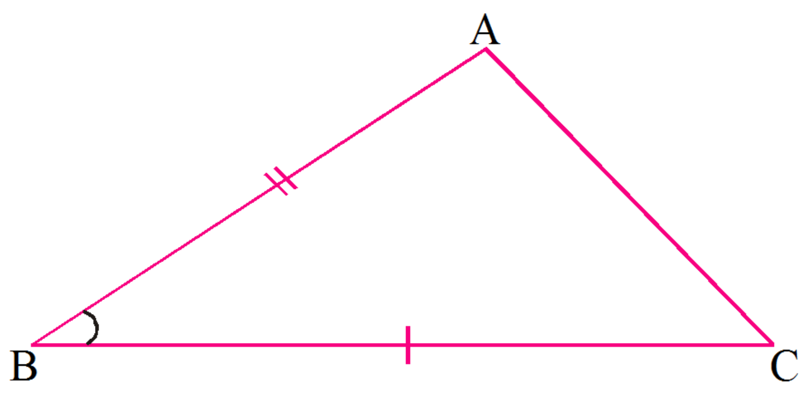


3. جانچ کیجئے آیا حسب ذیل شکل کے لئے SSS متماثل کا اصول صادق آتا ہے۔ جواز پیش کیجئے۔

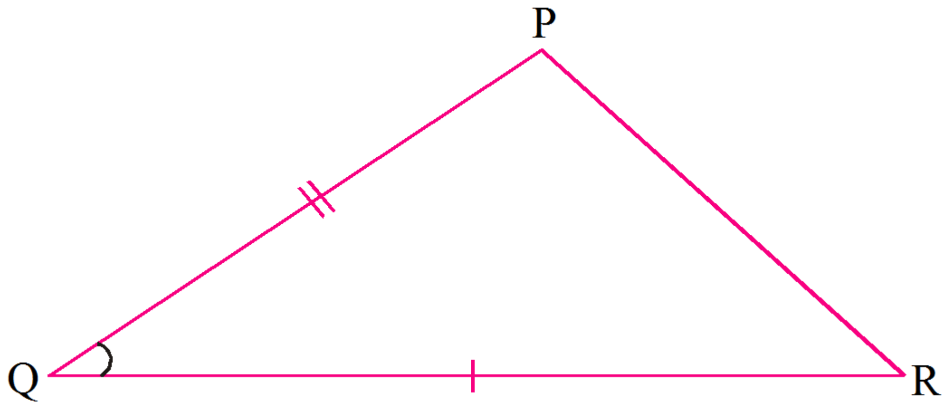


مشغلہ

حسب ذیل میں ΔABC کی شکل پر غور کیجئے۔



ایک اور مثلث ΔPQR اس طرح بنائیے کہ $QR = BC$، $\angle Q = \angle B$ اور $PQ = AB$ جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔



آیئے اب ہم ΔABC کو تراش کر ΔPQR پر رکھ دیتے ہیں۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک مثلث دوسرے مثلث کا مکمل طور پر احاطہ کرتا ہے اس طرح ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہ متماثل ہیں۔

آیئے ہم بقیہ حصوں کی بھی پیمائش کرتے ہیں تو ہمیں

$$AC = PR, \quad \angle A = \angle P; \ \angle C = \angle R$$

اس لئے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

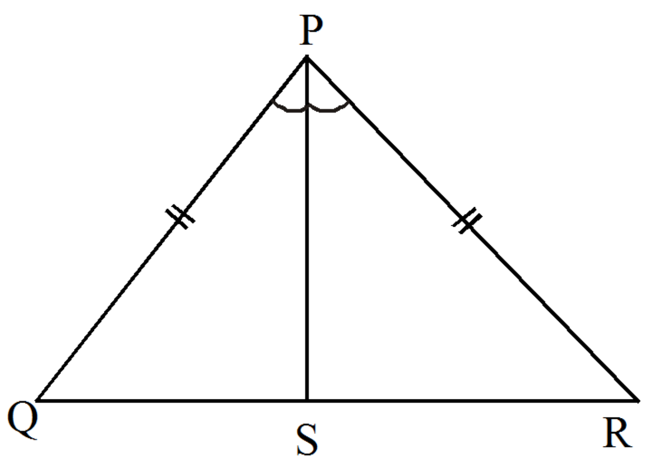
اس مشغلہ کی انجام دہی کے بعد ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ΔABC کے متماثل ΔPQR کی بناوٹ کے لئے ہم نے صرف دو اضلاع کے حصے $PQ = AB$ ، $QR = BC$ اور ان کا درمیانی زاویہ $\angle B = \angle Q$ کو استعمال کیا ہے۔

اس کا مطلب ان تین حصوں کی مساویت (تساوی) کا نتیجہ ان کی متماثلت کو ظاہر کرتی ہے۔اس طرح ہم اس کو باضابطہ طور پر اس طرح کہہ سکتے ہیں۔

ضلع۔زاویہ ضلع (SAS) متماثلت کا حصول: اگر ایک مثلث کے دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ کسی دوسرے مثلث کے متناظر دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کے متماثل ہوں تب یہ دو مثلثات متماثل ہوتے ہیں۔

مثال 3 : ΔPRS میں اگر $PQ = PR$ اور PS زاویہ $\angle P$ کا ناصف ہو تو بتلایئے کہ

$$\Delta PQS \cong \Delta PRS$$



حل: ΔPQS اور ΔPRS میں $PQ = PR$ دیا گیا ہے۔

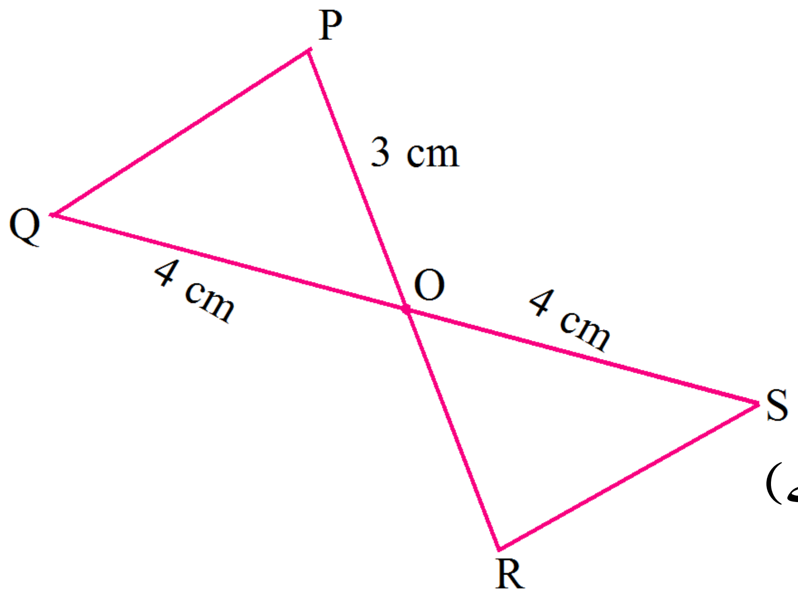
$PS = PS$ (مشترکہ ضلع)

دیا گیا ہے $\angle QPS = \angle RPS$ (PS زاویہ کا ناصف)

SAS متماثلت کے اُصول کی رو سے

$$\Delta PQS \cong \Delta PRS$$

لہٰذا ثابت ہوا۔



مثال 4 : حسب ذیل دئے گئے مثلثات کے جوڑ پر نظر ڈالئے کیا یہ متماثل ہیں۔ اگر یہ متماثل ہیں تب ان کے نظیری حصوں کو لکھئے۔

حل: ΔOQP اور ΔOSR سے

$OQ = OS = 4cm.$

$\angle QOP = \angle ROS$ (مقابل کے عمودی زاویے)

$OP = OR = 3cm.$

مثلثات کے متماثلت کے اصول SAS کی رو سے

$\Delta OQP \cong \Delta OSR$

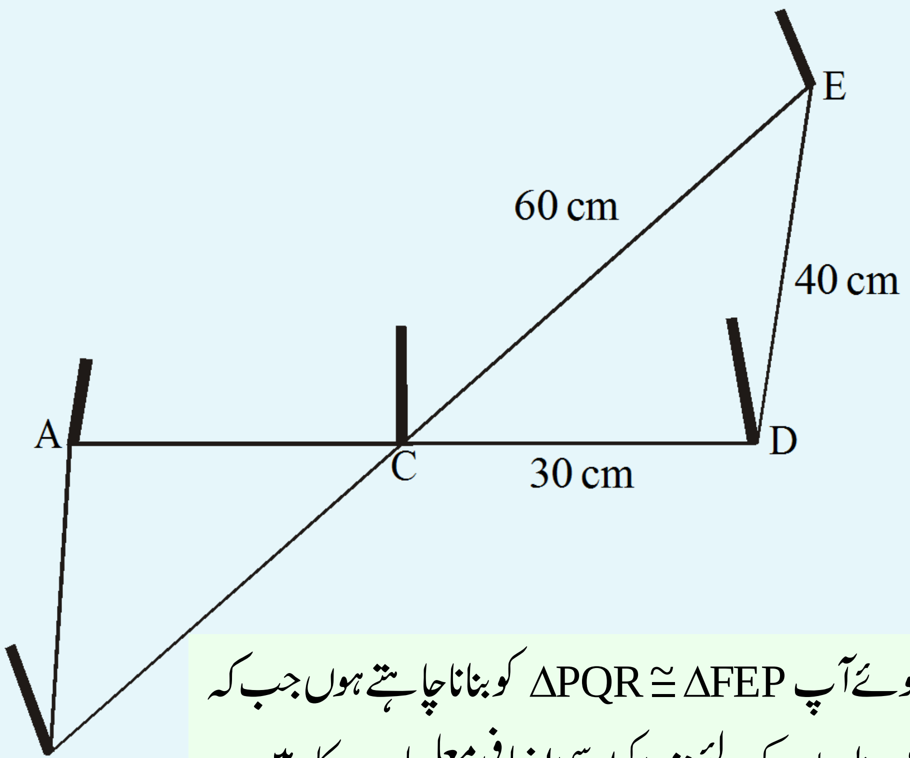
ہاں شکل میں ان مثلثات کے نظیری حصے بھی متماثل ہیں

$PQ = SR$

$\angle P = \angle R$

$\angle Q = \angle S$

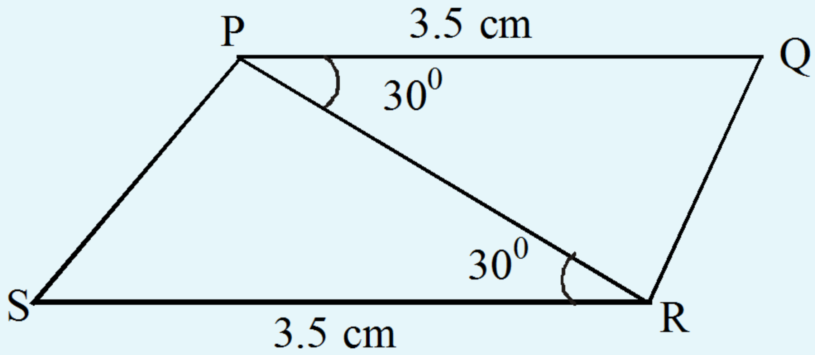
اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔



.1 حسب ذیل خاکہ میں 5 مختلف کھمبوں کو ظاہر کیا گیا ہے۔ کھمبا 'C' نہ صرف کھمبوں کے جوڑ A اور D سے بلکہ B اور E سے بھی نصف دوری پر واقع ہے۔ تب کھمبا A اور کھمبا B کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

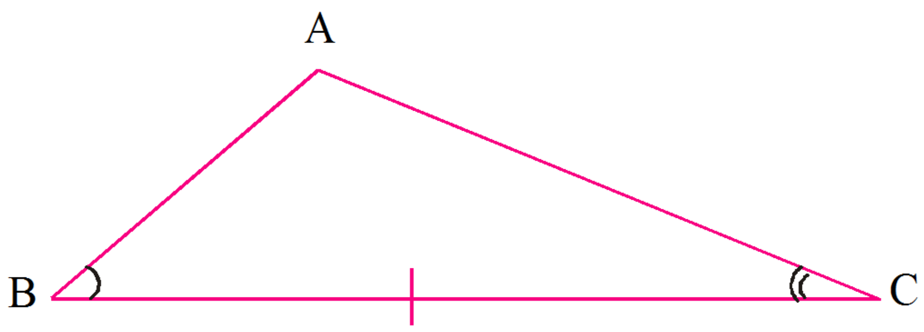
(اشارہ: $\Delta ABC = \Delta EDC$ کی جانچ کیجئے)

.2 متماثلت کے اصول SAS کو استعمال کرتے ہوئے آپ $\Delta PQR \cong \Delta FEP$ کو بنانا چاہتے ہوں جب کہ $PQ = EF$ اور $RP = DF$ دیا گیا ہے تب اس بناوٹ کے لئے مزید کون سی اضافی معلومات درکار ہیں۔

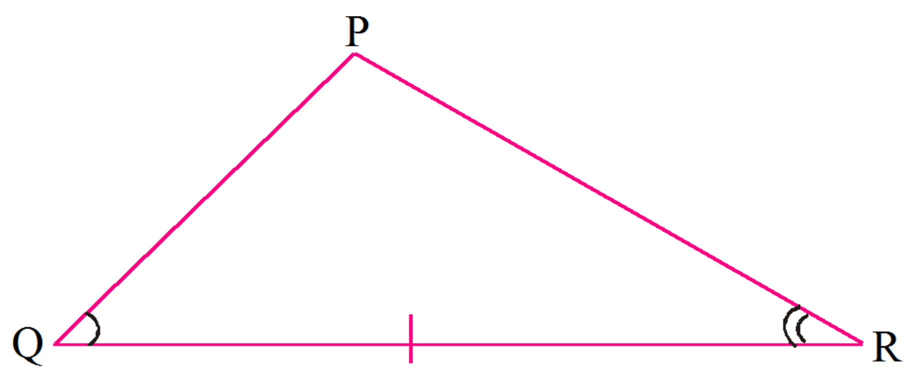


.3 متماثلت کے اصول SAS کے استعمال سے شکل میں کون سے مثلثات متماثل ہیں انہیں علامتی اظہار کے ذریعہ لکھئے۔

مشغلہ 3 : آیئے ہم مثلث ΔABC پر غور کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں بتلایا گیا ہے۔



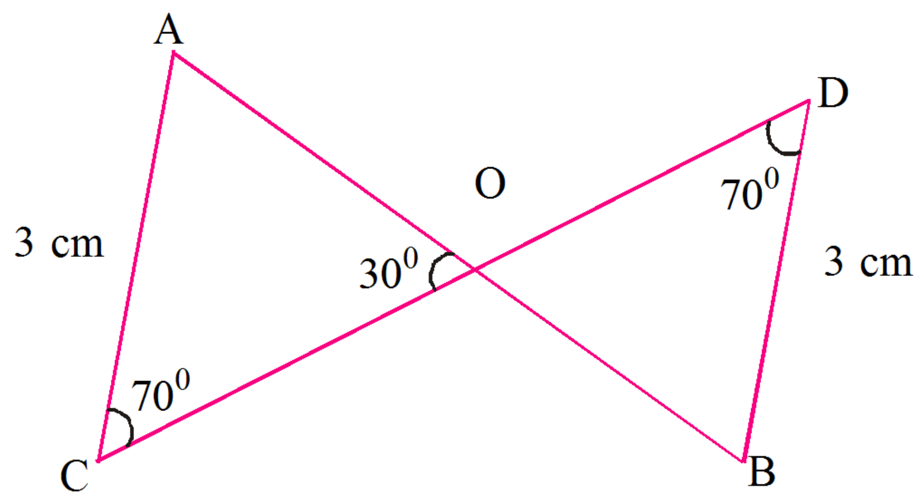
ایک اور مثلث PQR اس طرح بنایئے کہ $QR = BC$ ، $\angle Q = \angle B$ اور $\angle R = \angle C$



ΔABC کو تراشئے اور ΔPQR پر رکھئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ ایک مثلث دوسرے مثلث کا مکمل طور پر احاطہ کرتا ہے اس طرح ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ یہ دونوں مماثل ہیں اور ہم یہ بھی مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle P = \angle A$ ، $PB = AB$ اور $PR = AC$ جو $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ رشتہ کو قائم کرتے ہیں۔ مزید اس کا مطلب یہ بھی ہے کہ دو مثلثات کے تین نظیری حصوں کی مساویت (متساوی) کا نتیجہ ان کی متماثلت ہوتی ہے۔

اس طرح ہم باضابطہ طور پر اس کو حسب ذیل بیان کرتے ہیں۔ زاویہ۔ضلع۔زاویہ (ASA) اصول مثلثات کی متماثلت کے لئے " اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور ان کا درمیانی ضلع کسی دوسرے مثلث کے نظیری زاویے اور ان کے درمیانی ضلع کے متماثل ہوں تب یہ دو مثلثات متماثل ہوں گے۔"

مثال 5 : حسب ذیل شکل میں بتلایئے کہ $\Delta AOC \cong \Delta BOD$



حل: ΔAOC اور ΔBOD کی رو سے

دیا گیا ہے کہ $\angle C = \angle D = 70^0$

$\angle AOC = \angle BOD = 30^0$ ($\because$ مقابل کے عمودی زاویے)

ΔAOC میں دیا گیا ہے کہ

$\angle A + \angle C + \angle AOC = 180^0$ (مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے)

$\Rightarrow \angle A + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle A + 100^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle A = 180^0 = 100^0 = 80^0$ ......(1)

ΔBOD میں دیا گیا ہے کہ

$\angle B + \angle D + \angle BOD = 180^0$

[مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے]

$\Rightarrow \angle B + 70^0 + 30^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle B + 100^0 = 180^0$

$\Rightarrow \angle B = 180^0 - 100^0 = 80^0$ ......(2)

(1) اور (2) کی رو سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$\angle AOC = \angle BOD$ ، $AC = BD$ اور $\angle C = \angle D$

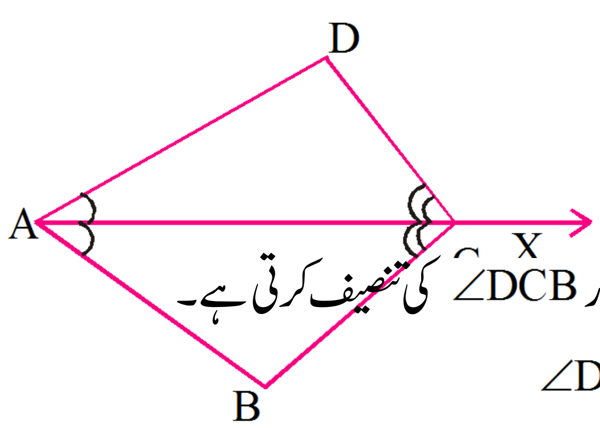
مثلثات کے متماثلت کے اصول ASA کی رو سے

$\therefore \Delta AOC \cong \Delta BOD$

لہٰذا ثابت ہوا۔

مثال 6 : دی گئی شکل میں شعاع AX نہ صرف $\angle DAB$ کی تنصیف کرتی ہے بلکہ وہ $\angle DCB$ کی بھی تنصیف کرتی ہے تب بتلایئے کہ

$\Delta BAC \cong \Delta DAC$



حل: مندرجہ بالا شکل سے، چونکہ شعاع AX دونوں زاویوں $\angle DAB$ اور $\angle DCB$ کی تنصیف کرتی ہے۔

دیا گیا ہے $\angle DAC = \angle BAC$ اور $\angle DCA = \angle BCA$

ΔBAC اور ΔDAC پر غور کریں۔

$\angle DAC = \angle BAC$ (دیا گیا ہے)

$AC = AC$ (مشترکہ ضلع)

$\angle BCA = \angle DCA$ (دیا گیا ہے)

مثلثات کی متماثلت کا اصول ASA کی رو سے $\Delta BAC \cong \Delta DAC$

لہٰذا ثابت ہوا۔

اپنے اکتساب کی جانچ کرلیں

1. متماثلت کے اصول ASA کی مدد سے آپ $\Delta DEF \cong \Delta XYZ$ بنانا چاہتے ہوں جب کہ $\angle D = \angle X$ اور $\angle F = \angle Z$ دیا گیا ہے تب اس کی بناوٹ کے لئے مزید کون سی اضافی معلومات درکار ہیں۔ (اشارہ: کچا خاکہ بنائیے)

2. حسب ذیل میں دو مثلثات کے کچھ حصوں کی پیمائشات دی گئی ہیں۔ متماثلت کے اصول ASA کے ذریعہ جانچ کیجئے آیا یہ متماثل ہیں یا نہیں؟ متماثل ہونے کی صورت میں انہیں علامتی شکل میں لکھئے۔

(i) $\angle Q = 60^0$, $\angle R = 80^0$, $QR = 5cm$　$\angle D = 60^0$, $\angle F = 80^0$, $DF = 5cm$

(ii) $\angle A = 80^0$, $PQ = 5$ cm, $\angle R = 30^0$, $\angle E = 80^0$, $\angle F = 30^0$, $EF = 5cm$

3. اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ اور $\angle A = 30^0$ تب $\angle E + \angle F$ کی قدر معلوم کیجئے۔

اسی طرح ہم مزید ایک اور اصول بھی بنا سکتے ہیں جس کا اطلاق صرف دو قائم الزاویہ مثلثات پر ہی ہوسکتا ہے۔ آیئے ہم اس کو باضابطہ طور پر اس طرح بیان کرتے ہیں۔

RHS متماثل کا اُصول: اگر ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر اور ایک ضلع بالترتیب ایک دوسرے قائم الزاویہ مثلث کے وتر اور ایک ضلع کے مساوی ہو تب وہ مثلث متماثل ہوں گے۔

مثلث کے متماثلت کے اس اُصول کو استعمال کرتے ہوئے ہم باضابطہ طور پر حسب ذیل مسئلوں کو بیان کرتے ہیں۔

(i) مثلث کے مساوی ضلعوں کے مقابل کے زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

(ii) اس کے برعکس مثلث کے مساوی زاویوں کے مقابل کے ضلع مساوی ہوتے ہیں۔

مثال 7 : حسب ذیل میں دو مثلثات کے چند حصوں کی پیمائشات دی گئی ہیں۔ متماثلت کے اصول RHS کو استعمال کرتے ہوئے جانچ کیجئے کہ آیا یہ دو مثلثات متماثل ہیں یا نہیں۔ اگر یہ مثلثات متماثل ہیں تب اس نتیجہ کو علامتی شکل میں لکھئے۔

	ΔBAC	ΔDAC
(i)	$\angle B = 90^0$, $AC = 8cm$, $AB = 3cm$	$\angle P = 90^0$, $PR = 3cm$, $QR = 8cm$
(ii)	$\angle A = 90^0$, $AC = 5cm$ $BC = 9cm$,	$\angle Q = 90^0$, $PR = 8cm$, $PQ = 5cm$

حل: (i) یہاں دیا گیا ہے کہ

$\angle B = \angle P = 90^0$

$AC = QR = 8$ cm (وتر)

$AB = PR = 3$ cm

متماثلت کا اُصول RHS کی رو سے

اس لئے $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(ii) یہاں دیا گیا ہے کہ

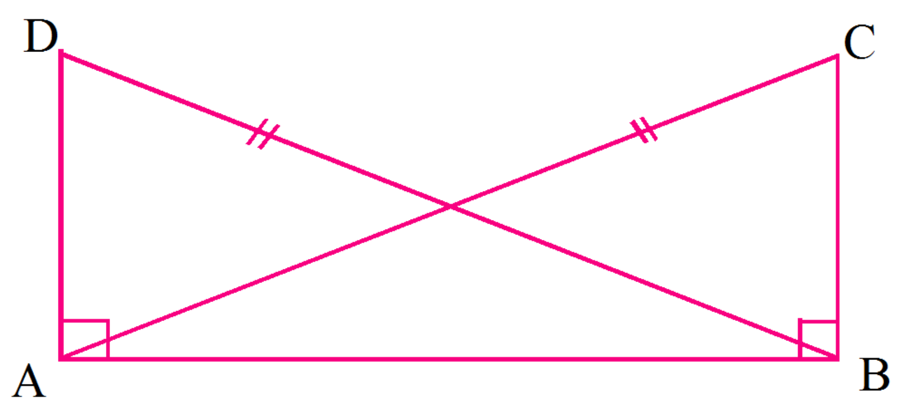
$\angle A = \angle Q = 90^0$

$AC = PQ = 5$cm.

لیکن $BC \neq PR$ $\because$ [$BC = 5$cm, $PR = 8$cm]

اس لئے یہ مثلثات متماثل نہیں ہیں۔

مثال 8 : دی گئی شکل میں $\overline{DA} \perp \overline{AB}$، $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ اور $AC = BD$ بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



حل: ΔABC اور ΔBAD کی رو سے

دیا گیا ہے کہ $\underline{|ABC} = \underline{|BAD} = 90^0$

$AC = BD$ (دیا گیا ہے)

$AB = BA$ (مشترک ضلع)

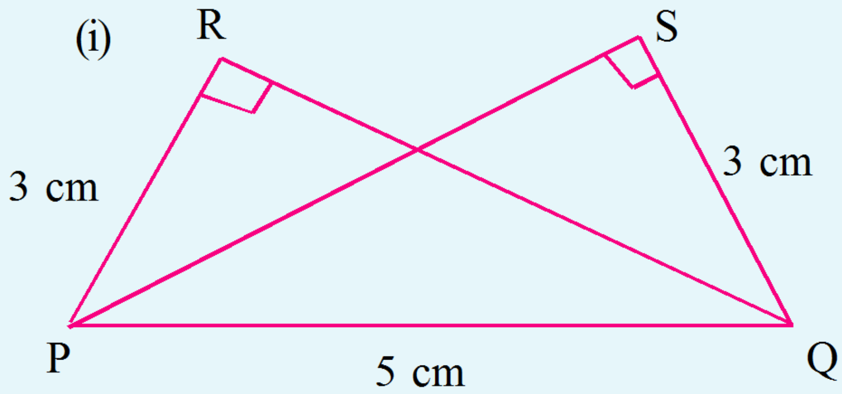
متماثلت کا اُصول RHS کی رو سے

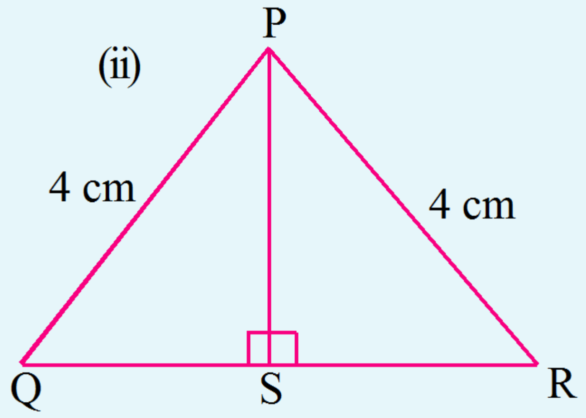
$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

لہٰذا ثابت ہوا۔

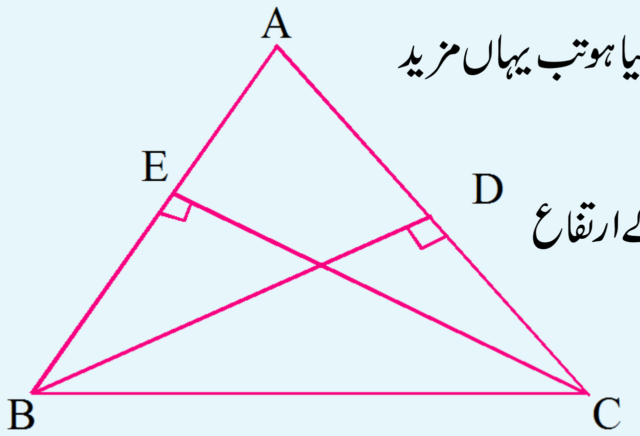
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. حسب ذیل دی گئی شکل میں مثلثات کے چند حصوں کی پیائشات دی گئی ہیں۔ متماثلت کے اُصول RHS کے استعمال سے بتلایئے کہ کونسے مثلثات کے جوڑ متماثل ہیں اگر یہ متماثل ہوں تو نتیجہ کو علامتی شکل میں لکھئے۔





2. متماثلت کے اُصول RHS کے ذریعہ سے $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ کی بناوٹ کرنی ہو جب کہ $\angle B = \angle P = 90^0$ اور $AB = RP = ?$ دیا گیا ہو تب یہاں مزید کونسی اضافی معلومات درکار ہوں گی۔

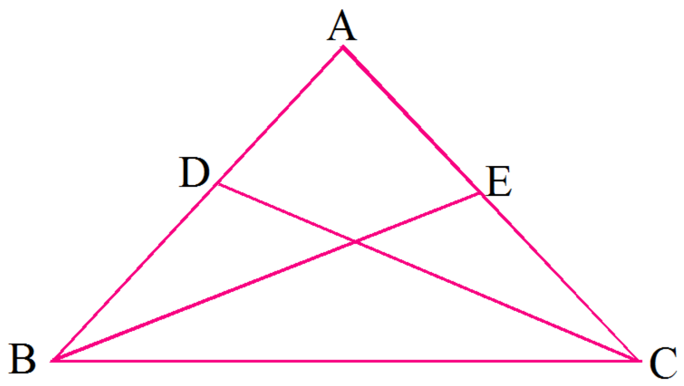


3. دی گئی شکل میں BD اور CE مثلث ABC کے ارتفاع ہیں اس طرح کہ $BD = CE$ تب بتلایئے کہ $\Delta CBD \cong \Delta BCE$

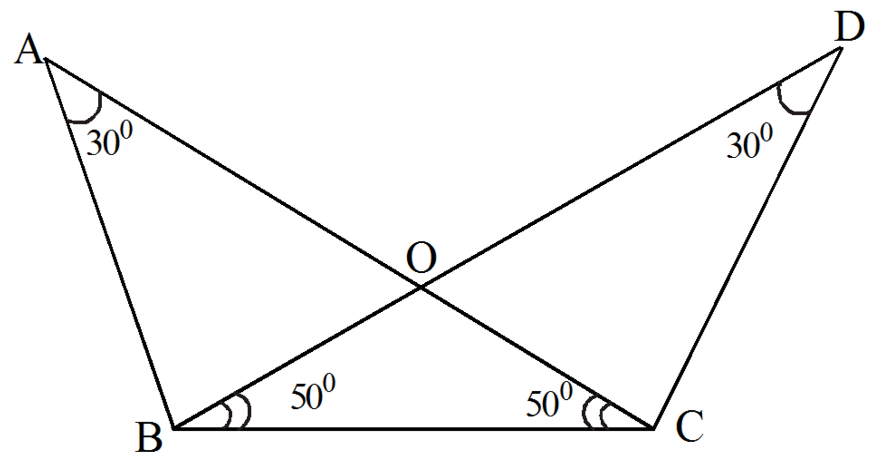
مشق

1. ΔABC میں اگر وسطانیہ AD قاعدہ BC پر عمود اور ہو تب ثابت کرو کہ یہ مثلث مساوی الساقین مثلث ہے۔
[اشارہ: متماثلت کا اُصول RHS کو استعمال کیجیے]

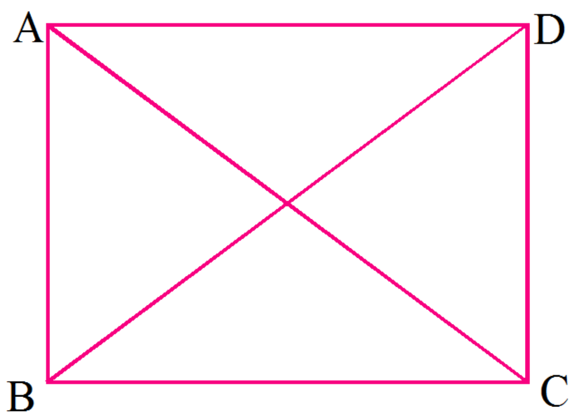
2. مساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع کے ناصف بھی مساوی ہوتے ہیں۔
[اشارہ: ثابت کرو کہ $\Delta DBC \cong \Delta ECB$]



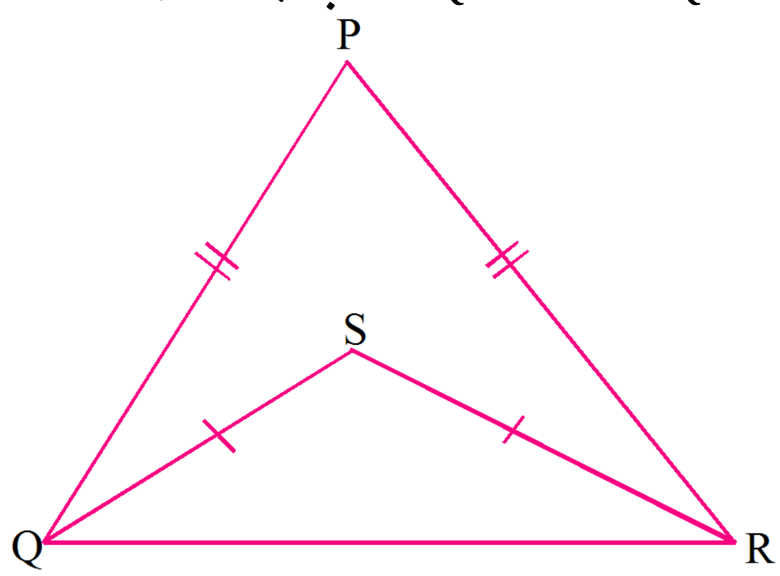
3. حسب ذیل شکل میں بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta DCB$



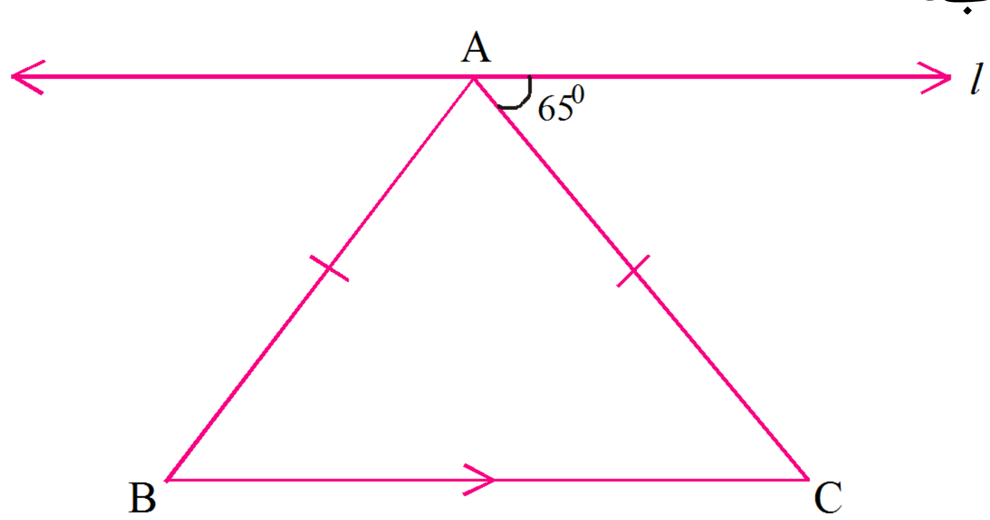
4. مربع ABCD میں بتلایئے کہ $\Delta ABC \cong \Delta BCD$



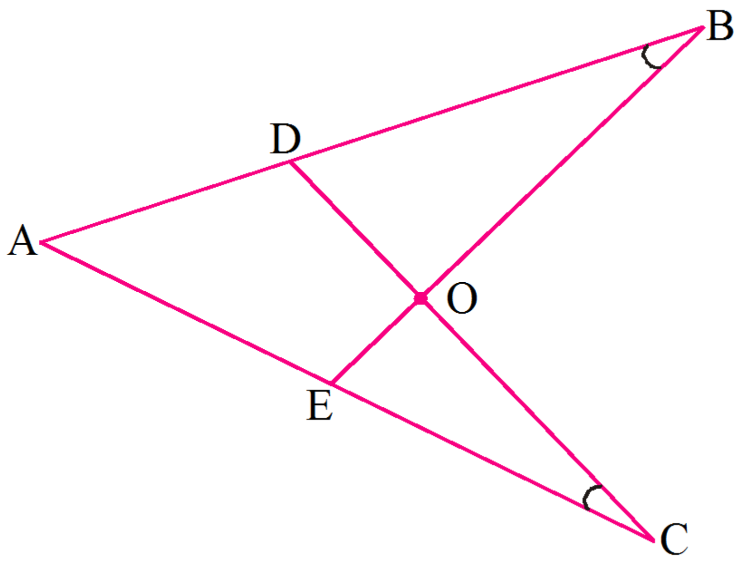
5. دی گئی شکل میں اگر $PQ = PR$ اور $SQ = SR$ ہو تب ثابت کرو کہ $\angle PQS = \angle PRS$



6. حسب ذیل دی گئی شکل میں l متوازی ہے مساوی الساقین مثلث ΔABC کے قاعدہ BC کے تب اس مثلث کے زاویے معلوم کیجئے۔

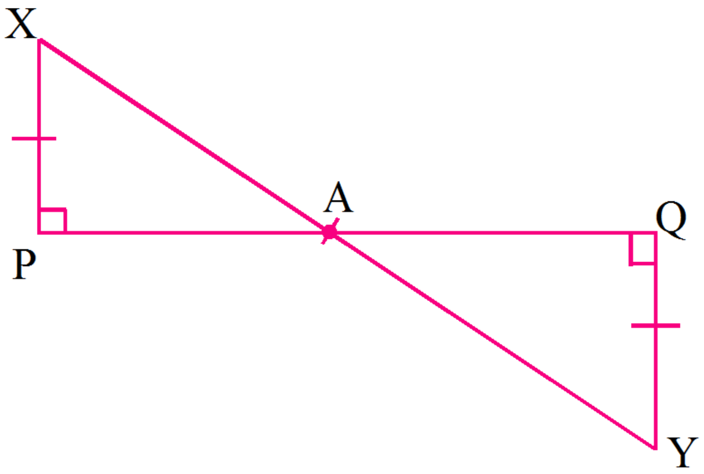


7. ΔABC میں $AB = AC$ اور P ایک نقطہ مثلث کے اندرون اس طرح ہے کہ $\angle ABP = \angle ACP$ تب ثابت کروکہ AP زاویہ $\angle BAC$ کا ناصف ہے۔



8. دی گئی شکل میں $\angle B = \angle C$ اور $AB = AC$
ثابت کروکہ $\Delta ACD \cong \Delta ABC$

9. دی گئی شکل میں PX اور QY، PQ پر عمودوار ہے اور $PX = QY$ تو بتلایئے کہ $AX = AY$



آیئے خلاصہ کریں

- اشکال جن کی یکساں شکل اور یکساں جسامت ہوتی ہیں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔
- دو متماثل اشکال کو جب ایک دسرے کے اوپر رکھا جاتا ہے تب وہ ایک دوسرے کا مکمل طور پر احاطہ کرتے ہیں ایک شکل کے تمام حصے کسی دوسری شکل کے نظیری حصوں کے مساوی ہوتب یہ طریقہ انطباق کہلاتا ہے یعنی وہ اشکال ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔
- دو خطی قطعات جیسے $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ متماثل ہوتے ہیں اگر ان کے طول مساوی ہوں۔اس کو $AB \cong CD$ لکھا جاتا ہے ۔ تاہم عام طور سے اس کو $AB = CD$ لکھتے ہیں۔
- دو متماثلات متماثل ہیں ثابت کرنے کے لئے ہمیں ان کے صرف تین نظیری حصوں کی مساویت (تساوی) جاننے کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ نظیری حصے حسب ذیل متاثلت کے کسی بھی اُصول کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) SSS   (ii) SAS   (iii) ASA   (iv) RHS

سبق 4.5

چار ضلعی

Quadrilaterals

4.5.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- مختلف اقسام کے چار ضلعی جیسے منحرف، متوازی الاضلاع، مستطیل، معین اور مربع کو بیان کریں گے۔
- مختلف اقسام کے چار ضلعی کے خصوصیات کی تصدیق کریں گے۔
- ایک مثلث کے وسطی نقطہ کے مسئلہ کی تصدیق کریں گے۔
- مساوی مقطوعہ نظریہ کی تصدیق کریں گے۔
- ایک متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو مساوی رقبہ والے مثلثات میں تقسیم کرتا ہے اس کی تصدیق کریں گے۔
- چار ضلعی کے تصورات اور اس کے نتائج پر مبنی سوالات کو حل کریں گے۔

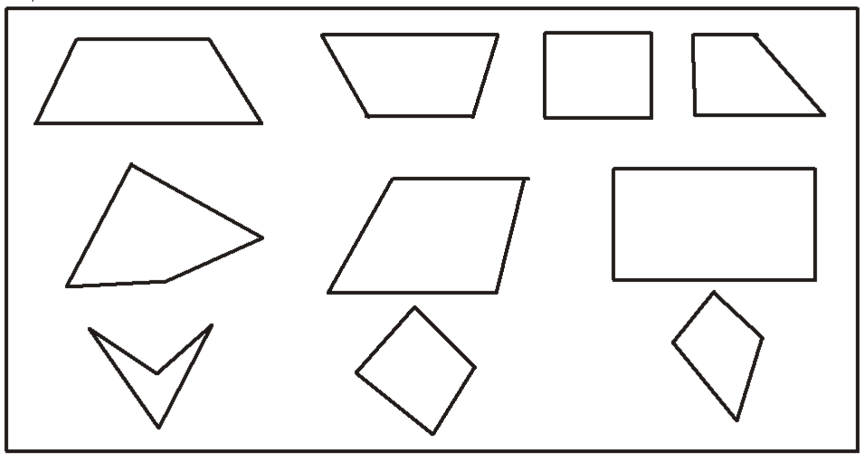
4.5.1 تعارف

ہمارے اطراف و اکناف میں ہم کئی اشیاء کا مشاہدہ کرتے ہیں جو چار خطی قطعوں سے گھری ہوتی ہیں۔ کوئی بھی سطح جیسے بلاک بورڈ، دروازہ، بریڈ کا سلائس، کمرہ کا فرش ایک بند شکل کی مثالیں ہیں جو چار خطی قطعوں سے گھری ہوئی ہیں ایسے اشکال چار ضلعی کہلاتے ہیں۔

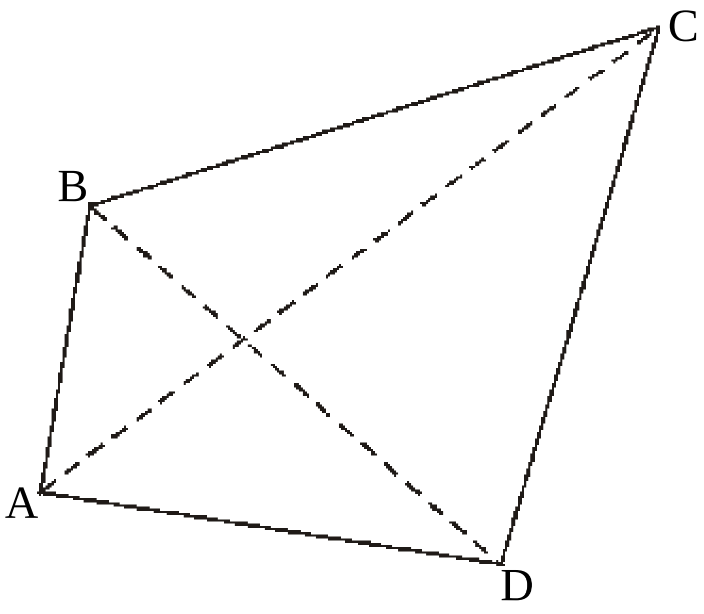
اس سبق میں ہم چار ضلعی کے بارے میں پڑھیں گے۔

4.5.2 چار ضلعی

آیئے حسب ذیل اشکال پر غور کرتے ہیں ان کے راس، اضلاع اور زاویوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



شکل 4.5.1



مذکورہ بالا اشکال میں آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟

ہم نے دیکھا کہ تمام اشکال کے اضلاع، زاویئے اور راس کی تعداد ایک ہی ہے۔ ہم نے یہ بھی مشاہدہ کیا کہ یہ تمام اشکال بند اشکال ہیں ہم اس کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

"چار ضلعی ایک بند شکل ہوتی ہے جو چار خطی خطوں سے گھری ہوتی ہے"

متصلہ شکل چار ضلعی کو ہم ABCD کا نام دیں گے یا □ ABCD

متصلہ شکل کی مدد سے ہم ذیل میں ایسا لکھ سکتے ہیں۔ ایک چار ضلعی ABCD میں

(i) AB، BC، CD اور DA اضلاع کہلاتے ہیں۔

(ii) A، B، C، D راس کہلاتے ہیں۔

(iii) $\angle ABC$ ، $\angle BCD$ ، $\angle CDA$ اور $\angle DAC$ زاویئے کہلاتے ہیں۔

(iv) ایک چار ضلعی کے غیر متصلہ راسوں کو ملانے سے بننے والے خطی مقطوعے چار ضلعی کے وتر کہلاتے ہیں۔ جیسے AC اور BD وتر ہیں۔

(v) چار ضلعی کے دو اضلاع جو مشترک راس رکھتے ہیں متصلہ اضلاع کہلاتے ہیں۔ AB اور BC متصلہ اضلاع ہیں۔ چار ضلعی میں متصلہ اضلاع کے چار جوڑ ہوتے ہیں باقی متصلہ اضلاع کے جوڑ کے نام بتایئے؟

(vi) چار ضلعی کے دو زاویئے جو مشترک ضلع رکھتے ہیں متصلہ زاویئے کی ایک جوڑ کہلاتے ہیں جیسے $\angle ABC$ اور $\angle BCD$ متصلہ زاویئے کی ایک جوڑ ہے۔ ایک چار ضلعی میں متصلہ زاویوں کے چار جوڑ ہوتے ہیں۔ باقی متصلہ زاویوں کے جوڑ کے نام لکھئے۔

(vii) ایک چار ضلعی کے دو اضلاع جو مشترک راس نہیں رکھتے ہیں چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کی جوڑ کہلاتے ہیں۔ جیسے AB، CD اور AD ، BC چار ضلعی کے مقابل کے اضلاع کی دو جوڑ کہلاتے ہیں۔

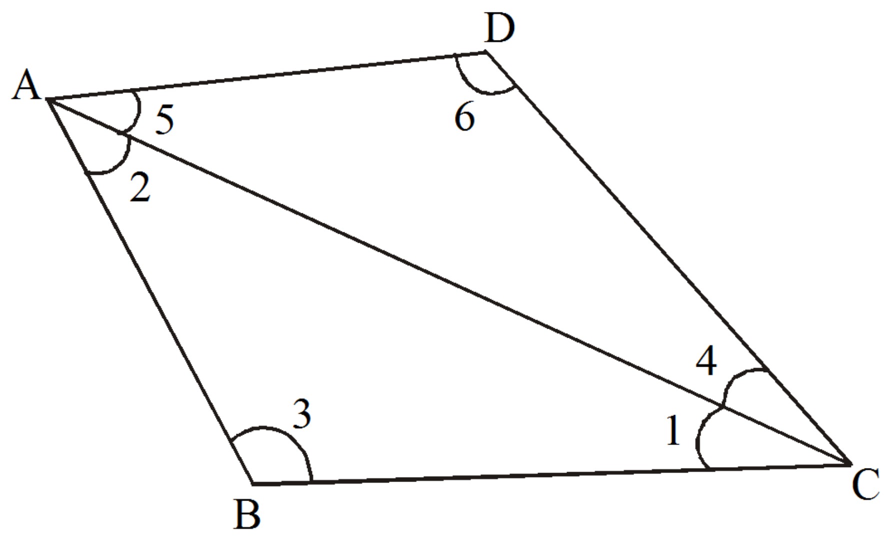
(viii) ایک چار ضلعی کے دو زاویئے جو مشترک ضلع نہیں رکھتے ہیں چار ضلعی کے مقابل کے زاویئے کی جوڑ کہلاتے ہیں۔ جیسے $\angle BAD$ ، $\angle DCB$ اور $\angle ADC$ ، $\angle CBA$ چار ضلعی کے مقابل کے زاویوں کی جوڑ کہلاتے ہیں۔

4.5.3 ایک چار ضلعی کی زاویہ مجموعہ خاصیت

آیئے ایک مثلث کے زاویہ مجموعہ خاصیت کو دہراتے ہیں جیسا کہ ایک مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ کیا ہم چار ضلعی کے زاویوں کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں۔

آیئے اب ہم چار ضلعی کی زاویہ مجموعہ خاصیت کے بارے میں پڑھتے ہیں۔

مشغلہ



فرض کیجئے کہ چارضلعی ABCD ہے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ AC ایک وتر ہے۔ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ AC اس شکل کو دو مثلثات میں تقسیم کرتا ہے۔دی گئی شکل میں کتنے زاویے ہیں؟ چھ زاویے ہیں۔ $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 3$ ، $\angle 4$ ، $\angle 5$ اور $\angle 6$ جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

مان لیجے ΔABC میں زاویہ مجموعہ خاصیت کے لحاظ سے

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0 \quad \text{......(i)}$$

اس طرح ΔACD میں زاویہ مجموعہ خاصیت کے لحاظ سے

$$\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^0 \quad \text{......(ii)}$$

اگر ہم مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرتے ہیں تو ہمیں کیا حاصل ہوتا ہے؟

$$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180^0 + 180^0$$

ارکان کو دوبارہ ترتیب دینے پر ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے

$$(\angle 2 + \angle 5) + \angle 3 + (\angle 1 + \angle 4) + \angle 6 = 360^0$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0 \quad \left| \begin{array}{l} \because \angle 1 + \angle 4 = \angle C \\ \because \angle 2 + \angle 5 = \angle A \end{array} \right.$$

اس طرح ہم نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $A + B + C + D = 360^0$

لہٰذا ایک چارضلعی کے چار زاویوں کا مجموعہ 360^0 ہوتا ہے۔

چارضلعی کے زاویہ مجموعہ خاصیت کی مدد سے چند مزید مثالوں کو حل کرتے ہیں۔

مثال-1 : ایک چارضلعی کے زاویے 55^0، 65^0اور 105^0 ہیں تب اس کا چوتھا زاویہ معلوم کیجیے۔

حل: دیئے گئے زاویے 55^0، 65^0اور 105^0

مان لیجے $A = 55^0$، $C = 105^0$ $B = 65^0$، $D = ?$

چارضلعی ABCD کی زاویہ مجموعہ خاصیت کے لحاظ سے

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow 55^0 + 65^0 + 105^0 + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow 225^0 + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow \angle D = 360^0 - 225^0 = 135^0$$

مثال-2 : ایک چارضلعی کے زاویئے x^0، $(x-10)^0$، $(x+30)^0$ اور $2x^0$ ہیں تب اس کے زاویئے معلوم کیجئے۔

حل: مان لیجئے $\angle A = x^0$ ، $\angle B = (x-10)^0$ ، $\angle C = (x+30)^0$ اور $\angle D = 2x^0$

چارضلعی ABCD کے زاویہ مجموعہ خاصیت کی رو سے

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad x + (x-10) + (x+30) + 2x = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 20^0 = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 5x = 360^0 - 20^0$$

$$= 340^0$$

$$x = \frac{340}{5} = 68$$

اس طرح

$$\angle A = x = 68^0$$

$$\angle B = (x-10)^0 = 58^0$$

$$\angle C = (x+30)^0 = 98^0$$

$$\angle D = (2x)^0 = 136^0.$$

مثال-3 : ایک چارضلعی کے زاویے 3:4:5:6 کی نسبت میں ہیں تب زاویے معلوم کیجئے۔

حل: مان لیجئے کہ

$$\angle A = 3x, \quad \angle B = 4x, \quad \angle C = 5x \quad \angle D = 6x$$

چارضلعی ABCD کی زاویہ مجموعہ خاصیت کی رو سے

$$\Rightarrow \quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 4x + 5x + 6x = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad 18x = 360$$

$$x = \frac{\overset{20}{\cancel{360}}}{\cancel{18}_1} = 20^0$$

لہٰذا زاویے ہیں۔

$$\angle A = 3 \times 20 = 60^0$$

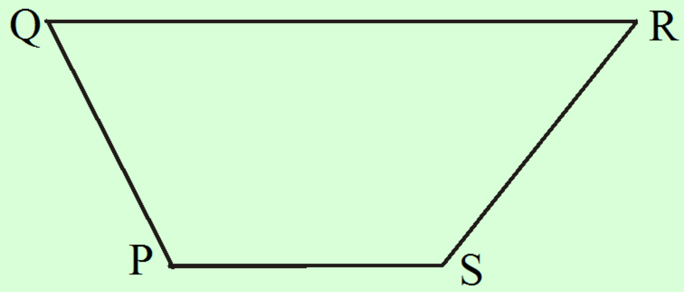
$$\angle B = 4 \times 20 = 80^0$$

$$\angle C = 5 \times 20 = 100^0$$

$$\angle D = 6 \times 20 = 120^0$$

جانچئے آپ نے کس حد تک سیکھا

1. دیئے گئے چار ضلعی PQRS میں



(i) اضلاع، زاویے، راس اور وتروں کے نام لکھئے۔

(ii) متعلقہ اضلاع، متصلہ زاویے، مقابل کے اضلاع اور مقابل کے زاویوں کے تمام جوڑ کے نام لکھئے۔

2. اگر ایک چار ضلعی کے تین زاویے بالترتیب 60^0 اور 120^0 ہیں تب اس کا چوتھا زاویہ معلوم کیجئے۔

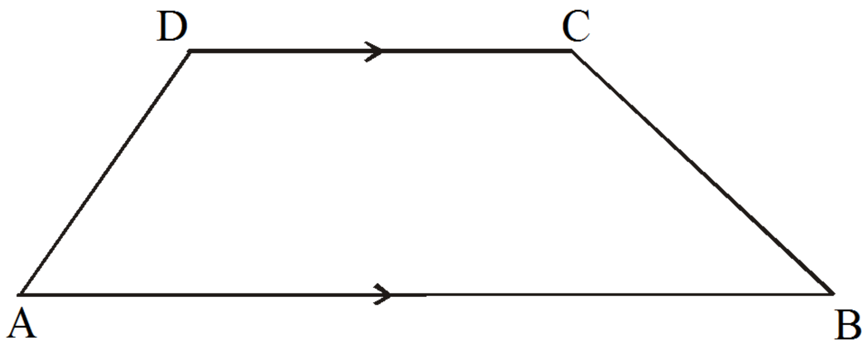
3. اگر ایک چار ضلعی کے زاویے x^0، $(x + 10)^0$، $(x + 20)^0$ اور $(x + 30)^0$ ہیں تب اس کے زاویے معلوم کیجئے۔

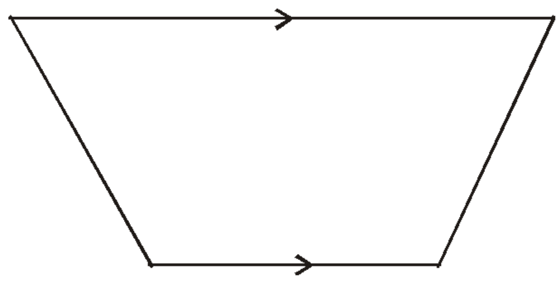
4. حمید کہتا ہے کہ ''ایک چار ضلعی کے زاویے 1:2:3:6 کی نسبت میں نہیں ہوتے ہیں'' کیا آپ اس بیان سے متفق ہیں؟ اپنے جواب کی تصدیق کیجئے۔

4.5.4 چار ضلعی کے اقسام

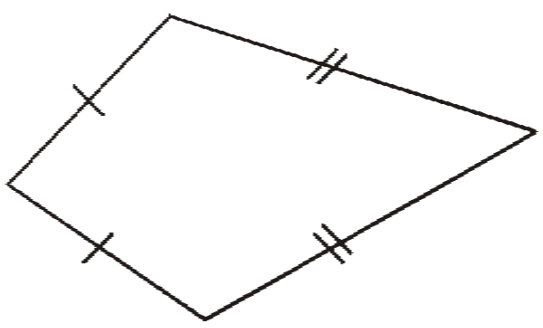
ہم چار ضلعی کے مختلف اشکال سے اچھی طرح واقف ہیں۔ ہم چار ضلعی کے خصوصیات اور ان کے زاویوں کے مجموعہ خاصیت کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم چار ضلعی کے مختلف اقسام کے بارے میں مطالعہ کرتے ہیں۔

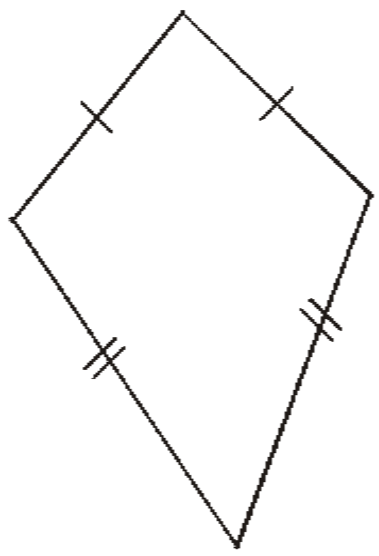
1. **منحرف:** چار ضلعی جس کے مقابل کے اضلاع کا ایک جوڑ متوازی ہوتا ہے تب یہ منحرف کہلاتا ہے۔



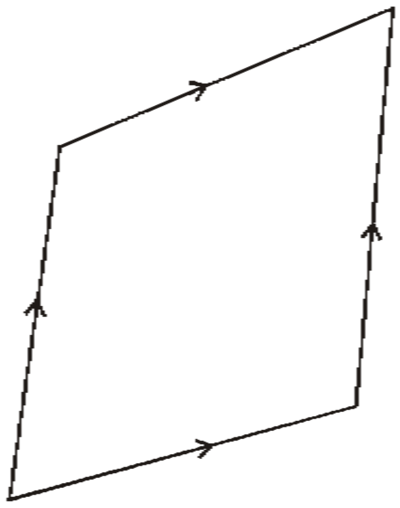


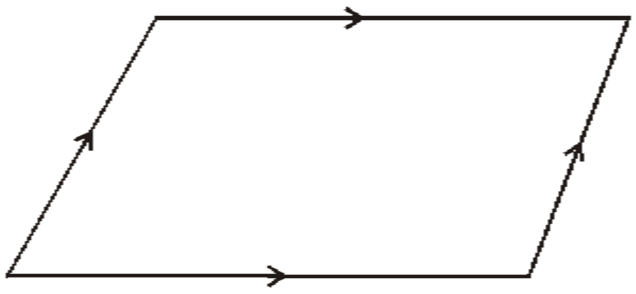
2. **پتنگ:** چار ضلعی جس کے متصلہ اضلاع کا ایک جوڑ مساوی ہوتا ہے تب یہ پتنگ کہلاتا ہے۔



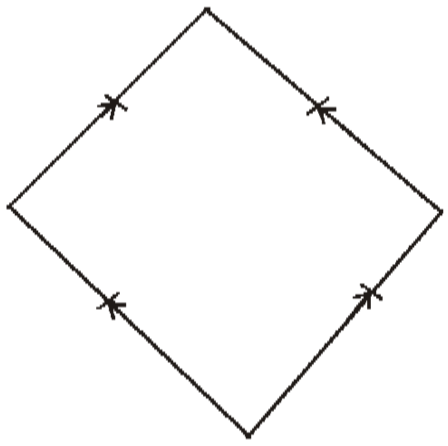


.3 **متوازی الاضلاع:** ایک چار ضلعی جس کے مقابل کے اضلاع کے دو جوڑ متوازی ہوتے ہیں تب یہ متوازی الاضلاع کہلاتا ہے۔

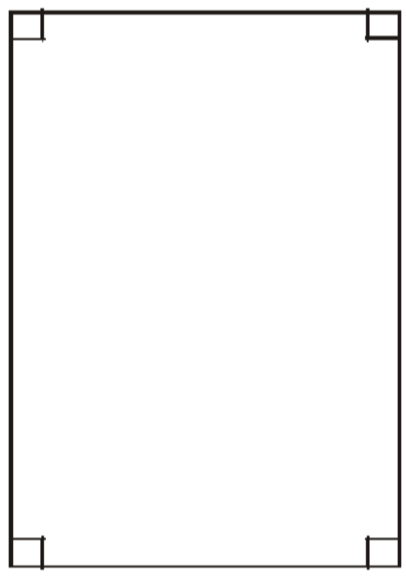




.4 **معین:** ایک چار ضلعی جس کے چار اضلاع مساوی ہوتے ہیں معین کہلاتا ہے۔



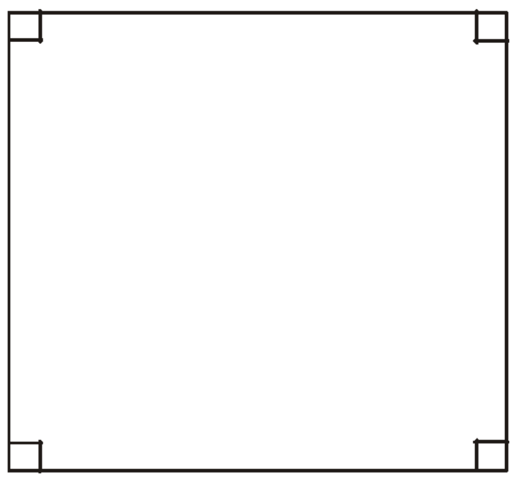
.5 **مستطیل:** ایک چار ضلعی جس کے چار زاویے مساوی ہوتے ہیں تب یہ ایک مستطیل کہلاتا ہے۔

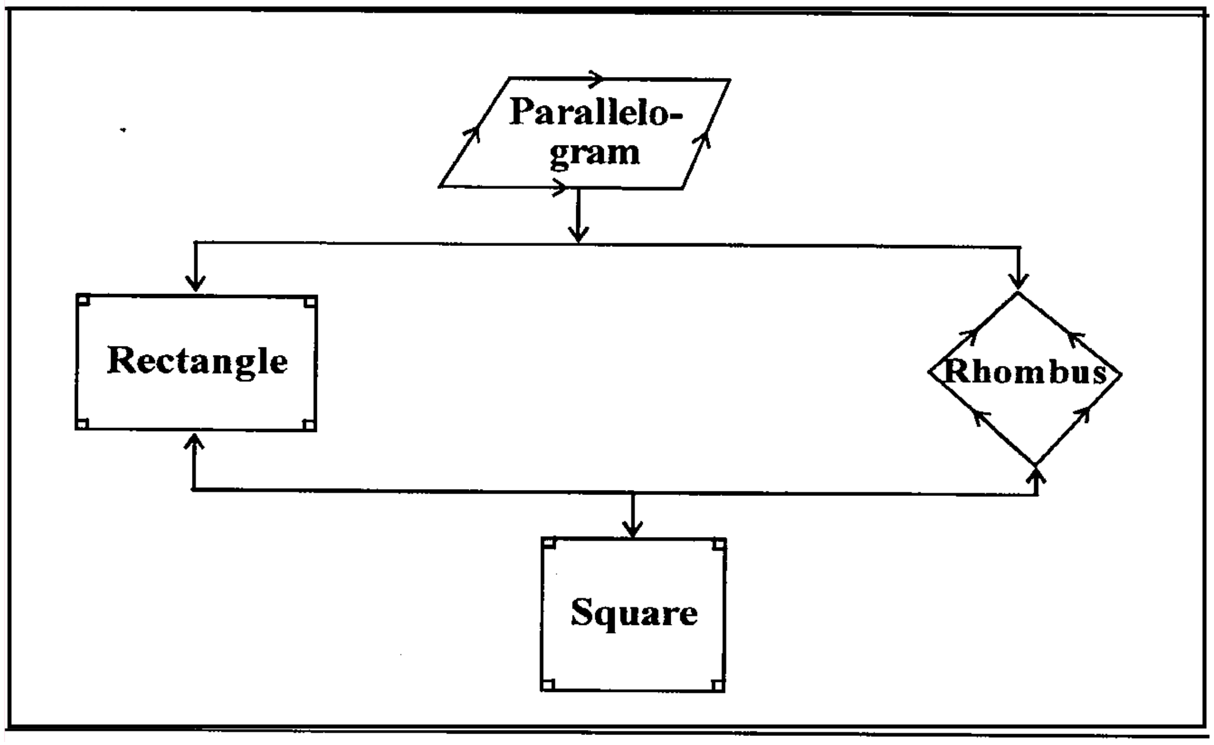


.6 **مربع:** ایک مربع ایک مستطیل ہوتا ہے جس کے متصلہ اضلاع کا جوڑ مساوی ہوتا ہے۔

(یا)

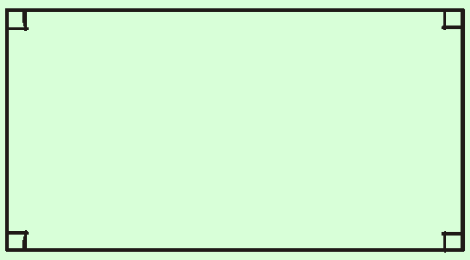
ایک متوازی الاضلاع جس کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور اس کا ہر ایک زاویہ ایک قائم زاویہ ہوتا ہے ایک مربع کہلاتا ہے۔



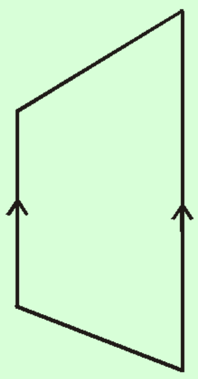


اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

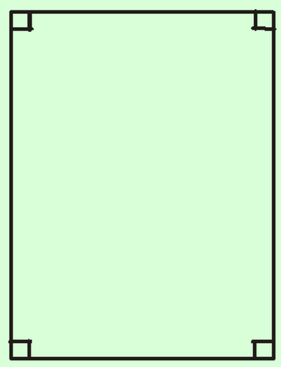
.1 ذیل کی ہر ایک چار ضلعی کا نام لکھئے۔



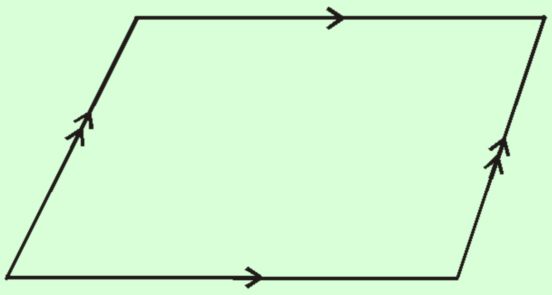
(i)



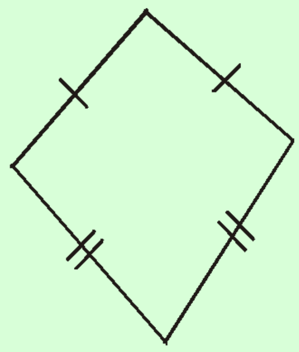
(ii)



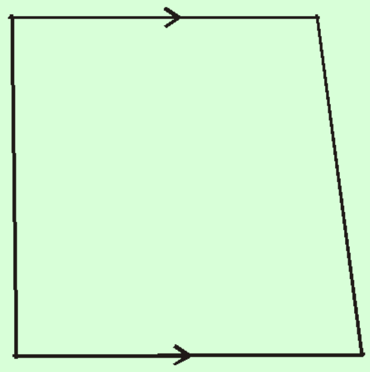
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

.2 بتائیے آیا ذیل کے بیانات صادق ہیں یا نہیں

(i) تمام مستطیل مربع ہوتے ہیں۔

(ii) ایک مستطیل‘ ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

(iii) ایک مربع ایک معین ہوتا ہے۔

(iv) ایک معین‘ ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

(v) ایک مربع ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

(vi) ایک متوازی الاضلاع‘ ایک معین ہوتا ہے۔

(vii) ایک منحرف ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔

(viii) ایک منحرف‘ ایک مستطیل ہوتا ہے۔

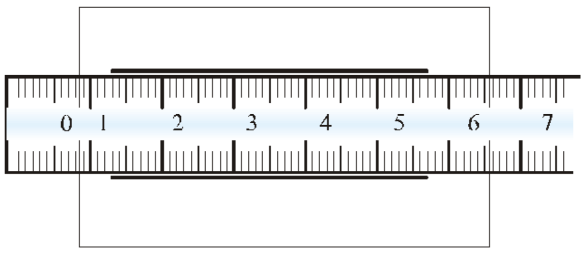
(ix) ایک متوازی الاضلاع ایک منحرف ہوتا ہے۔

4.5.5 مختلف اقسام کے چار ضلعی کی خصوصیات

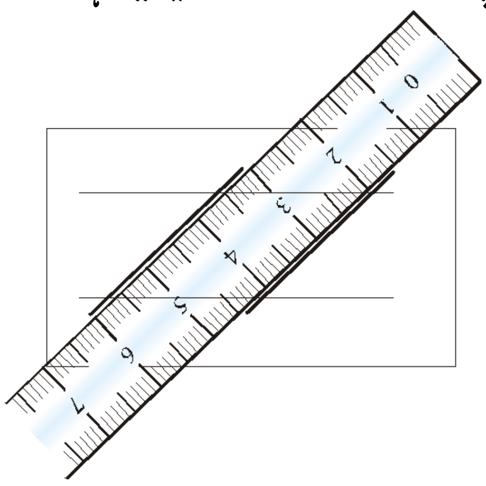
ہم مختلف اقسام کے چار ضلعی کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ آیئے اب ہم چار ضلعی جیسے متوازی الاضلاع، مستطیل، معین اور مربع کے اضلاع، زاویوں اور ان کے وتروں کے درمیان رشتہ کے بارے میں مزید معلومات حاصل کریں گے۔

4.5.5 (a) ایک متوازی الاضلاع کی خصوصیات

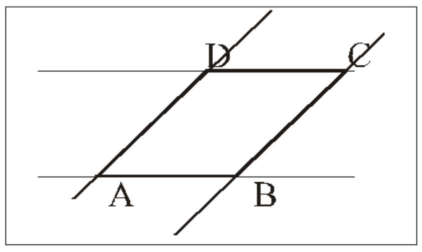
مشغلہ: ایک رولر لیجئے اس کو ایک کاغذ پر رکھئے۔ اس کے دو کناروں کی مدد سے دو خط کھینچئے۔ جیسا کہ شکل (1) میں بتایا گیا ہے۔ ان کھینچے گئے خطوط پر رولر کو تیڑھا رکھتے ہوئے خط کھینچئے جیسا کہ شکل (2) میں بتایا گیا ہے۔ اور دوبارہ اس کے کناروں کی مدد سے دو زائد خطوط کھینچئے۔



شکل 1



شکل 2



شکل 3

شکل 3 میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں اس کے مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں

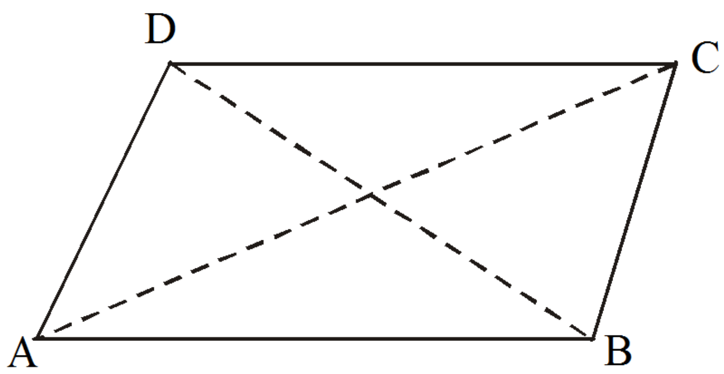
جیسے $AB \parallel CD$ اور $AD \parallel BC$ مذکورہ بالا سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہیں؟

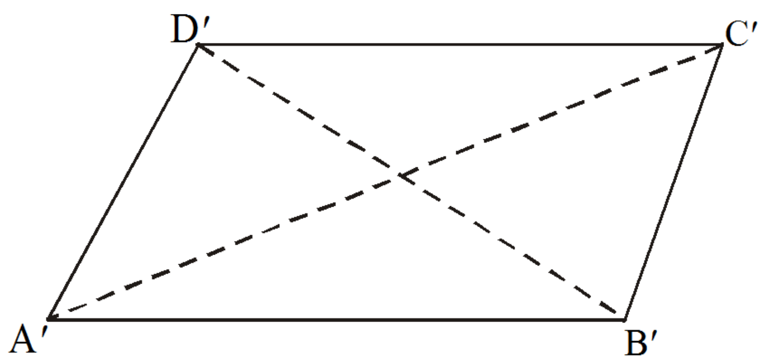
ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ''متوازی الاضلاع میں مقابل کے اضلاع متوازی ہوتے ہیں''

آیئے اور ایک مشغلہ انجام دیتے ہیں

مشغلہ

ایک جیسے دو متوازی الاضلاع لیجئے جیسے ABCD اور A، B، C، D

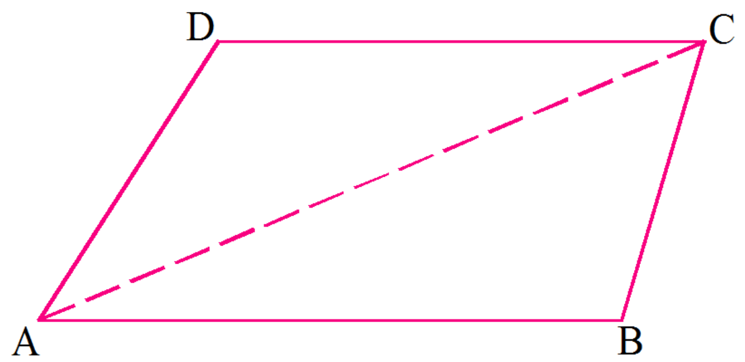




اوپر بتائی گئی اشکال میں آپ نے کیا مشاہدہ کیا ہے؟

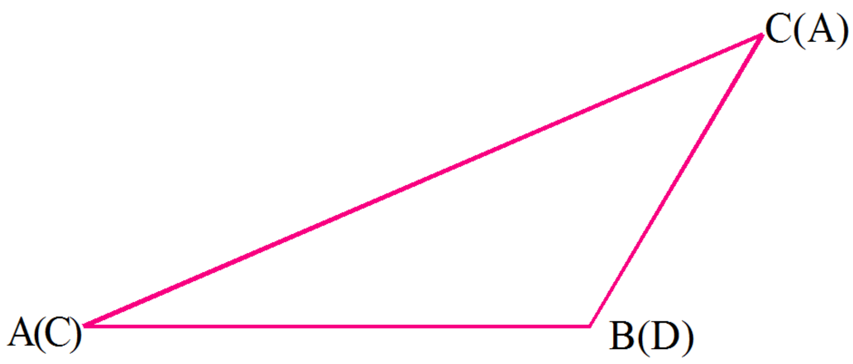
یہاں $\overline{AB}$ ، $\overline{A'B'}$ ایک جیسے ہیں سوائے نامزدگی کے۔ اس طرح دوسرے نظیری اضلاع مساوی ہیں۔ $\overline{A'B'}$ کو $\overline{DC}$ پر رکھتے ہیں۔ کیا یہ منطبق ہوتے ہیں؟ کیا $\overline{A'B'}$ اور $\overline{DC}$ کا طول مساوی ہے؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ان کا طول ایک جیسا

ہے یعنی مساوی ہے۔اسطرح دیکھتے ہیں کہ $\overline{AD}$ اور $\overline{B'C'}$ کا طول بھی مساوی ہے۔اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ان دونوں اشکال میں مقابل کے اضلاع کا طول مساوی ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع کا طول مساوی ہوتا ہے۔



آیئے ہم ایک کارڈ بورڈ لیتے ہیں اس پر کوئی ایک متوازی الاضلاع ABCD اتارتے ہیں۔اس کا وتر AC اتاریئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

اب وتر AC سے متوازی الاضلاع کو کاٹئے۔آپ کیا مشاہدہ کرتے ہو؟ ہم دیکھتے ہیں کہ ایک متوازی الاضلاع کو دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اس کا ہر ایک حصہ ایک مثلث ہے۔



اس طرح ہم کو دو مثلثات حاصل ہوتے ہیں جیسے ΔABC اور ΔADC اب ΔADC کو ΔABC پر اس طرح رکھئے کہ اس کا راس D، راس B پر اور ضلع CD، ضلع AB پر منطبق ہو جائے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ΔCDA، ΔABC پر منطبق ہو جاتا ہے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

لہٰذا $AB = CD$

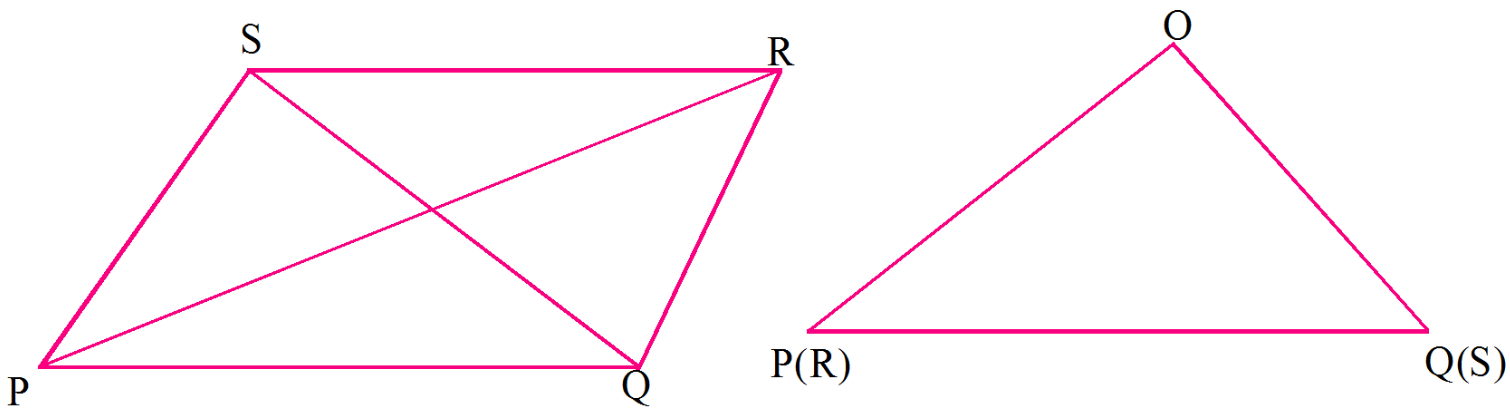
$\angle B = \angle D$ اور $BC = DA$

ہم اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں۔

- متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

آیئے دوسرے مشغلہ کو انجام دیتے ہیں تا کہ متوازی الاضلاع کے وتر کی خاصیت کی تصدیق کی جا سکے۔

مشغلہ: دوسرا کارڈ بورڈ لیجئے اس پر کوئی ایک متوازی الاضلاع PQRS اتاریئے۔اس کے وتر PR اور QS اتاریے جو نقطہ 'O' پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔



ΔPOQ اور ΔROS کو کاٹیے۔

اب ΔROS اور ΔPOQ اس طرح رکھئے کہ راس R، راس P پر اور ضلع RO، ضلع PO پر منطبق ہوجائے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $\Delta POQ \cong \Delta ROS$

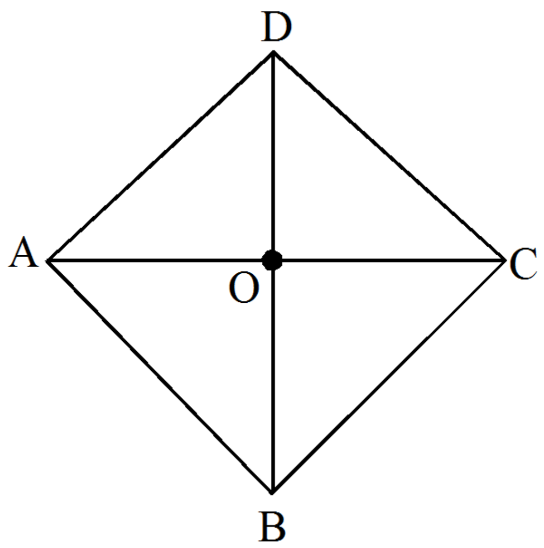
لہٰذا $RO = PO$ اور $OS = OQ$

مذکورہ بالا سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور اس کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں۔

متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اس کے علاوہ پہلے سے تصدیق شدہ ایک متوازی الاضلاع کے خصوصیات کی حسب ذیل سے تصدیق کی جاسکتی ہے۔

- چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے اگر اس کے مقابل اضلاع کے دو جوڑ مساوی ہوں۔
- چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے اگر اسکے مقابل کے زاویوں کے جوڑ مساوی ہوتے ہیں۔
- چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے اگر اس کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

4.5.5 (b) ایک معین کی خصوصیات



جیسا کہ ہم جانتے ہیں معین بھی ایک متوازن الاضلاع ہے جس میں اس کے متصلہ اضلاع کا جوڑ مساوی ہوتا ہے۔

ABCD کی شکل ایک معین ہے۔

اس طرح ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے $AB=BC$ کیونکہ ہر ایک معین ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔لہٰذا معین کے لئے حسب ذیل خصوصیات کو بیان کیا جاسکتا ہے۔

(i) مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں جیسے $AB = DC$ اور $AD = BC$

(ii) مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں جیسے $\angle A = \angle C$ اور $\angle B = \angle D$

(iii) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

یعنی $AO = OC$ اور $DO = OB$

کیونکہ معین کے متصلہ اضلاع مساوی ہوتے ہیں اور متوازی الاضلاع کی خصوصیات کی رو سے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

لہٰذا $AB = BC = CD = DA$

اس طرح ایک معین کے تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں، $\angle AOD$ اور $\angle BOC$ کی پیائش کیجئے۔

$\angle AOD$ اور $\angle BOC$ کی پیمائش کے بارے میں آپ کی رائے کیا ہے؟

ہم دیکھتے ہیں کہ ان میں ہر ایک زاویہ 90^0 کا ہے۔

$$\angle AOD = \angle BOC = 90^0$$

$\angle AOB = \angle AOD$ (یہ مخالف راس زاویے کی جوڑ ہے)

اور $\angle BOC = \angle DOA$

$$\therefore \angle AOB = \angle COD = \angle BOC = \angle DOA = 90^0$$

مذکورہ بالا سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہو؟

ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک معین کے وتر قائم زاویہ پر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اس طرح ہم ایک معین کی خصوصیات کو ذیل میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں۔

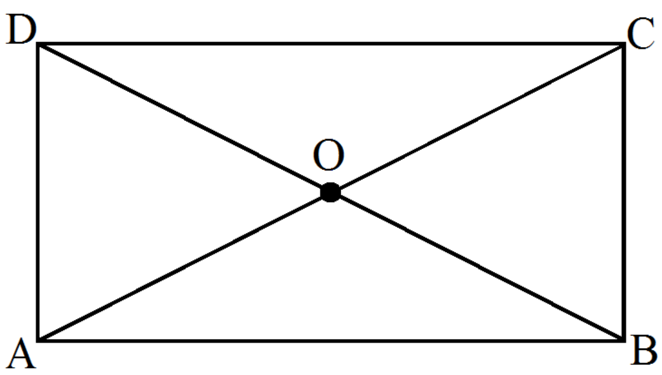
- ایک معین کے تمام اضلاع کا طول مساوی ہوتا ہے۔
- معین کے مخالف زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- معین کے وتر زاویہ قائمہ پر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

4.5.5 (c) ایک مستطیل کی خصوصیات

ہم جانتے ہیں کہ ایک مستطیل، ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا ہر ایک زاویہ، قائم زاویہ ہوتا ہے۔ مستطیل کی خصوصیات کا اطلاق بھی دراصل ایک متوازی الاضلاع کے خصوصیات پر منحصر ہے۔ ہم ایک مستطیل سے متعلق چند مزید معلومات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

مشغلہ:

ایک مستطیل ABCD اُتاریئے اور جس کا $\angle B = 90^0$ ہو۔ وتر AC اور BC کو ملایئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔



$\angle BAD$ ، $\angle BCD$ اور $\angle ADC$ کی پیمائش کیجئے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہو؟ $\angle BAD$ ، $\angle BCD$ اور $\angle ADC$ کی پیمائش کے بارے میں آپ کی رائے کیا ہے؟

$$\boxed{\begin{aligned}\angle BAD &= \angle A\\ \angle BCD &= \angle C\\ \angle ADC &= \angle D\\ \angle ABC &= \angle B\end{aligned}}$$

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ ہر ایک زاویے کی پیمائش 90^0 ہے لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں۔

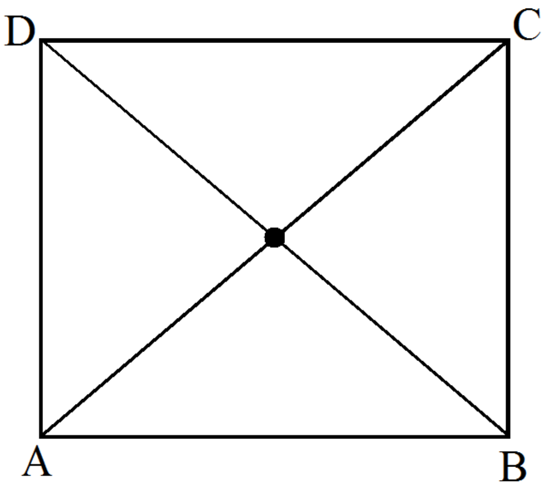
$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$$

وتر AC اور BD کے طول کی پیمائش کرتے ہیں اور کے طول کے بارے میں آپ کی رائے کیا ہے؟

ہم مشاہدہ کرتے ہیں وتر AC اور BD کے طول مساوی ہوتے ہیں جیسے AC = BD دیئے گئے مستطیل میں AO‘ OC‘ BO اور OD اور کی پیائش کرتے ہیں ہم تصدیق کریں گے کہ AO = OC اور BO = OD اور ہم کہہ سکتے ہیں ایک مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔ اس طرح ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ OA = OB = OC = OD لہٰذا ایک مستطیل کی خصوصیات حسب ذیل ہوتی ہیں۔

- مستطیل کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- مستطیل کا ہر ایک زاویہ قائم الزاویہ ہوتا ہے۔
- مستطیل کے وتر مساوی ہوتے ہیں۔
- مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

4.5.5 (d) مربع کی خصوصیات



ہم جانتے ہیں مربع بھی ایک مستطیل ہے مگر اس کے متصلہ اضلاع کے جوڑ مساوی ہوتے ہیں ایک مربع کے تصور کو اب ہم اس طرح اخذ کرسکتے ہیں کہ مربع ایک مستطیل ہے اس کے بھی وہی خصوصیات ہوں گے جو ایک مستطیل کے ہیں اب ہم ایک مربع کے چند مزید خصوصیات کے بارے میں جانیں گے۔ ایک مربع ABCD اتاریے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے کیونکہ ABCD ایک مستطیل ہے لہٰذا

(i) AD = BC ،AB = CD

(ii) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

(iii) AO = OC = OD = OB ،AC = BD

مگر ایک مربع میں خصوصیات (i) کی رو سے AB = AD

ہم اس کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں AB =AD = BC = CD

کیونکہ مربع بھی ایک معین ہوتا ہے۔

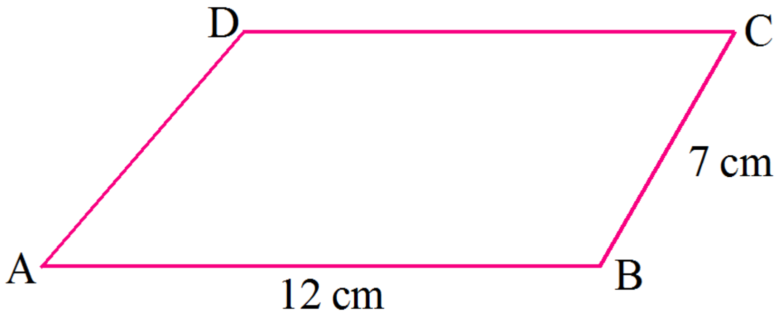
لہٰذا ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ مربع کے وتر AC اور BD ایک دوسرے قائم زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں۔

لہٰذا ایک مربع کے خصوصیات کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے

- تمام اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔
- مربع کا ہر ایک زاویہ 90^0 ہوتا ہے۔
- وتر مساوی ہوتے ہیں۔
- وتر عموداً ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

متوازی الاضلاع، معین، مستطیل اور مربع کی خصوصیات کے مزید معلومات کے لئے چند مثالوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

مثال-4 : متوازی الاضلاع ABCD کا احاطہ معلوم کیجئے۔



حل: متوازی الاضلاع ABCD میں

AB = 12 cm

BC = 7 cm

DC = AB = 12cm (∵ متوازی الاضلاع کے مقابل کے اضلاع مساوی ہوتے ہیں)

AD = BC = 7cm

لہٰذا AB + BC + CD + DA = متوازی الاضلاع کا احاطہ

= 12 + 7 + 12 + 7

= 38 cm.

مثال-5 : متوازی الاضلاع، PQRS میں اگر $\angle Q = 70^0$ تب دوسرے زاویے معلوم کیجئے۔

حل: متوازی الاضلاع PQRS میں $\angle Q = 70^0$

$\angle S = \angle Q$ (متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)

کیونکہ $\angle Q$ ، $\angle R$ اتمامی زاویے ہیں (تمامی زاویئے ہیں)

$\angle Q + \angle R = 180^0 \quad | \because \angle Q = 70^0$

$70^0 + \angle R = 180^0$

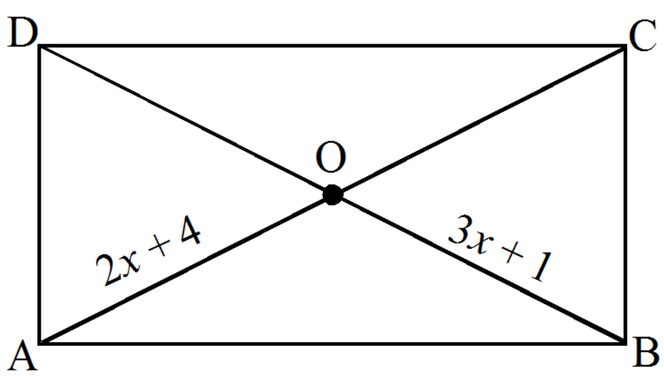
$\angle R = 180^0 - 70^0 = 110^0$

$\angle P = \angle R$ (∵ متوازی الاضلاع کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)

$= 110^0$

لہٰذا $\angle P = \angle R = 110^0$ اور $\angle Q = \angle S = 70^0$

مثال-6 : دیئے گئے مستطیل ABCD میں اس کے وتر نقطہ 'O' پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ x معلوم کیجئے اگر $OA = 2x + 4$ اور $OB = 3x + 1$



حل: مستطیل ABCD میں

$$OA = 2x + 4$$

$$OB = 3x + 1$$

کیونکہ ایک مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں $AC = 2OA = 2(2x+4)$ اور

$$BD = 2OB = 2(3x+1)$$

کیونکہ ایک مستطیل کے وتر مساوی ہوتے ہیں جیسے $AC = BD$

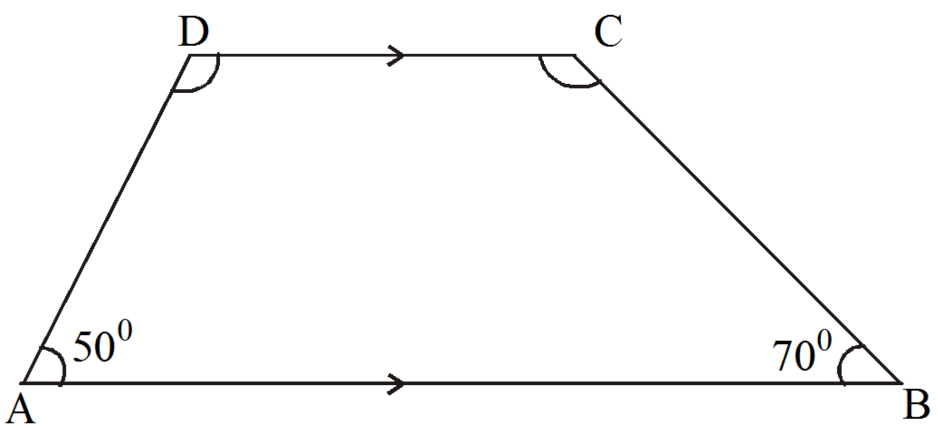
لہٰذا $2(2x+4) = 2(3x+1)$

$$\Rightarrow 2x + 4 = 3x + 1$$

$$3x + 1 = 2x + 4$$ (∵ جابدلی کی وجہ سے)

$$3x - 2x = 4 - 1$$

لہٰذا $\boxed{x = 3}$



مثال-7 : ایک منحرف ABCD میں AB متوازی ہے CD کے اگر $\angle A = 50^0$ ، $\angle B = 70^0$ تب $\angle C$ اور $\angle D$ معلوم کیجئے۔

حل: منحرف ABCD میں $\angle A = 50^0$ اور $\angle B = 70^0$

کیونکہ AB متوازی ہے CD کے

$\angle A + \angle D = 180^0$ (∵ ہم داخلی زاویے ہیں)

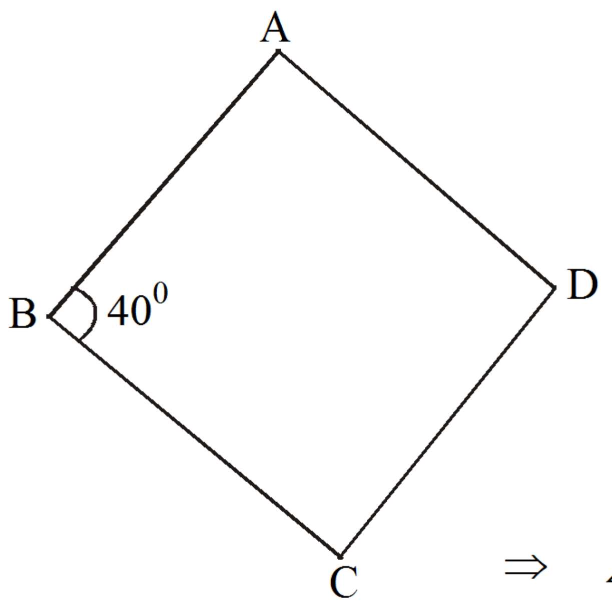
$$\Rightarrow 50^0 + = 180^0$$

$$\Rightarrow \angle D = 180^0 - 50^0 = 130^0$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\angle B + \angle C = 180^0$

$$\Rightarrow \angle C = 180^0 - 70^0 = 110^0$$

لہٰذا $\angle C = 110^0$ اور $\angle D = 130^0$



مثال-8 : ایک معین ABCD میں،

$\angle B = 40^0$ تب دوسرے زاویے معلوم کیجئے۔

حل: معین ABCD میں $\angle B = 40^0$

کیونکہ معین کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

$$\Rightarrow \quad \angle D = \angle B = 40^0$$

$\angle B + \angle C = 180^0$ [ایک ہی قاطع ضلع کے اندرونی زاویے]

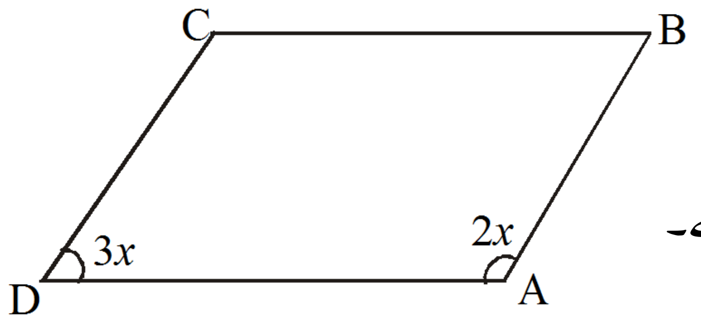
$$\Rightarrow \quad 40^0 + \angle C = 180^0$$

$$\Rightarrow \quad \angle C = 180^0 - 40^0 = 140^0$$

[معین کے مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں] اس طرح $\angle A = \angle C$

لہٰذا $\angle A = 140^0$، $\angle C = 140^0$ اور $\angle D = 40^0$

مثال-9 : ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ زاویوں کی پیمائش کی نسبت 3:2 میں ہے تب متوازی الاضلاع کے زاویے معلوم کیجئے۔



حل: متوازی الاضلاع میں، دو متصلہ زاویوں کی پیمائش 3:2 کی نسبت میں ہے۔

مان لیجئے متصلہ زاویے $\angle A = 3x$ اور $\angle D = 2x$ دیا گیا ہے۔

$\angle A + \angle D = 180^0$ ($\because$ متصلہ زاویوں کا مجموعہ 180^0 ہوتا ہے)

$$\Rightarrow 3x + 2x = 180^0$$

$$\Rightarrow 5x = 180^0$$

$$x = \frac{\overset{36}{\cancel{180}}{}^0}{\cancel{5}_1} = 36^0$$

ہم دیکھتے ہیں $\angle A = 3x = 3 \times 36^0 = 108^0$

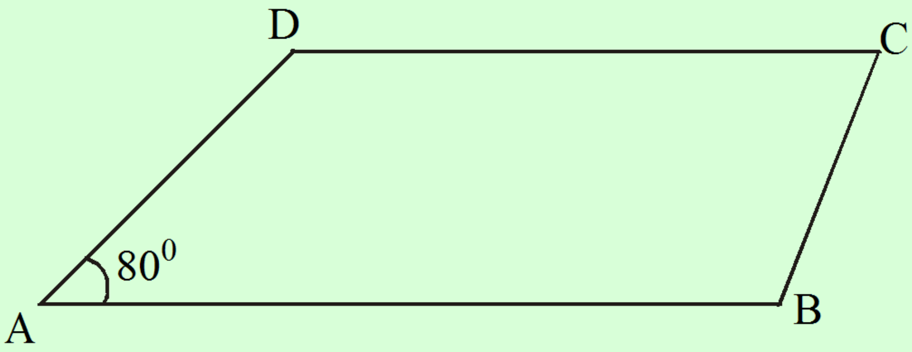
$$\angle D = 2x = 3 \times 36^0 = 72^0$$

$\angle C = \angle A = 108^0$ (مقابل کے زاویے مساوی ہوتے ہیں)

$$\angle B = \angle D = 72^0$$

لہٰذا $\angle A = 108^0$ ، $\angle B = 72^0$ ، $\angle C = 108^0$ اور $\angle D = 72^0$

اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے

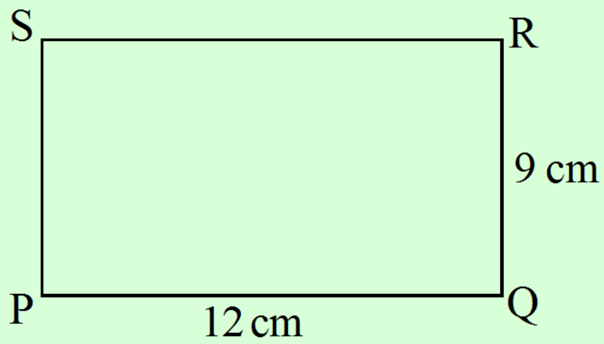


.1 دی گئی شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔اگر $\angle A = 80^0$ تب اس کے دوسرے زاویوں کی پیائش کیجئے۔

.2 ABCD ایک معین ہے جس میں $\angle B=108^0$ تب زاویہ $\angle C$ معلوم کیجئے۔

.3 اگر AC' مربع ABCD کا ایک وتر ہے تب $\angle CAB$ کی پیائش معلوم کیجئے۔[اشارہ: وتر زاویائی ناصف ہوتے ہیں]

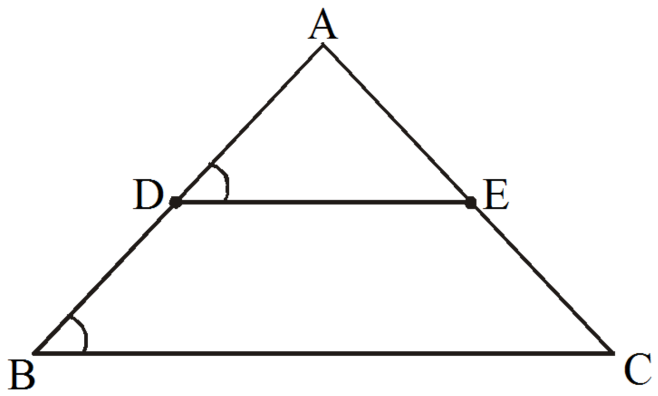
.4 ایک متوازی الاضلاع کے متصلہ زاویے x^0 اور $(2x + 30)^0$ ہیں تب متوازی الاضلاع کے تمام زاویوں کو معلوم کیجئے۔



دی گئی شکل میں PQRS ایک مستطیل ہے۔ تب اس کا احاطہ معلوم کیجئے۔

4.5.6 وسطی نقطہ مسئلہ

ہم متوازی الاضلاع کی خصوصیات کے بارے میں مطالعہ کر چکے ہیں۔مثلثات سے جڑی مزید خصوصیات کے بارے میں جانتے ہیں اس کے لئے ذیل کے مشغلہ کو انجام دیتے ہیں۔



مثلث ABC کو اتاریئے۔ AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب D اور E کی نشاندہی کیجئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

کیا ہم BC اور DE کے درمیان کسی رشتے کو معلوم کر سکتے ہیں؟ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $DE = \frac{1}{2}BC$

$\angle ADE$ اور $\angle ABC$ کی بھی پیائش کیجئے۔کیا یہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\angle ADE$ اور $\angle ABC$ بھی مساوی ہیں؟ ہاں ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ $\angle ADE = \angle ABC$ ۔ہم جانتے ہیں کہ یہ زاویے ایک نظیری زاویوں کی جوڑ بناتے ہیں۔جیسا کہ ایک نظیرے زاویے کی جوڑ کے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔اور خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

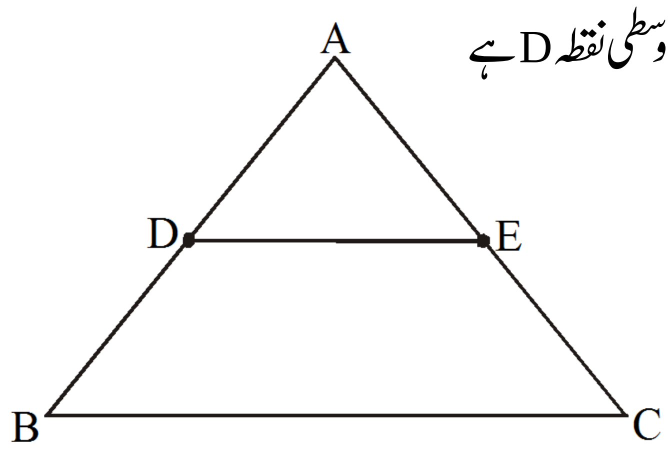
لہٰذا $DE \parallel BC$

اس تجربے کو دوسرے دو یا تین مثلثات کے ساتھ دہرایئے ان میں سے ہر ایک مثلث کا نام جیسے ABC اور اضلاع AB اور AC کے وسطی نقاط بالترتیب D اور E لیجئے۔ ان تمام صورتوں میں ہم دیکھتے ہیں $DE \parallel BC$ اور $DE = \frac{1}{2}BC$ لہٰذا ہم اس کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں ''کسی مثلث کے کوئی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے بننے والا خطی مقطوعہ اس کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور اس کا نصف ہوتا ہے۔''

ہم اس کے معکوس بیان کی بھی تصدیق کر سکتے ہیں۔ آیئے وسطی نقاط کے مسئلہ کے معکوس کو اس طرح بیان کرتے ہیں۔ ''ایک خط جو ایک مثلث کے وسطی نقطہ سے گزرتا ہے اس مثلث کے دوسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے اور اسکے تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

آیئے ہم وسطی نقاط مسئلہ اور اسکے معکوس مسئلہ پر مزید مثالوں کے ذریعہ روشنی ڈالتے ہیں۔

مثال-10 : دی گئی شکل میں ΔABC کے ضلع AB کا وسطی نقطہ D ہے۔ $DE \parallel BC$ اور $AC = 12$ cm تب AE معلوم کیجئے۔



حل: ΔABC میں $AC=12$ سمر ، $DE \parallel BC$ اور AB کا وسطی نقطہ D ہے

E بھی وسطی نقطہ ہے ضلع AC کا

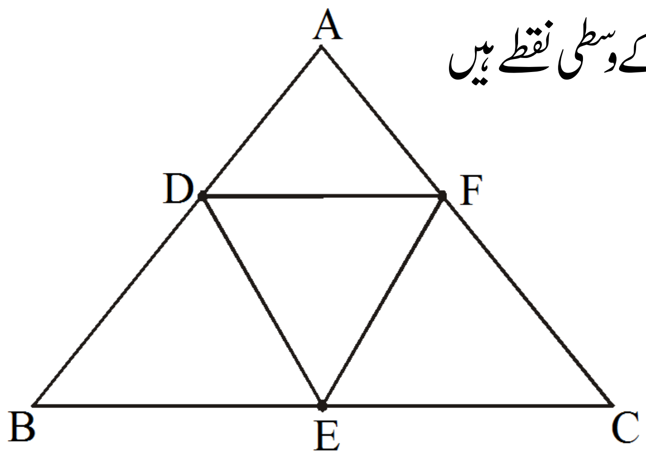
لہٰذا $AE=\frac{1}{2}AC$

$=\frac{1}{2}\times 12$

$= 6$ سمر

$AE = 6$ سنٹی میٹر

مثال-11 : ΔABC میں اگر اضلاع AB، BC اور CA کے وسطی نقاط بالترتیب D، E، F ہیں اس طرح کہ $AB=8$ سمر، $BC=7$ سمر، $CA=6$ سمر تب ΔDEF کے اضلاع کی لمبائی معلوم کیجئے۔



حل: ΔABC میں D، E، F اور اضلاع اضلاع AB، BC اور CA کے وسطی نقطے ہیں

اور

$AB = 8$ سمر

$BC = 7$ سمر

$CA = 6$ سمر

جیسا کہ AB کا وسطی نقطہ D ہے اور AC کا وسطی نقطہ F ہے۔

اس طرح $DF \parallel BC$

ہم دیکھتے ہیں $DF=\frac{1}{2}BC$ (وسطی نقطہ مسئلہ کی رو سے)

$$=\frac{1}{2}\times 7 = 3.5cm$$

لہٰذا AB کا وسطی نقطہ D ہے اور BC کا وسطی نقطہ E ہے۔

لہٰذا $DE \parallel AC$

$DE = \frac{1}{2}AC$ (وسطی نقطہ سکہ کی رو سے)

$$=\frac{1}{2}\times 6$$

$$=3cm$$

اس طرح AC کا وسطی نقطہ F ہے اور BC کا وسطی نقطہ E ہے۔ $EF \parallel AB$

$EF = \frac{1}{2}AB$ (وسطی نقطہ مسئلہ کی رو سے)

$$=\frac{1}{2}\times 8$$

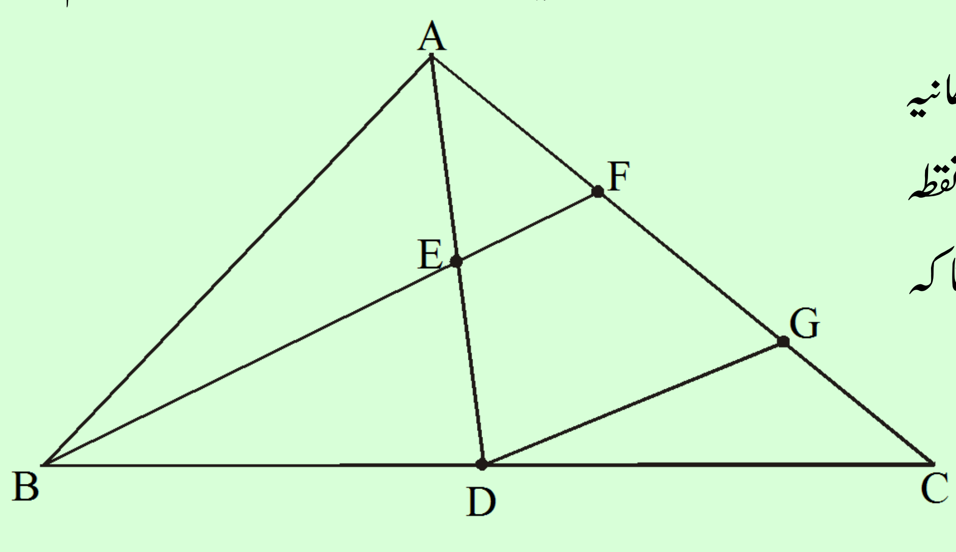
$$= 4\ cm$$

لہٰذا ΔDEF کے اضلاع $DE=3cm$، $EF=4cm$ اور $DF=3.5cm$

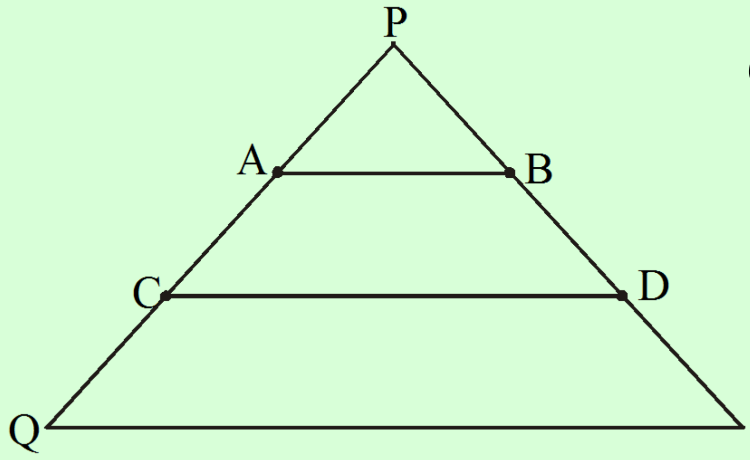
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ΔABC میں اگر D اور E بالترتیب اضلاع AB اور AC کے وسطی نقاط ہیں اور $BC=10cm$ تب DE معلوم کیجیے۔

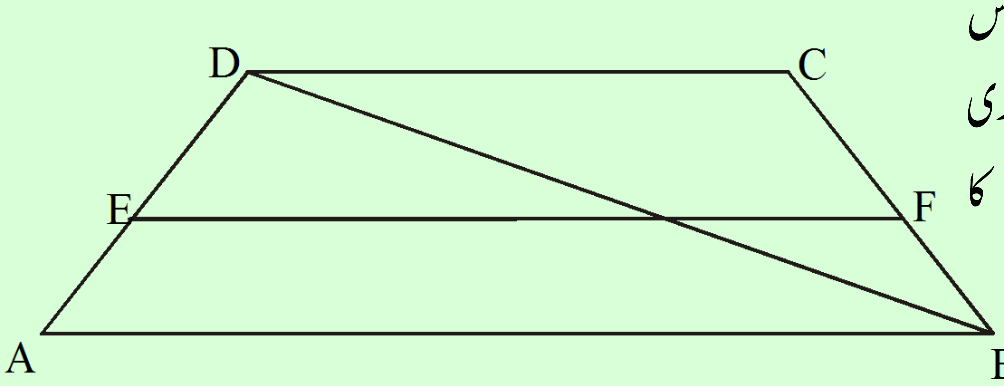
2. دی گئی شکل ΔABC میں AD وسطانیہ ہے۔ ΔABC کا AD کا وسطی نقطہ E ہے اور BE کو آگے بڑھایا جائے تا کہ وہ ضلع AC کے نقطہ F پر ملے۔ اور $EF \parallel DG$ اگر $AC=9cm$ تب AF معلوم کیجیے۔



[اشارہ: ΔADG اور ΔCBF پر غور کیجیے]

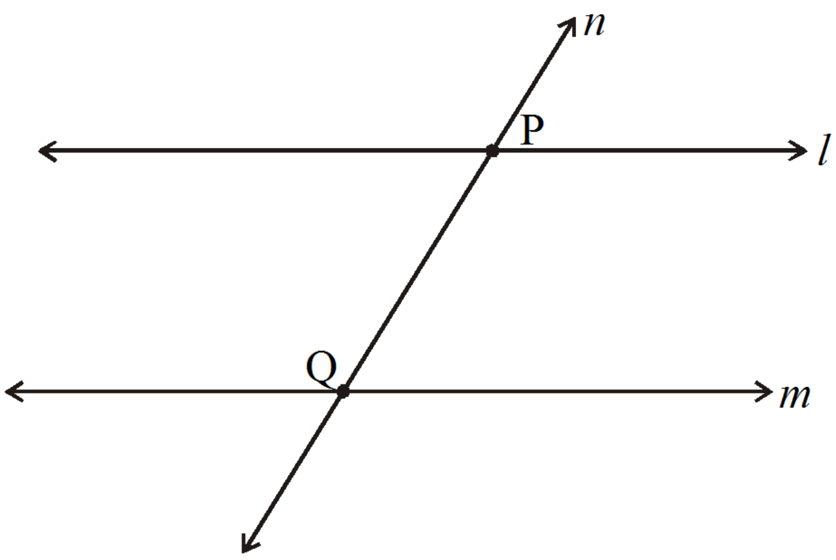


3. دی گئی شکل میں ΔPQR میں A، اور C ضلع PQ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ AB || CD || QR ثابت کیجئے کہ B اور D ضلع PR کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔



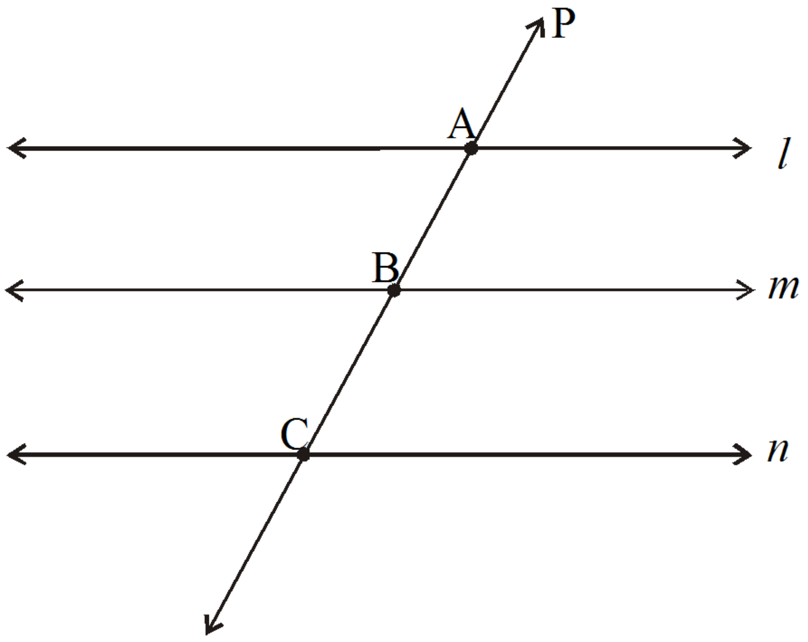
4. دی گئی شکل میں منحرف ABCD جس میں AD اور BC غیر متوازی اضلاع ہیں جب کہ E، AD کا وسطی نقطہ ہے اور EF || AB بتایئے کہ BC کا وسطی نقطہ F ہے۔

4.5.7 مساوی مقطوعہ مسئلہ



آیئے اعادہ کرتے ہیں ایک خط جو ایک یا ایک سے زائد خطوط کو قطع کرتا ہے قاطع خط کہلاتا ہے۔ خطوط کے جوڑ سے قاطع خط پر بننے والا خطی قطعہ ''مقطوعہ'' کہلاتا ہے۔

نوٹ: اوپر بتائی گئی شکل میں PQ مقطوعہ کہلاتا ہے جو متوازی خطوط l اور m کو قاطع خط n پر کے قطع کرنے سے بنتا ہے۔

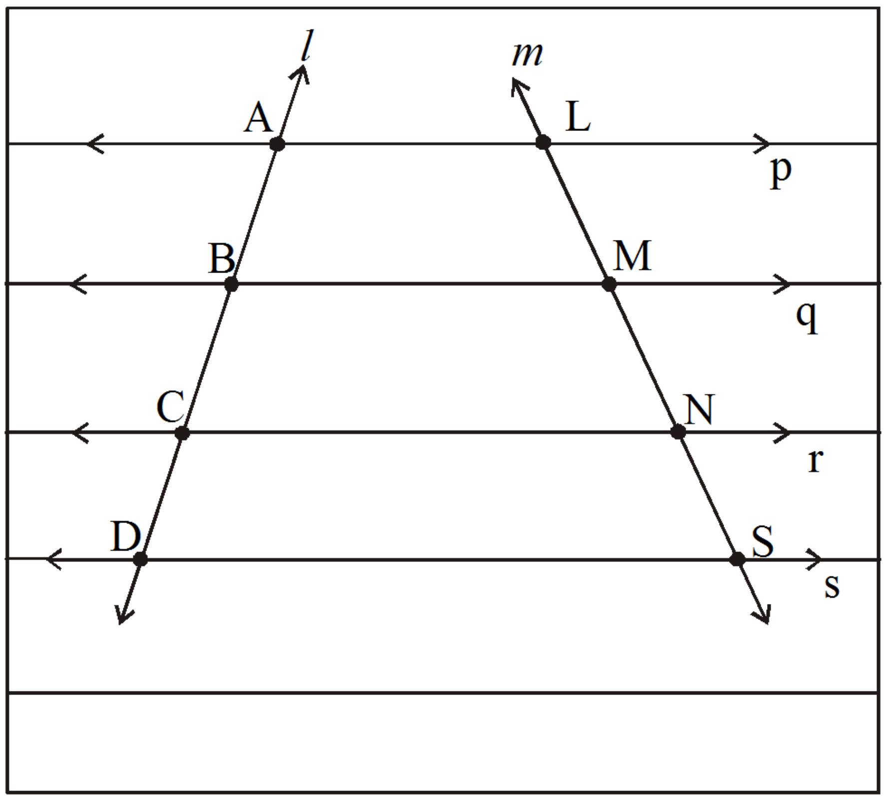


آیئے متوازی خطوط سے قاطع خط پر بننے والے مقطوعوں کے مزید خصوصیات کے بارے میں جانتے ہیں۔

اگر تین متوازی خطوط ہیں۔ ایک قاطع خط قطع کرتا ہے تب بتایئے کہ کتنے مقطوعے بنتے ہیں؟ آیئے شکل کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

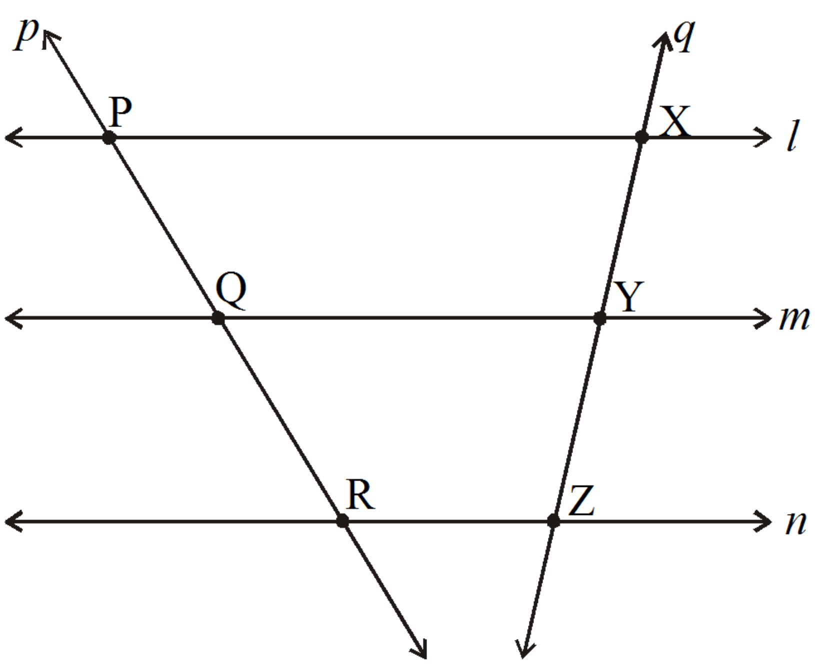
دی گئی شکل میں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو مقطوعے AB اور BC ہیں متوازی خطوط l، m اور n پر قاطع خط p کے قطع کرنے پر بنتے ہیں۔ یہ مقطوعوں کی اہم خاصیت کو ظاہر کرتا ہے۔ مقطوعے متوازی خطوط کو قاطع خط کے قطع کرنے سے بنتے ہیں۔
آیئے اس کی مزید تشریح کرتے ہیں۔

مشغلہ :



رولڈ پیپر پر کوئی دو قاطع خط l اور m کھینچئے جو مساوی فاصلہ پر متوازی خطوط p، q، r اور s کو قطع کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔
ہم مشاہدہ کرتے ہیں یہ قاطع خط مختلف مقطوعے بناتے ہیں۔ مقطوعے AB، BC اور CD کی پیائش کیجئے۔ جانچئے آیا یہ مساوی ہیں یا نہیں۔ ہم تصدیق کر سکتے ہیں یہ مساوی ہیں۔ LM، LN اور LS کی بھی پیائش کیجئے۔ LM، LN اور LS کے طول کے بارے میں آپ کی رائے کیا ہے؟ یہ بھی مساوی طول رکھتے ہیں۔

اس مشغلہ کو کسی دوسرے دو یا اس سے زائد مساوی فاصلہ متوازی خطوط کے سیٹ پر کیجئے۔ متعلقہ مقطوعوں کی پیائش کیجئے اور تصدیق کیجئے آیا ان کے طول مساوی ہیں یا نہیں۔ ہم دیکھتے ہیں ہر صورت میں بنائے گئے مقطوعے مساوی ہیں۔
ہم مساوی مقطوعہ مسئلہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں ''اگر تین یا اس سے زائد متوازی خطوط قاطع خط پر مساوی مقطوعے بناتے ہیں تب وہ دوسرے قاطع خط پر بھی مساوی فاصلہ مقطوعے بناتے ہیں۔''



آیئے مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں:

مثال-12 : دی گئی شکل میں $l \parallel m \parallel n$ اور $PQ = QR$ اگر $XZ = 20$ cm تب YZ معلوم کیجئے۔

حل: $PQ = QR$، $XZ = 20$ cm دیا گیا ہے

∴ مقطوعہ مسئلہ کی رو سے

$XY = YZ \quad \because \; PQ = QR$

ہم دیکھتے ہیں $XZ = XY + YZ$

$= YZ + YZ$

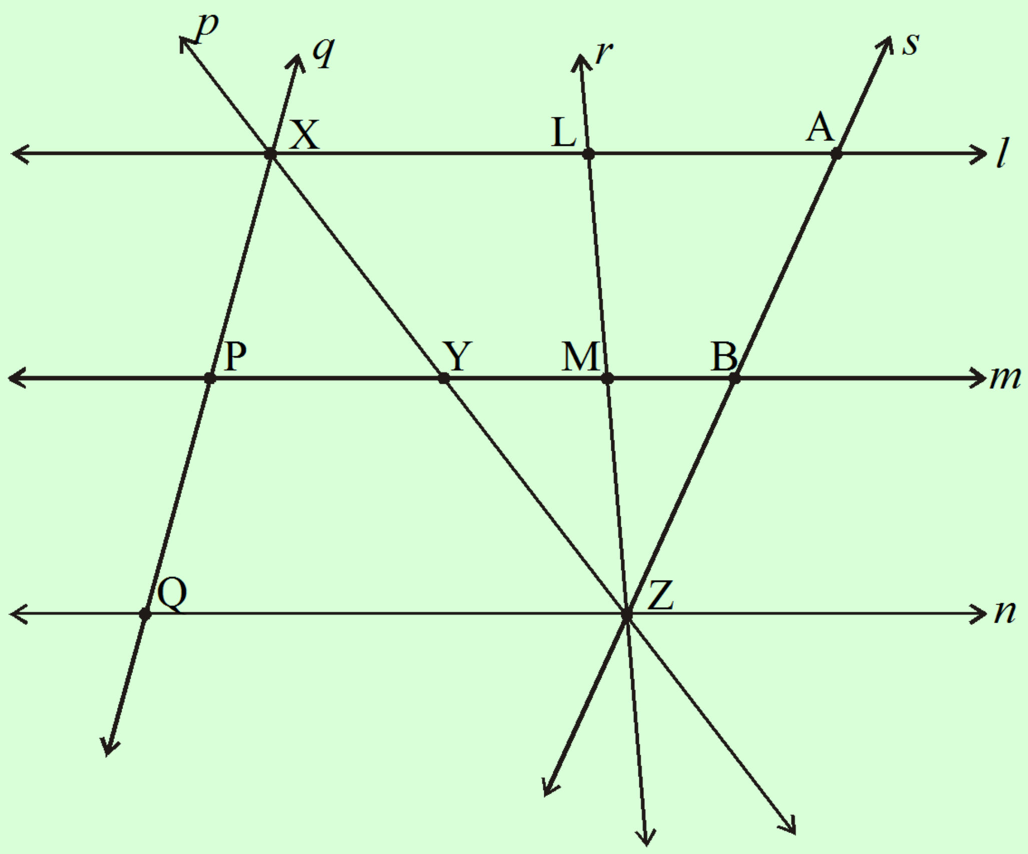
$= 2YZ$

$\Rightarrow \quad 20 = 2YZ$

$\therefore \; YZ = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$

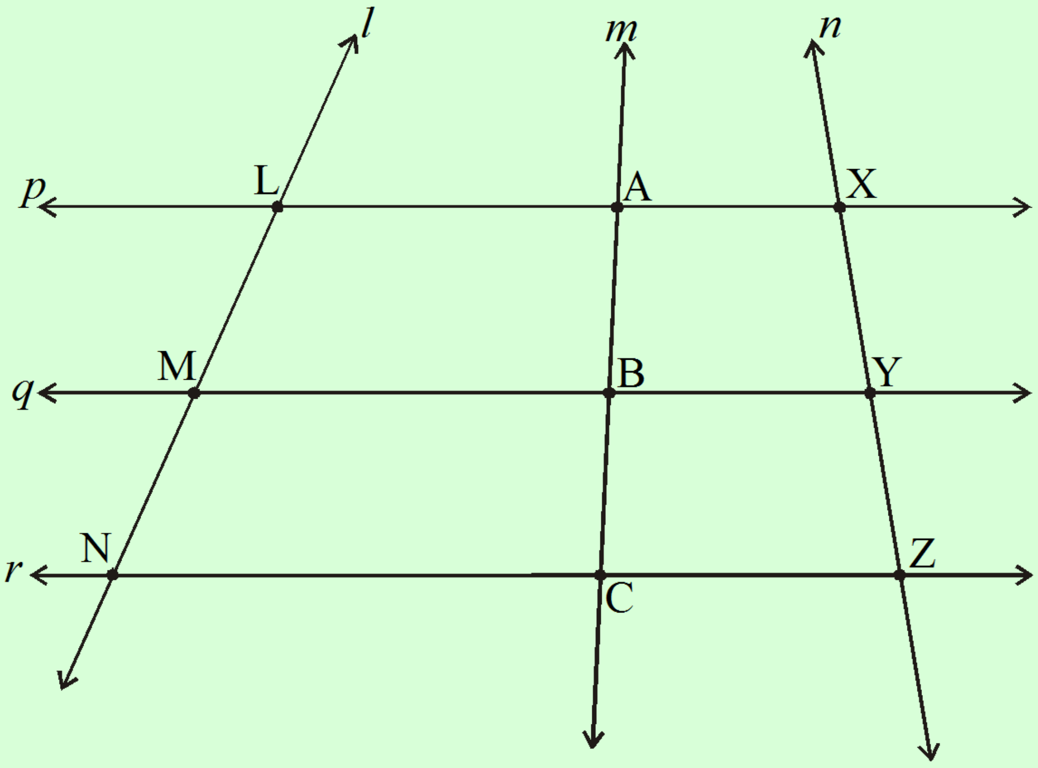
لہٰذا $YZ - 10 = 0$

اپنی قابلیت کی جانچ کیجئے



1. دی گئی شکل میں $l \parallel m \parallel n$، $PQ = 3.2$ cm، $AB = 3.5$ cm، $YZ = 3.4$ cm، $LM = MZ = 3$cm تب XY، XP اور BZ معلوم کیجئے۔

2. دی گئی شکل $r \parallel q \parallel p$ قاطع خطوط l، m اور n ہیں جو بالترتیب L، M، N، A، B، C اور X، Y، Z پر قطع کرتے ہیں اس طرح کہ XY = YZ تب بتایئے کہ AB = BC اور LM = MN



4.5.8 ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع متوازی الاضلاع اور مثلثات

اب ہم متوازی الاضلاع اور مثلثات کے درمیان رشتہ کو جانیں گے جو ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ یہ ایک کلیدی رول ہے جو مشابہہ مثلثات کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔

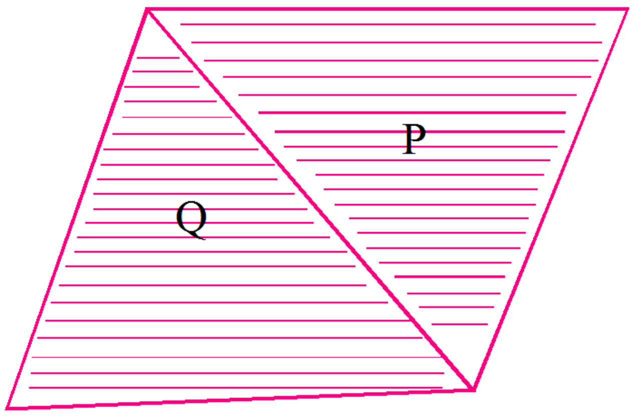
ایک مستوی خطے کی وسعت یا پیائش اس کا رقبہ ہوتا ہے۔

ایک مستوی خطے کی وسعت یا پیائش کو ہمیشہ ایک مثبت حقیقی عدد سے ظاہر کیا جاتا ہے (چند مربع اکائیوں میں) جیسے 10cm2، $215cm^2$، $2km^2$، 3 ہیکٹرس وغیرہ

نوٹ: ایک شکل کا رقبہ اس کے مستوی کے حصوں سے جڑا ہوتا ہے۔ ذیل کی خصوصیات کے ساتھ ہم ایک شکل (A) کے رقبہ کو مختصراً اس طرح لکھتے ہیں ar(A)

(i) دو متماثل اشکال کے رقبہ مساوی ہوتے ہیں۔

اگر A اور B دو متماثل اشکال ہیں تب ar(A) = ar(B)

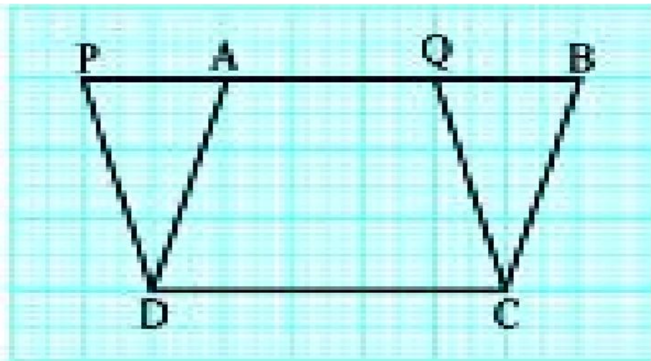


(ii) ایک شکل کا رقبہ مساوی ہوتا ہے اس کے غیر منطبق حصے کے متناہی عدد کے رقبوں کے مجموعہ کے۔

اگر ایک مستوی خطے سے ایک شکل A بنتی ہے دو غیر منطبق مستوی خطوں کے اشکال P اور Q ہے تب

ar(A) = ar(P) + ar(Q)

آیئے ذیل کے مشغلہ کو انجام دیتے ہیں تا کہ معلوم کر سکیں دو متوازی الاضلاع کے رقبوں کے درمیان رشتہ کو جو ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔



مشغلہ

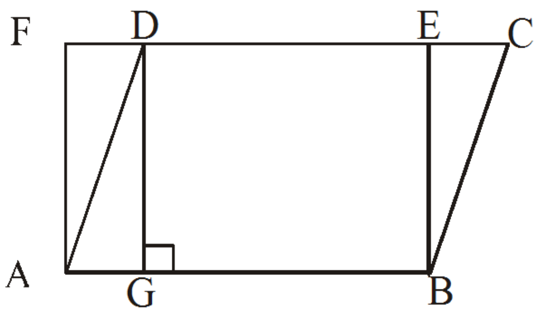
ایک ترسیمی شیٹ لیجئے۔ دو متوازی الاضلاع ABCD اور PQCD اتاریئے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا ہے۔

متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ DC اور ایک ہی متوازی خطوط PB اور DC کے درمیان بنائے گئے ہیں یہ واضح ہے کہ DCQA کا حصہ دو متوازی الاضلاع کا مشترک حصہ ہے۔ ہم بتا سکتے ہیں ΔDAP اور ΔCBQ کا رقبہ ایک ہی ہے تب ہم کہہ سکتے ہیں ar(PQCD) = ar(ABCD)

اب ہم اس کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں "متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں رقبے میں مساوی ہوتے ہیں۔

آیئے مزید مثالیں حل کرتے تا کہ اوپر کے مسئلہ کو سمجھ سکیں۔

مثال-13 : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور ABEF ایک مستطیل ہے۔ DG، AB پر عمود ہے ثابت کیجیے کہ



(i) $ar(ABCD) = ar(ABEF)$

(ii) $ar(ABCD) = AB \times DG$

حل: (i) چونکہ مستطیل بھی ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے

لہٰذا $ar(ABCD) = ar(ABEF)$

($\because$ متوازی الاضلاع ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہے)

(ii) ہم دیکھتے ہیں $ar(ABCD) = ar(ABEF)$

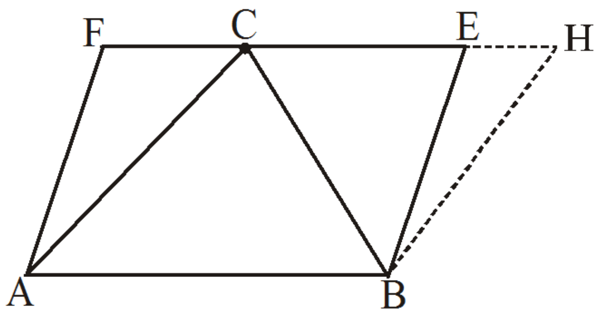
($\because$ مستطیل کا رقبہ $l \times b$) $= AB \times BE$

($\because DG \perp AB$ اور $DG = BE$) $= AB \times DG$

لہٰذا $ar(ABCD) = AB \times DG$ (کیونکہ DG ارتفاع ہے)

اوپر کی مثال سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہو؟ ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ "ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ اسکے ضلع اور اس کے نظیری ارتفاع کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔"

مثال-14 : ΔABC اور $\square ABEF$ جو ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط AB اور AE کے درمیان واقع ہیں ثابت کیجیے کہ $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(\square ABEF)$



حل: B سے AC کے متوازی ایک خط کھینچیے۔ $BH \parallel AC$ خط

FE کو آگے بڑھایئے تا کہ وہ نقطہ H پر مل سکے۔

$\therefore$ ABHC ایک متوازی الاضلاع ہے ہم جانتے ہیں وتر BC،

جو ABHC کو دو مماثل مثلثات میں تقسیم کرتا ہے

لہٰذا $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta BCH)$

$\square$ABEF یا $\parallel$ gm ABEF کا مطلب متوازی الاضلاع ABEF

$$= \frac{1}{2} ar(\square ABHC) \quad \ldots\ldots(1)$$

جیسا کہ $\square$ ABHC اور $\square$ ABEF ایک ہی قاعدہ AB اور وہی متوازی خطوط AB اور EF کے درمیان واقع ہیں لہٰذا

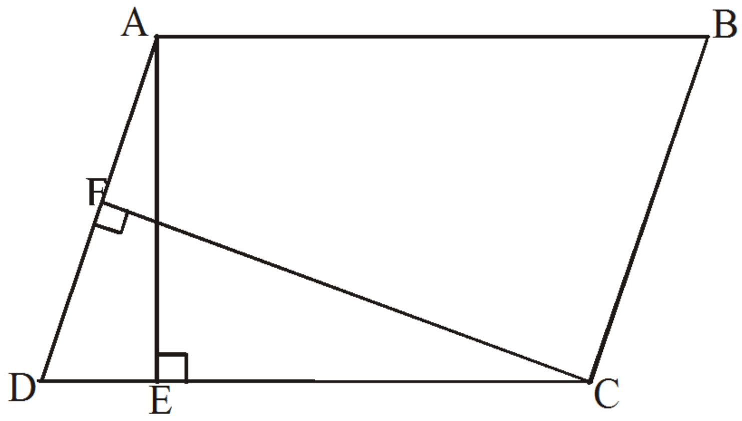
$$\therefore ar(\square ABHC) = ar(\square ABEF) \quad \ldots\ldots(2)$$

(1) کی رو سے $ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} ar(\square ABHC)$

(2) کی رو سے $= \frac{1}{2} ar(\square ABEF)$

اوپر بتائی گئی مثال سے آپ کیا نتیجہ اخذ کرتے ہو؟ ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ ایک مثلث کا رقبہ ایک متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو ایک ہی قاعدہ اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں۔

مثال-15 : ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔ AE، DC کا عمود ہے اور CF، AD کا عمود ہے اگر AB=10cm، AE=8cm اور CF=12cm تب AD معلوم کیجیے۔



حل: متوازی الاضلاع ABCD میں دیا گیا ہے

$AE \perp DC$ اور $CF \perp AD$،

$AB = 10cm$، $AE = 8cm$

اور $CF = 12$ cm

$$ar(\| gm\ ABCD) = DC \times AE$$

$$= AB \times AE$$

$$= 10 \times 8 = 80\ cm^2 \quad ......(1)$$

DC = AB متوازی الاضلاع کے مقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

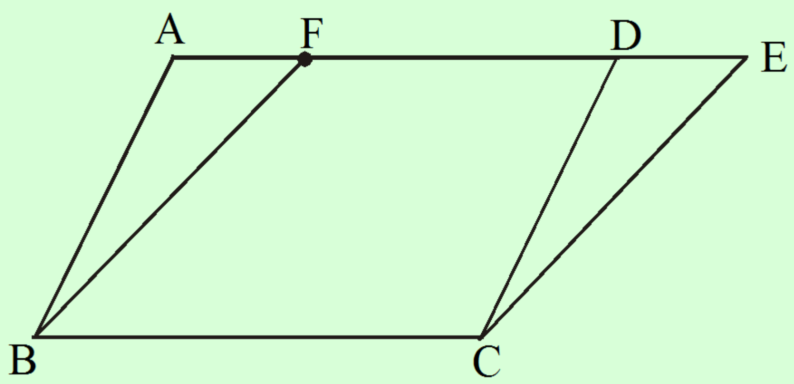
$$ar(\| gm\ ABCD) = AD \times CF$$

$$80 = AD \times 12$$

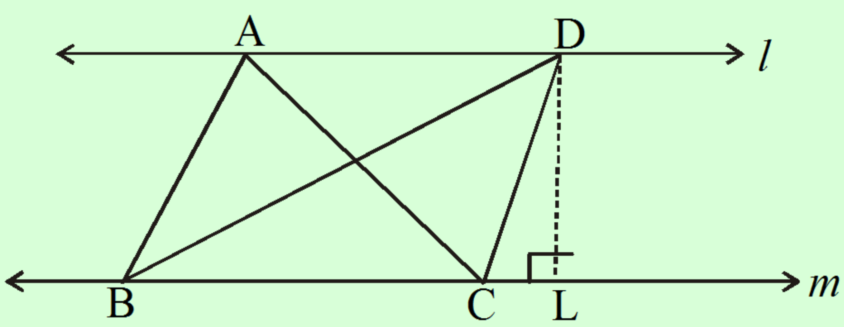
$$AD = \frac{\cancel{80}^{20}}{\cancel{12}_3} = \frac{20}{3}\ cm$$

اپنی قابلیت کی جانچ کیجیے

1. دی گئی شکل میں متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ $40cm^2$ ہے۔ اگر BC = 8cm تب متوازی الاضلاع BCEF کا ارتفاع معلوم کیجیے۔



2. دی گئی شکل میں $l \parallel m$ ΔABCD کا رقبہ $18cm^2$ ہے۔ اگر DL = 4.5cm تب ΔABCD کا متعلقہ نظیری قاعدہ معلوم کیجیے۔



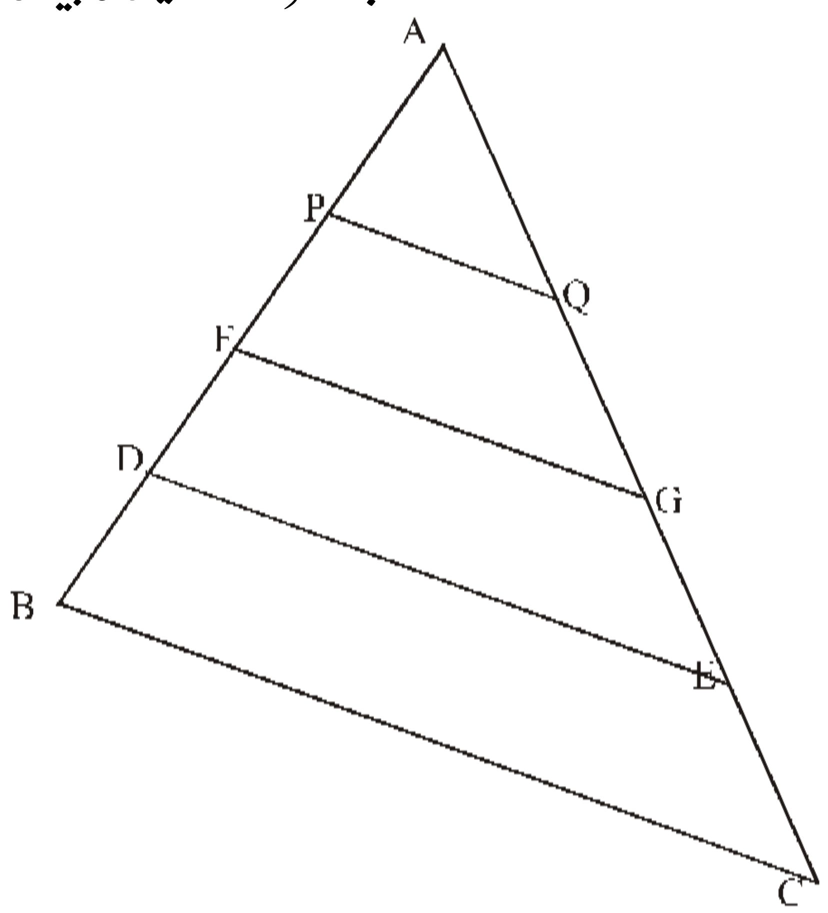
متوازی الاضلاع ABCD کے وتر AC سے بننے والے مثلث ABC کا رقبہ $16cm^2$ ہے۔تب ||gm ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے۔

مشق

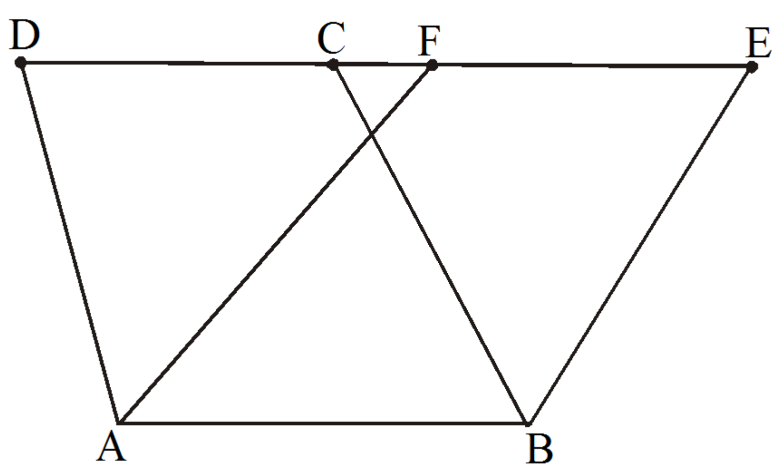
1. اگرایک چارضلعی کے زاویے $(x-20)^0$، $(x+20)^0$، $(x-15)^0$ اور $(x+15)^0$ ہیں تب چارضلعی کے زاویوں کی قدر معلوم کیجئے۔
2. ایک متوازی الاضلاع کے دومتصلہ اضلاع 5:3 کی نسبت میں ہیں اگراس کا احاطہ 48 سنٹی میٹر ہے تب اس کے ہر ایک ضلع کی لمبائی معلوم کیجئے۔
3. لکشمی کا کہنا ہے کہ ''اگرایک چارضلعی کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ناصف ہیں۔تب وہ چارضلعی ہمیشہ ایک معین ہوتی ہے'' کیا آپ ان کی بات سے متفق ہیں؟ آپ کے جواب کی تصدیق کیجئے۔
4. ایک منحرف ABCD ہے جس میں AB || CD اور $\angle A = \angle B = 30^0$ تب دوسرے دوزاویوں کی پیائش کیجئے۔
5. دی گئی شکل میں شکل

PQ || FE || DE || BC

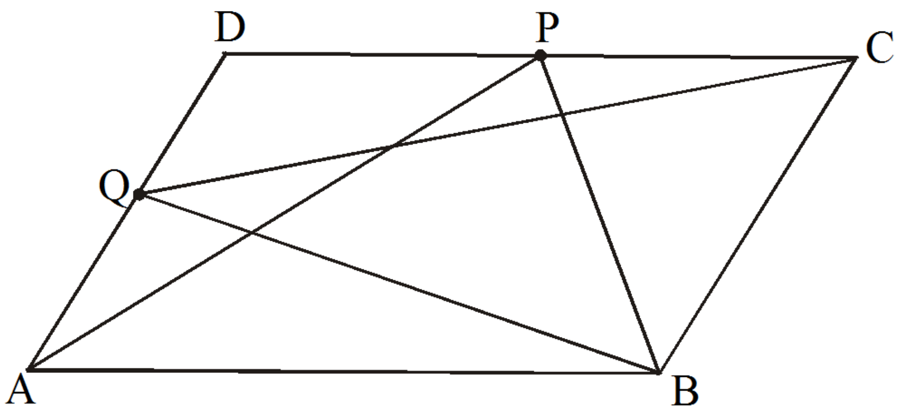
شکل کے تمام منحرف کے نام لکھئے۔



6. دی گئی شکل میں متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ 36 مربع سمر $(36cm^2)$ ہے۔ متوازی الاضلاع ABEF کا ارتفاع معلوم کیجئے۔ جب کہ AB = 4.2cm

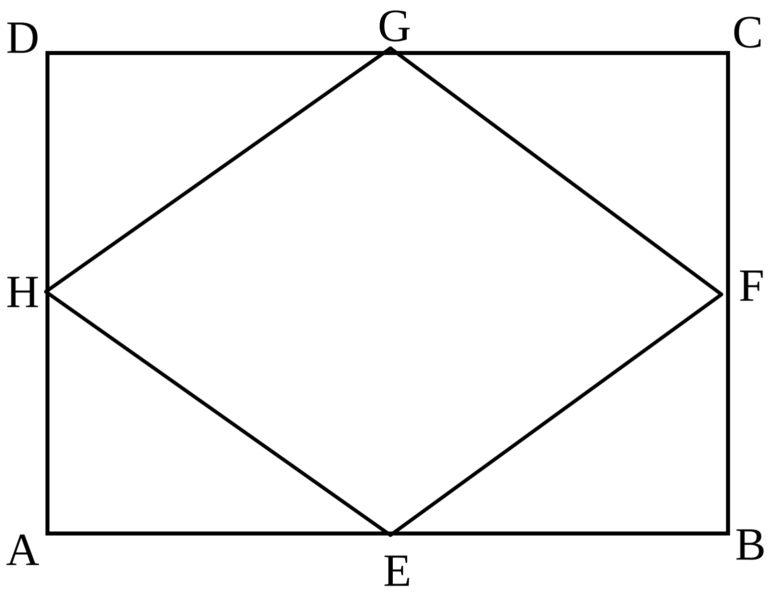


7. متوازی الاضلاع ABCD کے دو اضلاع DC اور AD کے دو اضلاع بالترتیب P اور Q ہیں۔ بتایئے کہ $ar(\Delta APB) = ar(DBQC)$



8. اگر ایک متوازی الاضلاع ABCD کے اضلاع AB ، BC ، CD اور DA کے وسطی نقاط بالترتیب E ، F ، G اور H ہیں تب بتایئے کہ

$$ar(EFGH) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$$



ہم نے کیا سیکھا

- ایک سادہ بند شکل جو چار خطی قطعوں سے گھری ہوتی ہے ایک چار ضلعی کہلاتی ہے۔
- ایک چار ضلعی کے اندرونی زاویوں کا مجموعہ 360° ہوتا ہے۔
- متوازی الاضلاع جو ایک ہی قاعدہ (یعنی مساوی قاعدہ) اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں مساوی رقبہ رکھتے ہیں یا رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔
- مثلثات جو ایک ہی قاعدہ (یا مساوی قاعدہ) اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوتے ہیں رقبہ میں مساوی ہوتے ہیں۔

مثلثات کی مشابہت
Similarity of Triangles

سبق
4.6

4.6.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے:

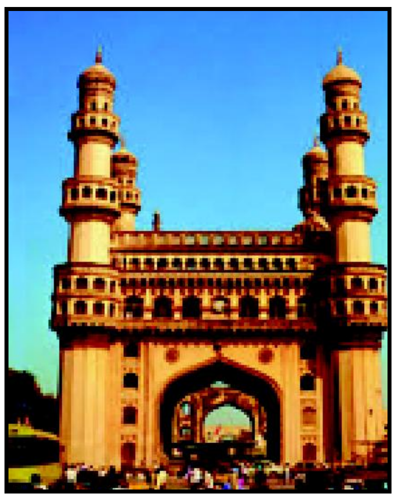
- مشابہہ اشکال کی شناخت کرسکیں اور انھیں سمجھ سکیں۔
- مشابہہ مثلثات کے خواص کو سمجھ سکیں اور انھیں مسائل کے حل کے لیے استعمال کرسکیں۔
- بنیادی تناسبوں کا مسئلہ اور اس کے معکوس مسئلے کو ثابت کرسکیں۔
- فیثا غورث (بودھیان) کے مسئلے کو ثابت کرسکیں اور اس مسئلے کا استعمال سمجھ سکیں۔
- مذکورہ نتائج کو مشابہہ مثلثات پر مبنی مسائل کو حل کرنے کے لیے استعمال کرسکیں۔

4.6.1 تعارف

جیومٹری کا مطالعہ دراصل ہمارے اطراف و اکناف پائے جانے والے مختلف اشکال اور بناوٹوں سے تعلق رکھتا ہے۔ یونانی ریاضی دانوں نے مشابہت کے تصور کو زمین کا محیط، اس کے علاوہ زمین سے سورج اور چاند تک کا فاصلہ معلوم کرنے استعمال کیا تھا۔ علاوہ ازیں مشابہت کے اصول کو دریاؤں کی چوڑائی، درختوں، ٹاورس، پہاڑوں اور دیگر کئی بلندیوں کی پیمائش کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

اس سبق میں آپ مثلثات کی مشابہت، تناسبوں کا مسئلہ، مسئلہ فیثا غورث اور ان سے متعلقہ نتائج کے بارے میں مطالعہ کریں گے۔

مشابہت



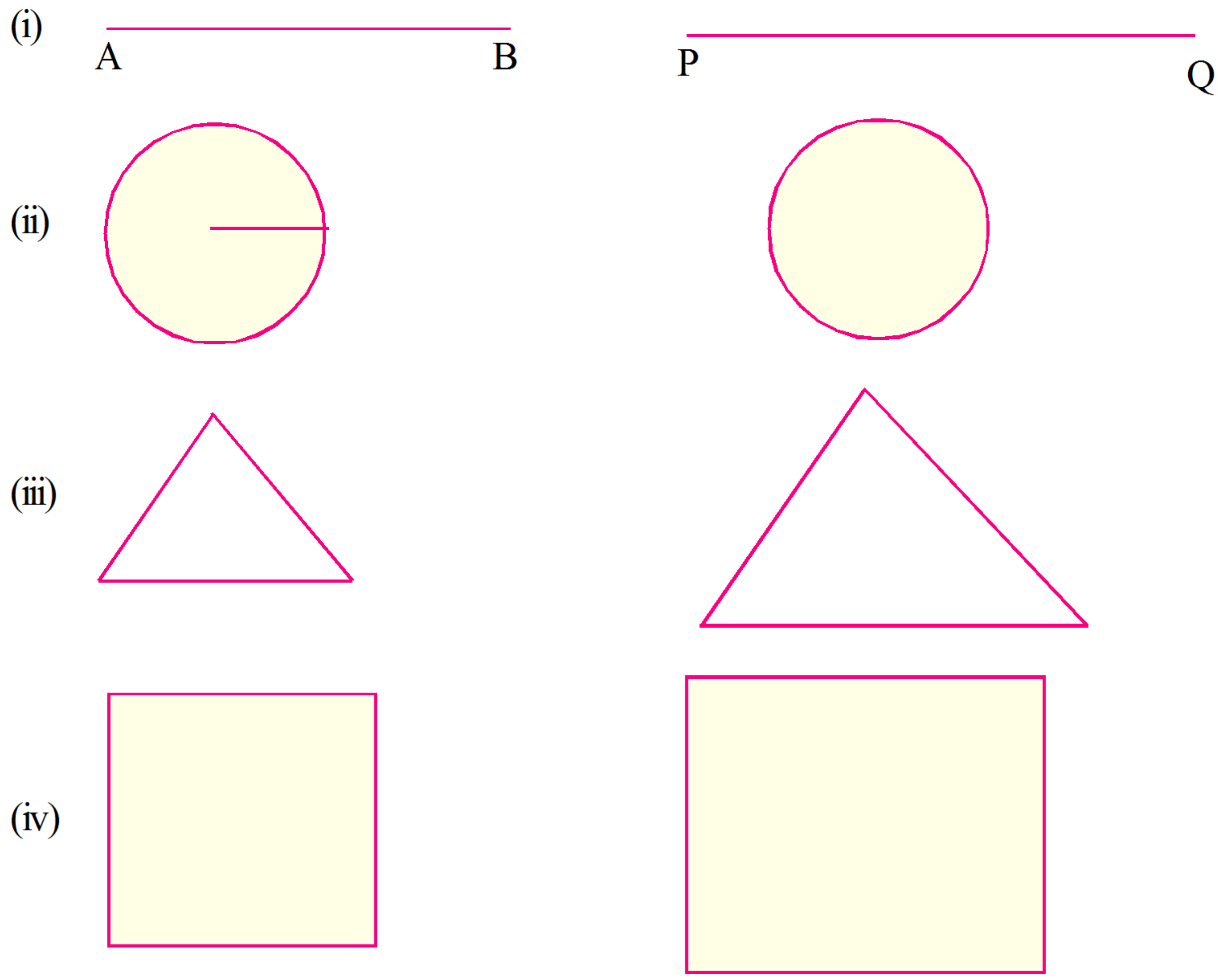
اوپر دی گئی اشکال کا مشاہدہ کیجیے، ان اشکال کے طول اور عرض کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟

آپ نے غور کیا ہوگا کہ دونوں تصاویر ایک جیسی دکھائی دے رہی ہیں لیکن ان کی جسامت (سائز) مختلف ہے۔ آپ اپنی روز مرہ کی زندگی میں کئی اشیا کا مشاہدہ کرتے ہیں جن کی شکلیں ایک جیسی ہوتی ہیں مگر ان کے سائز جدا جدا ہوتے ہیں۔

ریاضی کی زبان میں ایسی اشیا کے نام کیا ہیں؟ ریاضی کی زبان میں ہم کہیں گے کہ یہ دو اشیا مشابہہ ہیں۔ انھیں اس طرح کہا جاتا ہے کہ:

''ایسی اشیا جن کی شکل ایک جیسی ہو مگر ان کا سائز ضروری نہیں کہ مساوی ہو، مشابہہ اشکال کہلاتی ہیں۔''

حسب ذیل اشکال کی پائی جانے والی مشابہت پر غور کریں گے۔

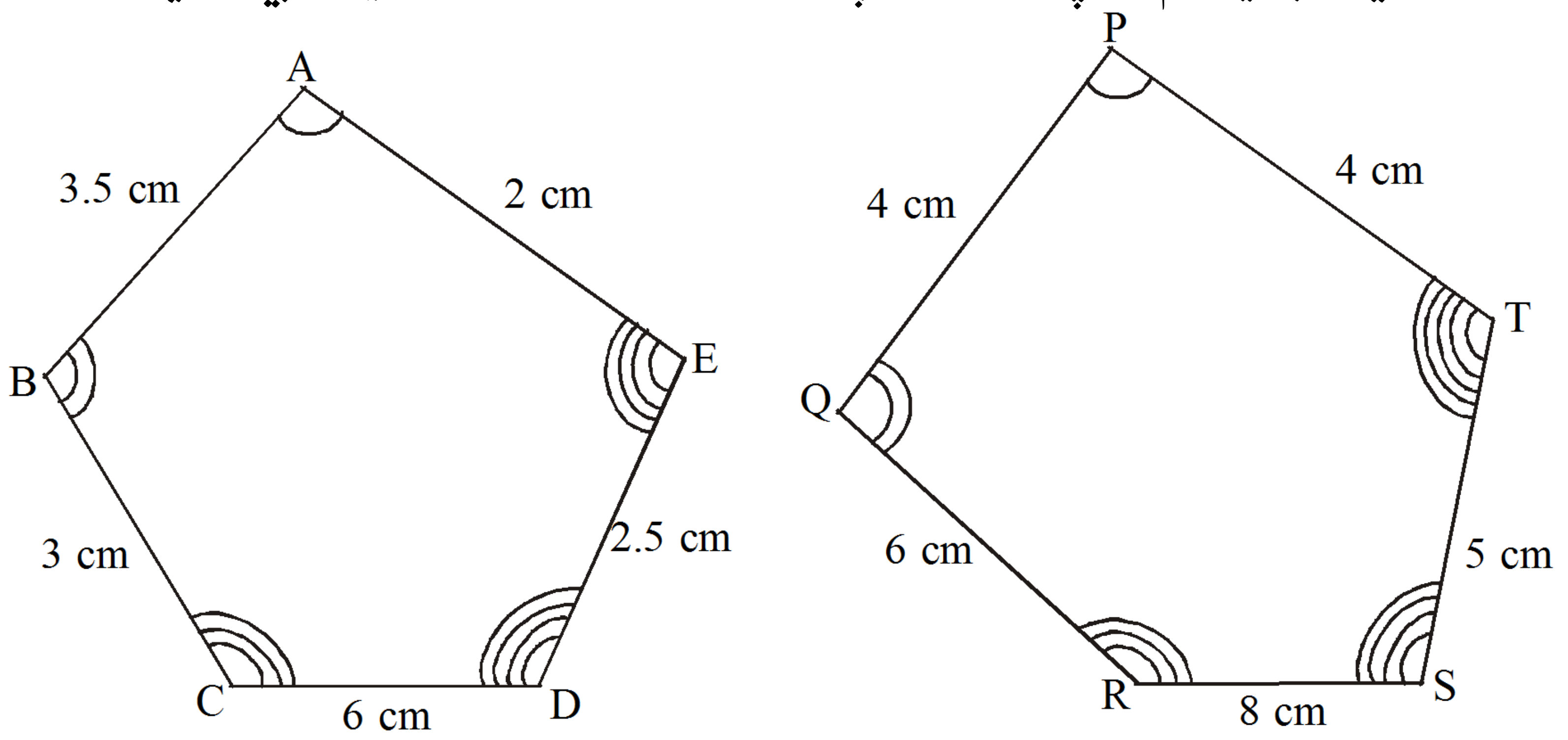


اوپر دی گئی اشکال کے تعلق سے آپ کیا کہیں گے؟

خطی قطعات، دائرے، مساوی الاضلاع مثلثات، مربع مشابہہ رہیں گے۔ علاوہ ازیں تمام مماثل اشکال مشابہہ ہوتی ہیں۔ لیکن تمام مشابہہ اشکال کا مماثل ہونا ضروری نہیں ہے۔

سادہ مشابہہ اشکال

آیئے حسب ذیل منتظم مخمس (پانچ ضلعی اشکال) پرغور کرتے ہوئے ان کے اضلاع اور زاویوں کی پیائش کریں گے۔



ہم دیکھتے ہیں کہ $\angle A = \angle P, \quad \angle B = \angle Q, \quad \angle C = \angle R, \quad \angle D = \angle S$

اور $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CD}{RS} = \dfrac{DE}{ST} = \dfrac{TP}{EA} = \dfrac{1}{2}$

اس طرح اوپر دی گئی پانچ ضلعی اشکال مشابہہ ہیں۔

اب ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ

> مساوی اضلاع کی تعداد رکھنے والی دوکثیر ضلعی مشابہہ ہوں گی جب کہ ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں اور متبادل اضلاع متناسب ہوں۔

دو کثیر ضلعی اس وقت مشابہہ کہلائیں گی۔ اگر وہ ذیل کی دو شرائط کی تکمیل کرتی ہوں:

(i) تمام متناظر زاویے مساوی ہوں۔

(ii) تمام متناظر زاویے ایک ہی نسبت میں پائے جاتے ہیں۔

اس طرح ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ دو مثلثات اس وقت مشابہہ ہوں گے اگر ان کے

(i) متناظر زاویے مساوی ہوں۔

(ii) متناظر اضلاع ایک ہی نسبت میں ہوں۔

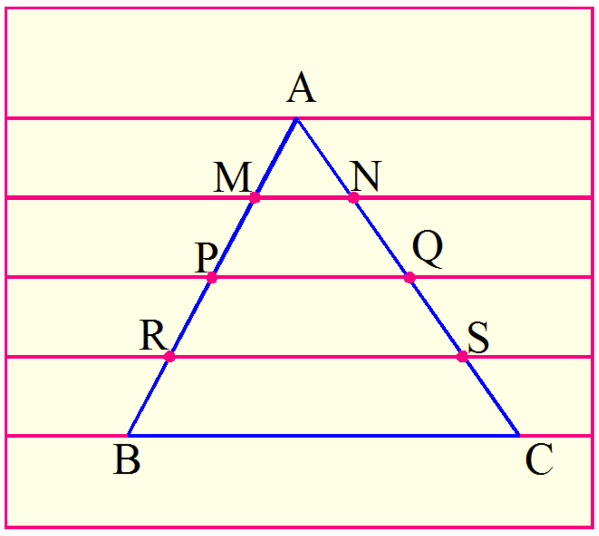
فرض کیجیے کہ ΔABC اور ΔPQR مشابہہ ہیں۔ تب علامتی طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے۔

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (علامت '~' کو "مشابہہ ہے" پڑھے)

مزید براں اگر دو مثلثات میں متناظر زاویے مساوی ہوں تب مساوی زاویے رکھنے والے مثلثات ہوں گے۔ مساوی زاویے ہوں تب مساوی زاویے رکھنے والے مثلثات ہوں گے۔ مساوی زاویے رکھنے والے مثلثات میں متناظر اضلاع مساوی تناسب میں ہوں گے۔ اسے بنیادی تناسبوں کا مسئلہ یا تھیلس کے مسئلہ کے ذریعے ثابت کیا جاسکتا ہے۔

بنیادی تناسبوں کے مسئلہ کو سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ-1



لکیروں والے کاغذ پر ایک مثلث اس طرح بنائیے کہ اس کا قاعدہ کیس ایک کلیہ پر ہو۔ مثلث ABC کو کئی لکیریں قطع کریں گی۔ ان میں سے کسی ایک خط (لکیر) کو منتخب کرتے ہوئے ان نقاط کو نام دیجیے جہاں پر یہ خط ضلع AB اور AC سے ملتا ہو۔ یہ نقاط P اور Q ہیں۔

$\frac{AP}{PB}$ اور $\frac{AQ}{QC}$ کی نسبت معلوم کیجیے۔

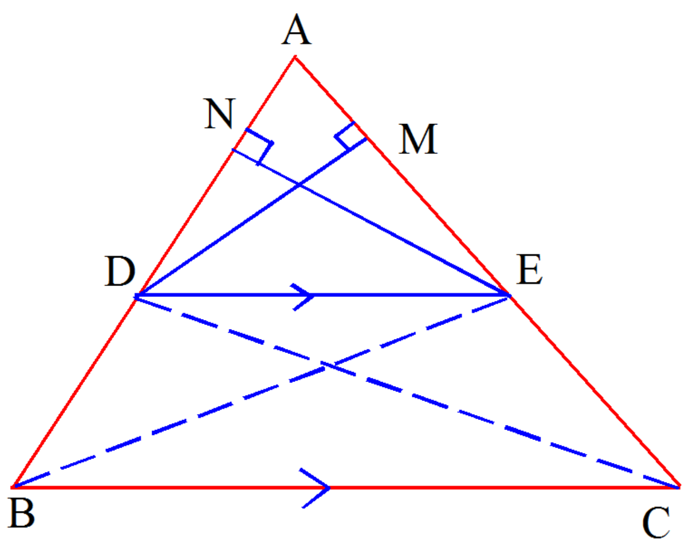
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ جانچ کیجیے کہ یہ نسبتیں مساوی ہیں یا نہیں؟ اب MN اور RS کو لے کر کوشش کیجیے۔

$\frac{AM}{MB}$ ، $\frac{AN}{NC}$ اور $\frac{AR}{RB}$ ، $\frac{AS}{SC}$ کی نسبتیں معلوم کیجیے۔

دیکھئے کہ آیا وہ مساوی ہیں؟ آپ کس نتیجے پر پہنچتے ہیں؟ اس نتیجے کے ذریعے ہم جیوٹری میں ایک مسئلہ کی جانب بڑھتے ہیں جس پر ذیل میں گفتگو کرتے ہیں۔

4.6.2 بنیادی تناسبوں کا مسئلہ (تھیلس کا مسئلہ)

مسئلہ 4.6.2: کسی مثلث میں اگر ایک خط کسی ضلع کے متوازی اس طرح کھینچا جائے کہ یہ باقی دو ضلعوں کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہو تو یہ خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرے گا۔



دیا گیا ہے کہ: ΔABC میں $DE \parallel BC$ اور خط DE اضلاع AB اور AC کو ترتیب وار نقاط D اور E پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$

بناوٹ: B کو E سے اور C کو D سے ملائیے اور $AB \perp DM$ اور $AB \perp EN$ بنائیے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ

بلندی × قاعدہ × $\frac{1}{2}$ = ΔADE کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times AD \times EN$$

$$\Delta ABE \text{ کارقبہ } = \frac{1}{2} \times BD \times EN$$

غور کیجیے کہ
$$\frac{\Delta ADE \text{ کارقبہ }}{\Delta BDE \text{ کارقبہ }} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN}$$

$$= \frac{AD}{BD} \qquad \text{......(1)}$$

دوبارہ
$$\Delta ADE \text{ کارقبہ } = \frac{1}{2} \times AE \times DM$$

$$\Delta CDE \text{ کارقبہ } = \frac{1}{2} \times EC \times DM$$

غور کیجیے،

$$\frac{\Delta ADE \text{ کارقبہ }}{\Delta CDE \text{ کارقبہ }} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM}$$

$$= \frac{AE}{EC} \qquad \text{......(2)}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ ΔBDE اور ΔCDE ایک ہی قاعدے DE پر واقع ہیں اور متوازی خطوط کے ایک ہی جوڑ BC اور DE کے درمیان ہیں۔

اس لیے
$$\Delta BDE \text{ کارقبہ } = \Delta CDE \text{ کارقبہ } \qquad \text{......(3)}$$

مساوات (1) اور (2) اور (3) کی روسے

$$\Rightarrow \frac{\Delta ADE \text{ کارقبہ }}{\Delta CDE \text{ کارقبہ }} = \frac{\Delta ADE \text{ کارقبہ }}{\Delta CDE \text{ کارقبہ }}$$

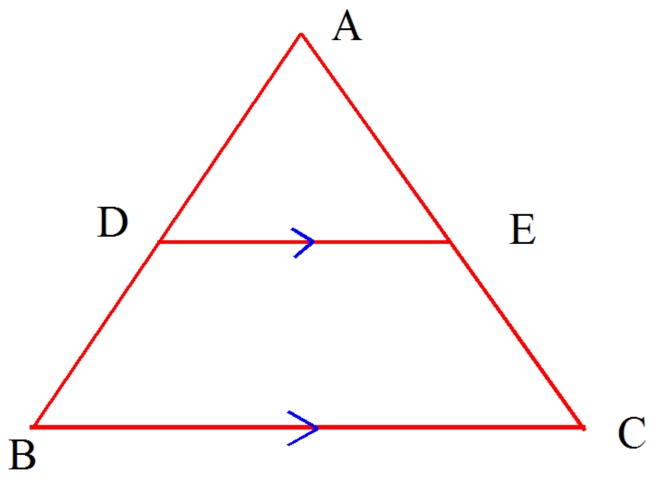
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ثابت کیا گیا۔

برعکس مسئلہ:

مثلث ΔABC میں BC کے متوازی خط DE ضلع AB کو نقطہ D پر اور ضلع AC کو نقطہ E پر قطع کرتا ہے تب

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$



ثبوت: ΔABC میں $DE \parallel BC$

اس لیے، $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

(بنیادی تناسبوں کے مسئلہ کی رو سے)

غور کیجیے (i) $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

$\dfrac{p}{q}$ کا مقلوب $\dfrac{q}{p}$ ہوتا ہے

مقلوب لیتے ہوئے

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

دونوں جانب 1 جمع کرنے پر

$$\frac{DB}{AD}+1 = \frac{EC}{AE}+1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC+AE}{AE}$$

$\boxed{\begin{array}{l} AD + DB = AB \\ AE + EC = AC \end{array}}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

(ii) دوبارہ غور کیجیے کہ $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

دونوں جانب 1 جمع کرنے پر

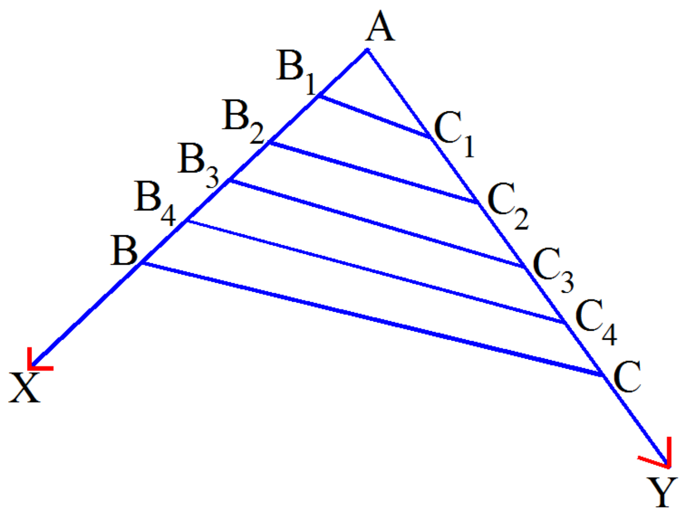
$$\frac{AD}{DB}+1 = \frac{AE}{EC}+1$$

$$\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC}$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

آیا بنیادی تناسبوں کے مسئلہ کا برعکس مسئلہ بھی درست ہے؟ معلوم کرنے کے لیے ذیل کا مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ-2



اپنی نوٹ بک میں مشغلہ شکل کے مطابق زاویوں XAY بنایئے اور شعاع AX پر نقاط B_1، B_2، B_3، B_4 اور B کی نشان دہی اس طرح کیجئے کہ یہ ترتیب وار مساوی فاصلے پر ہوں۔

$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = 1$ cm

اس طرح شعاع AY پر نقاط C_1، C_2، C_3، C_4 اور C سے ملایئے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ (چاندے کی مدد سے ناپئے) $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C} = \frac{1}{4}$

$\angle AB_1C_1 =$ ________ $\angle AC_1B_1 =$ ________

$\angle ABC =$ ________ $\angle ACB =$ ________

آپ دیکھیں گے کہ $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$

$B_1C_1 \| BC$ (متناظر زاویے مساوی ہیں)

اس طرح B_2 کو C_2 سے، B_3 کو C_3 سے اور B_4 کو C_4 سے ملانے پر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3}$ اور $B_2C_2 \| BC$

$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2}$ اور $B_3C_3 \| BC$

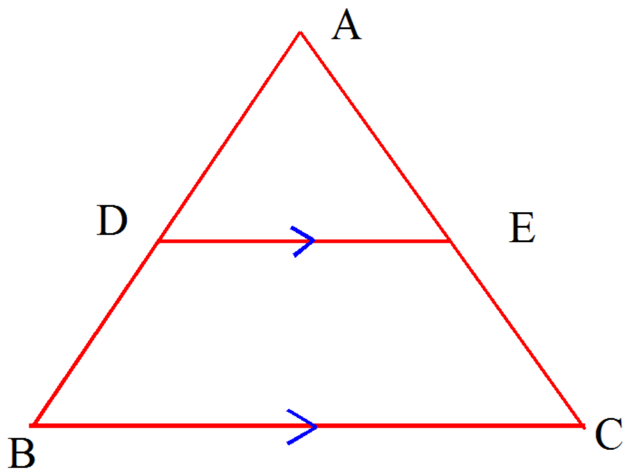
$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1}$ اور $B_4C_4 \| BC$

ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اگر کسی مثلث میں ایک خط اس کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو تو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔ یہ بنیادی تناسبوں کے مسئلے کا برعکس مسئلہ کہلاتا ہے۔

اگر ΔABC میں اگر $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$ ہو تب $DE \| BC$

اب ہم بنیادی تناسبوں کا مسئلہ اور اس کے برعکس مسئلہ کو استعمال کرتے ہوئے چند مسائل حل کریں گے۔

مثال-1: مثلث ABC میں اگر DE || BC اور $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ ، AC = 8cm تب AE معلوم کیجیے۔



حل: ΔABC میں

$$DE \parallel BC$$

$$\Leftarrow \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$ (بنیادی تناسبوں کے مسئلہ کے برعکس مسئلہ کی رو سے)

لیکن $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$

جب کہ $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{5}$

$\because AE + EC = AC$
$\Rightarrow EC = AC - AE$
$AC = 8$ cm

$$\frac{AE}{AC - AE} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AE}{8 - AE} = \frac{3}{5}$$ (ضرب چلیپائی سے)

$$5AE = 24 - 3AE$$

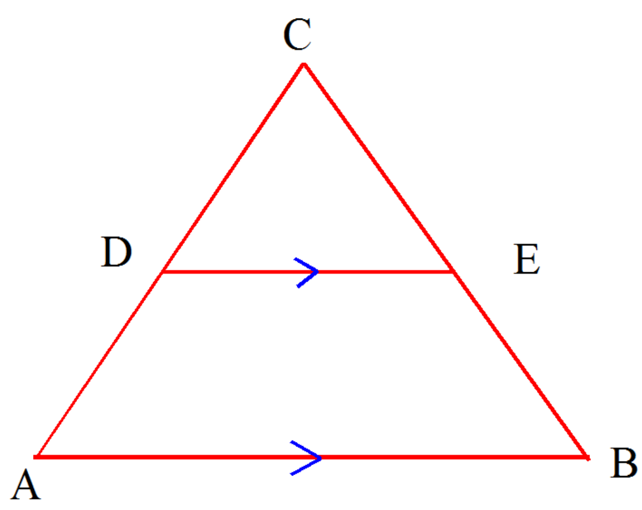
$$5AE + 3AE = 24$$

$$8AE = 24$$

$$AE = \frac{24}{8} = 3\text{cm.}$$

مثال-2: مثلث ABC میں اگر DE || AB ، AD = 9x + 9 ، CD = x + 3 ، BE = 3x + 4 ، CE = x ، x کی قدر معلوم کیجیے۔

حل: ΔABC میں DE || AB



$$AD = 8x + 9$$

$$CD = x + 3$$

$$BE = 3x + 4$$

$$CE = x$$

متناسبت کے بنیادی مسئلہ کی رو سے

$$\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{8x+9}{x+3} = \frac{3x+4}{x}$$

$$\Rightarrow x(8x + 9) = (x + 3)(3x + 4)$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 9x = 3x^2 + 4x + 9x + 12$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 3x^2 = 4x + 12$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 4x + 12$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 6x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 5x(x - 2) + 6(x - 2) = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -12 \times 5 = -60 \\ -60 = \boxed{-10} \times \boxed{6} \\ -4 = \boxed{-10} + \boxed{6} \end{array}}$$

$$\begin{array}{c|c} x - 2 = 0 & 5x + 6 = 0 \\ x = 2 & 5x = -6 \\ & x = -\frac{6}{5} \end{array}$$

چوں کہ x مثبت ہے۔

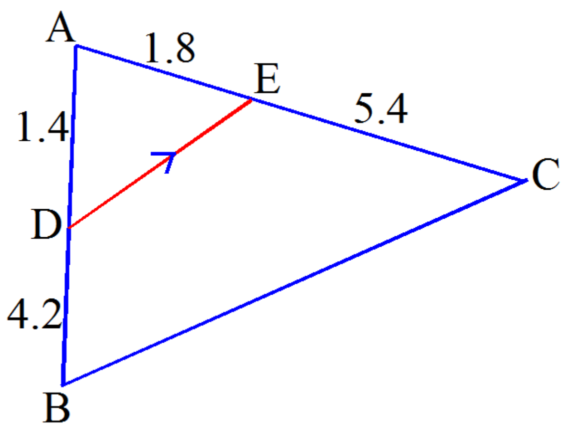
$$\therefore \quad \boxed{x = 2}$$

مثال-3: مثلث ABC میں اگر نقاط D اور E ترتیب وار AB اور AC پر واقع ہوں تب اس طرح کہ AB = 5.6 cm ‘AD = 1.4 cm ‘AC = 7.2 cm اور AE = 1.8 cm آیا DE || BC درست ہے؟ اپنے جواب کا جواز پیش کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

AB = 5.6 cm, AD = 1.4 cm

AC = 7.2 cm, AE = 1.8 cm



ہم جانتے ہیں کہ

DB = AB – AD

= 5.6 - 1.4 = 4.2 cm

اور EC = AC - AE

= 7.2 - 1.8 = 5.4 cm.

اب

$$\frac{AD}{DB} = \frac{1.4}{4.2} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3} \qquad \text{......(1)}$$

$$\frac{AE}{EC} = \frac{1.8}{5.4} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \qquad \text{......(2)}$$

(1) اور (2) سے

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

اس لیے متناسبت کے بنیادی مسئلہ کے برعکس مسئلہ کی رو سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ اضلاع DE اور BC متوازی ہیں یعنی

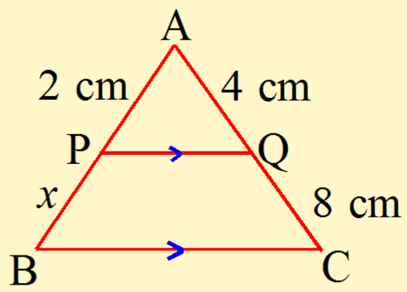
DE || BC ثابت ہوا۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے۔

.1 ΔABC میں اگر DE || BC، $AD = x$، $DB = x - 2$، $AE = x + 2$ اور $EC = x - 1$

تب اضلاع AB اور AC کے طول معلوم کیجیے۔

(جواب: AB = 6 units، AC = 9 units)



.2 شکل میں PQ || BC

x کی قدر معلوم کیجیے۔

.3 کسی چار ضلعی ABCD کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں اس طرح کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

ثابت کرو کہ ABCD ایک منحرف ہے۔

4.6.3 مثلث کی مشابہت کا پیمانہ/معیار

ہم جانتے ہیں کہ دو مثلثات اس وقت متناسب ہوں گے جب ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں اور متناظر اضلاع متناسب ہوں۔

ہم کس طرح جانچ کریں گے کہ آیا دیئے گئے دو مثلثات مشابہہ ہیں کہ نہیں؟

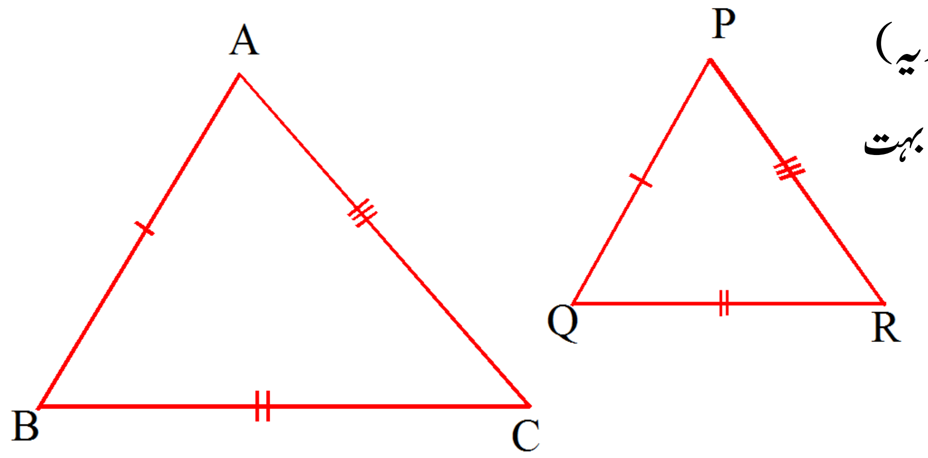
اس لیے دو مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے چند قواعد کا مطالعہ کرنا ضروری ہے۔ کوئی دو مثلثات کی مشابہت کی جانچ کے لیے ہم چند قواعد کا مطالعہ کرتے ہیں۔

نیچے چند پیمانے/معیار دیئے گئے ہیں جن سے ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ دیئے گئے مثلثات مشابہہ ہیں۔

(i) AAA (زاویہ - زاویہ - زاویہ)

یا AA (زاویہ - زاویہ) مشابہت

اگر ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب دوسرے مثلث کے دو زاویوں کے مساوی ہوں تب یہ دونوں مثلثات مشابہہ ہوں گے۔

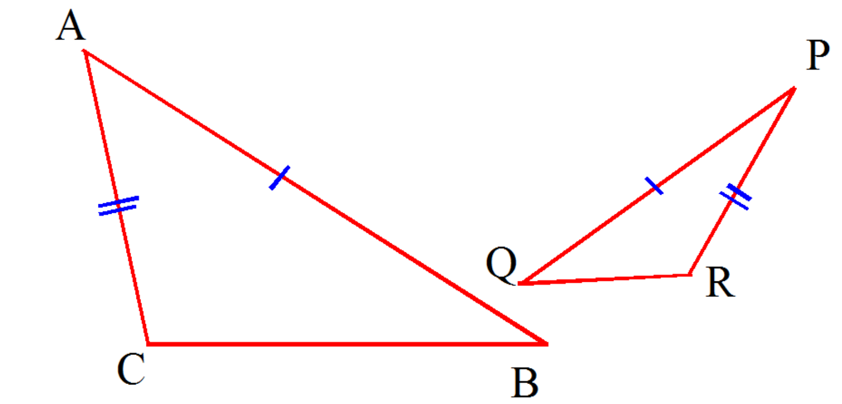


دی گئی شکل کے مطابق $\angle A = \angle P$ ، $\angle B = \angle Q$

اس لیے، $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

(ii) SAS مشابہت (ضلع - زاویہ - ضلع)

کسی مثلث کا اگر ایک زاویہ دوسرے مثلث کے ایک زاویے کے مساوی ہو اور اس کو (زاویہ کے) گھیرنے والے اضلاع متناسب ہوں تب دو مثلثات مشابہہ ہوں گے۔



دی گئی شکل کے مطابق

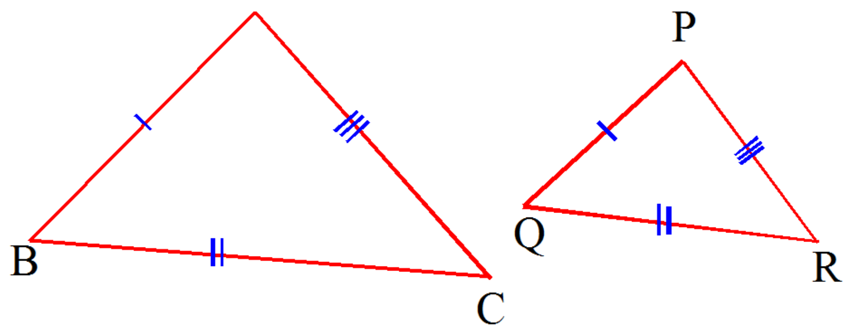
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

اور $\angle A = \angle P$

اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

(iii) SSS مشابہت (ضلع - ضلع - ضلع)

دو مثلثات مشابہہ ہوں گے اگر ان کے متناظر اضلاع ایک ہی نسبت میں پائے جائیں۔



دی گئی شکل کے مطابق

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{PR}$$

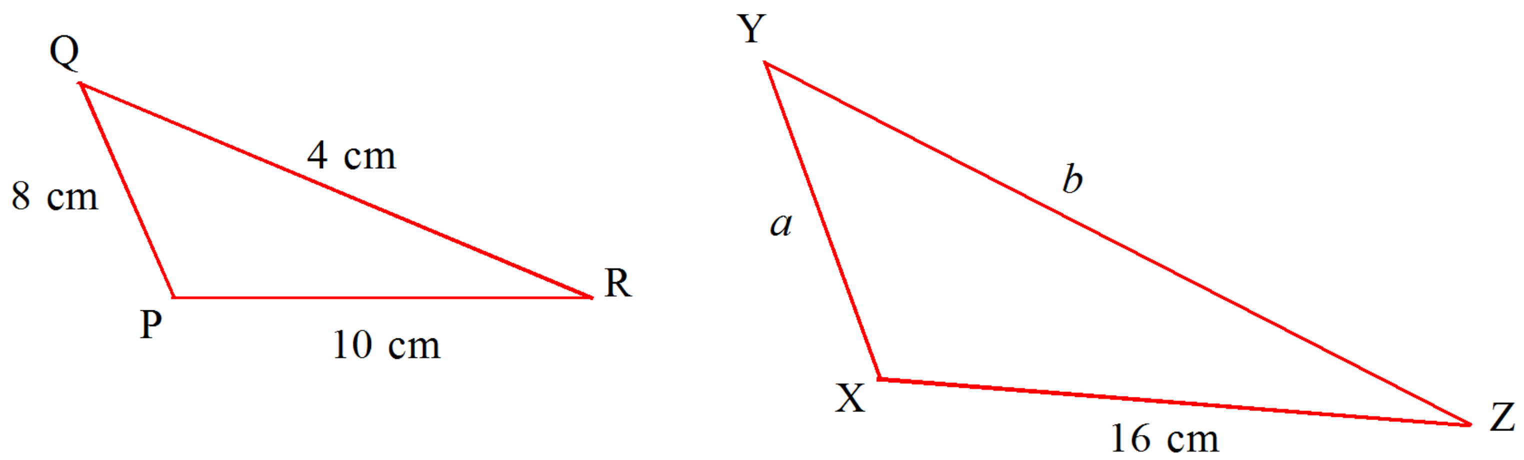
اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

نوٹ: اگر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ تب ΔABC اضلاع AB، BC اور AC کے متناظر اضلاع مثلث PQR کے اضلاع PQ، QR اور PR ہیں۔ اسی طرح زاویے A، B اور C کے متناظر زاویے P، Q اور R ہیں۔ کیا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ تبصرہ کیجیے۔

نہیں۔ کیوں کہ متناظر اس ترتیب میں نہیں ہیں۔

آیئے مثلثات کی مشابہت کے معیار پر مبنی چند سوالات حل کریں گے۔

مثال-4: دی گئی شکل میں اگر $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ تب a اور b معلوم کیجیے۔



حل: دیا گیا ہے کہ $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$ (متناظر اضلاع متناسب ہیں)

$$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{4}{b} = \frac{10}{16}$$

PQ = 8 cm
QR = 14 cm
PR = 10 cm
XZ = 16 cm

$\frac{8}{a} = \frac{10}{16}$ ہم ایسا کر سکتے ہیں۔

ضرب چلیپائی کے ذریعے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$10a = 16 \times 8$$

$$\therefore a = \frac{16 \times 8}{10} = \frac{128}{10} = 12.8 \text{ cm}$$

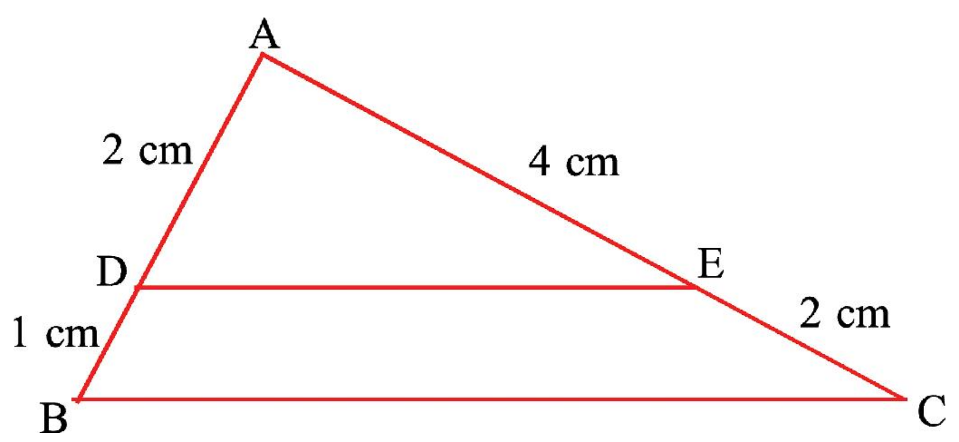
اس طرح $\frac{4}{b} = \frac{10}{16}$

ضرب چلیپائی کے ذریعے

ہمیں حاصل ہوتا ہے $10b = 16 \times 4$

$$\therefore b = \frac{16 \times 4}{10} = \frac{64}{10} = 6.4 \text{ cm}$$

مثال-5: دی گئی شکل کے مطابق ثابت کیجیے کہ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$



حل: ΔABE اور ΔABC میں

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+AB} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{AE+EC} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{......(2)}$$

(1) اور (2) کے ذریعے

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

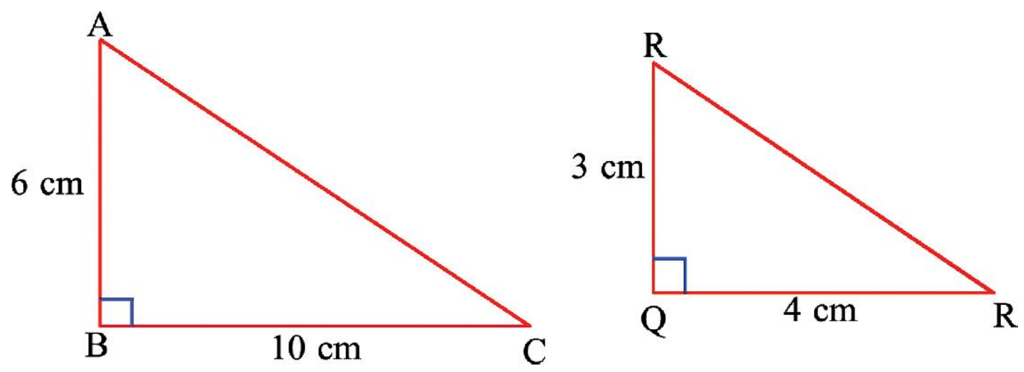
$\angle A = \angle A$ (مشترکہ زاویہ)

ہم یہ دیکھتے ہیں کہ

SAS مشابہت کے مطابق۔ اس لیے

$$\Delta ABE \sim \Delta ABC$$

مثال-6: دی گئی شکل کے مطابق جانچ کیجیے کہ آیا $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ یا نہیں



حل: ΔABC اور ΔPQR میں

ہم جانتے ہیں

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{......(1)}$$

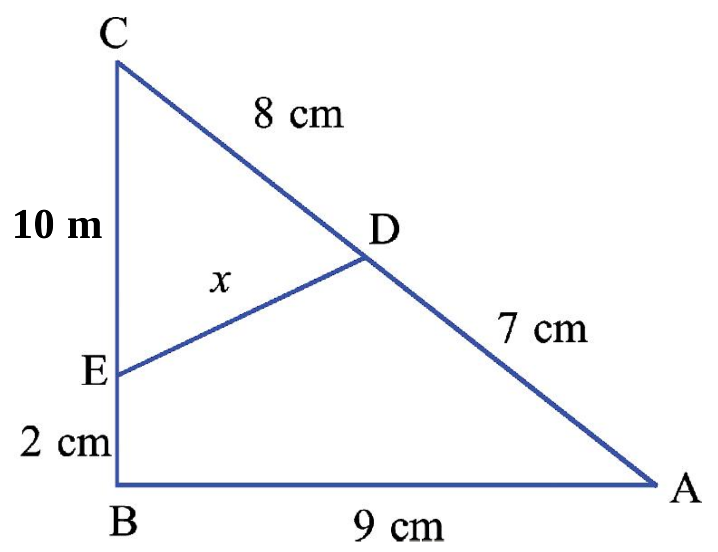
$$\frac{BC}{QR} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \text{......(2)}$$

مساوات (1) اور (2) کے مطابق

$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} \neq \frac{BC}{QR} \qquad \left[\text{Since, } 2 \neq \frac{5}{2}\right]$$

ہم دیکھتے ہیں کہ متناظر اضلاع متناسب میں نہیں ہیں۔ اس لیے ΔABC اور ΔPQR مشابہہ نہیں ہیں۔

مثال-7: دی گئی شکل میں $\angle A = \angle CED$ تب ثابت کیجیے کہ $\Delta CAB \sim \Delta CED$ اس کے علاوہ x کی قدر معلوم کیجیے۔



حل: ΔCAB اور ΔCED میں $\angle C$ مشترک ہے اور $\angle A = \angle CED$

$\Delta CAB \sim \Delta CED$ (AA مشابہت)

اس لیے x معلوم کرنے کے لیے:

ہم جانتے ہیں $\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$

$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CD}$ | شکل کے مطابق ∴ |

$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{10+2}{8}$ | $\because CB = CE + EB = 10 + 2 = 12$

$\Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{12}{8}$

ضرب چلیپائی کے ذریعے

$$12x = 9 \times 8$$

$$x = \frac{9\times 8}{12} = \frac{72}{12} = 6 \text{ cm}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 6 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow \quad 3x = 480$$

$$x = \frac{480}{3} = 160 \text{ cm}$$

$$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$$

$$= 160 \times \frac{1}{100} = \frac{16}{10}$$

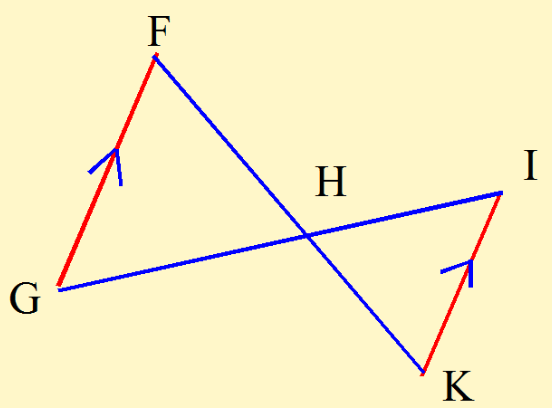
$$= 1.6 \text{ m}$$

اس لیے لڑکے کے سائے کا طول DE = 1.6 m

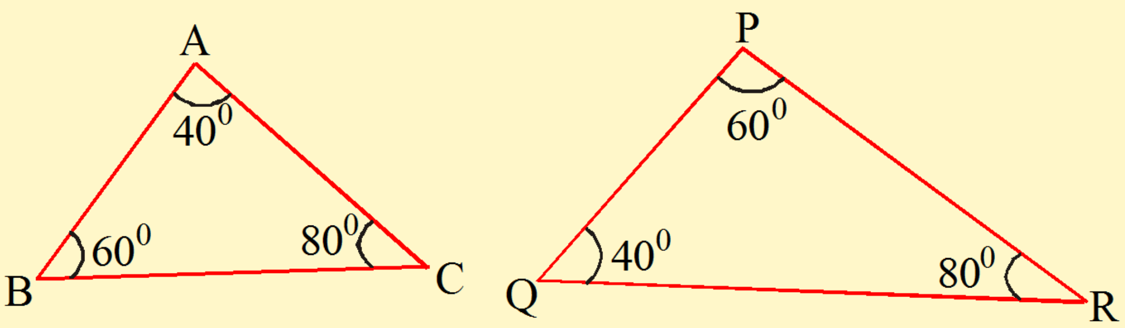
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

.1 کیا یہ مثلثات مشابہہ ہیں؟ اگر مشابہہ ہیں تو مشابہت کی کس خصوصیت کے تحت مشابہہ ہیں۔ مشابہت کے رشتے کو علامتی شکل میں لکھیے۔

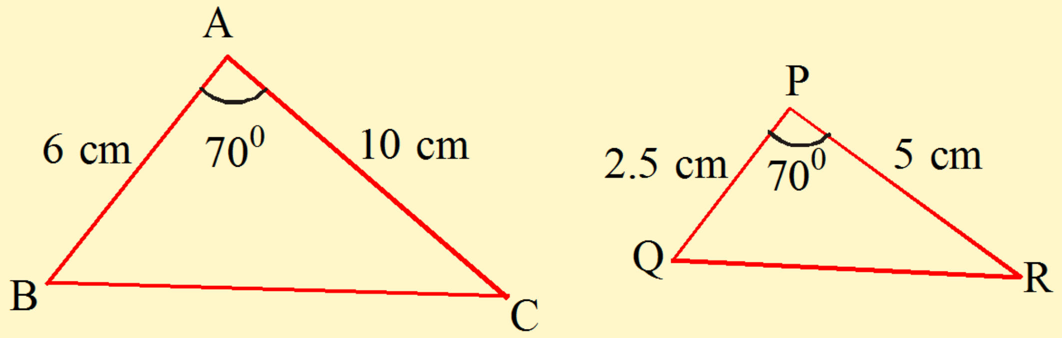
(i)



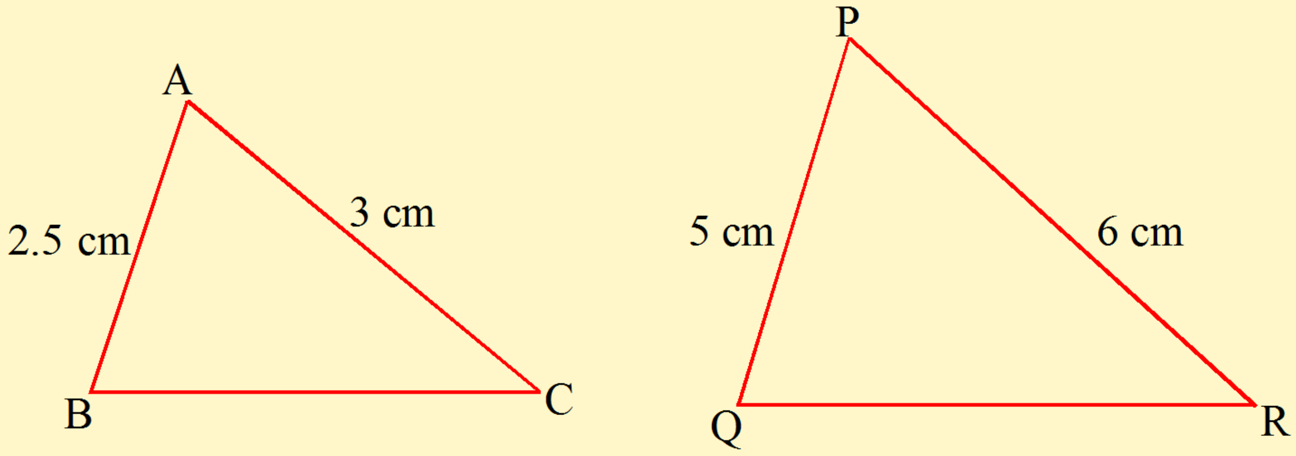
(ii)



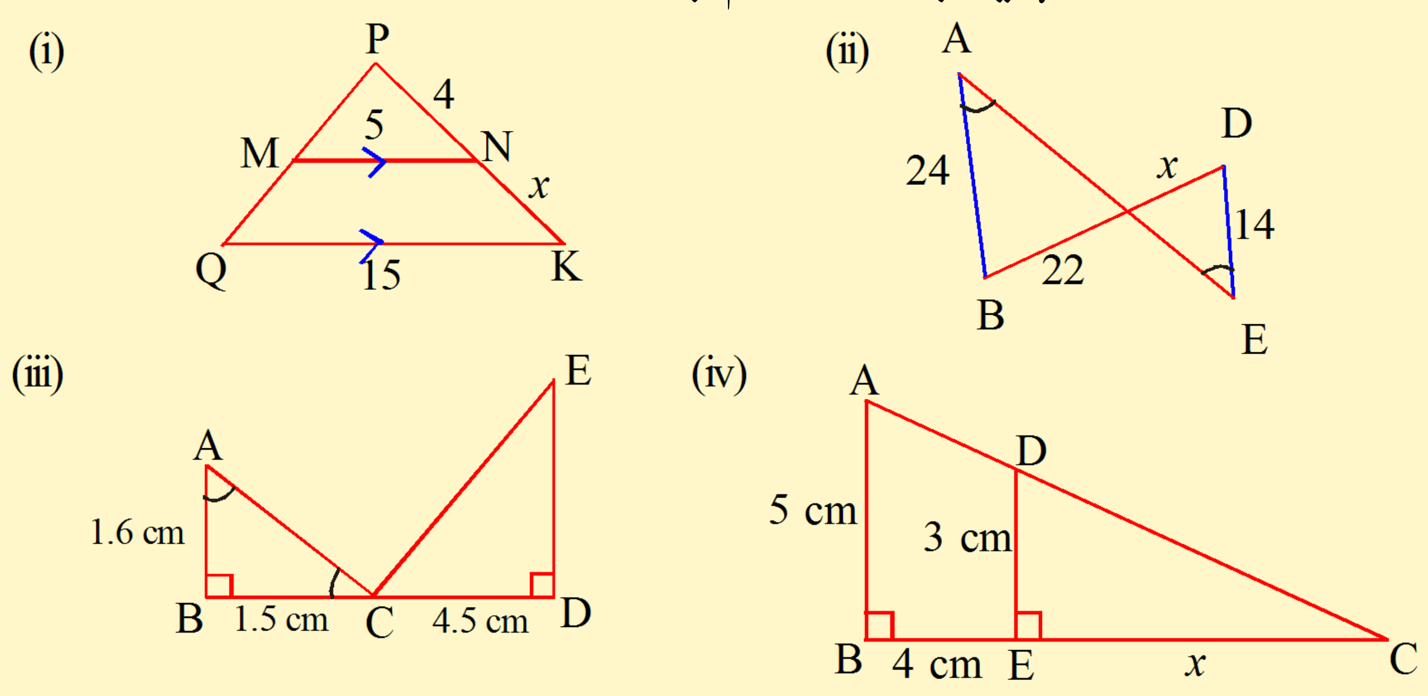
(iii)



(iv)



2. اگر مثلثات کے جوڑ مشابہہ ہیں تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

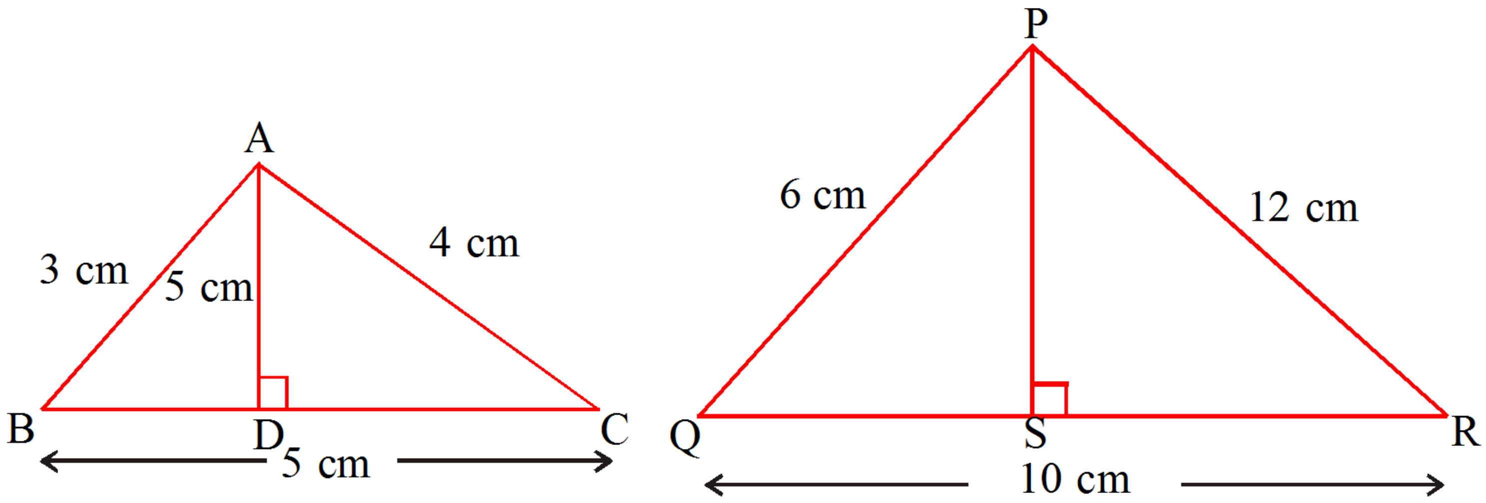


4.6.3 مشابہہ مثلثات کے رقبے

دو مشابہہ مثلثات کے لیے ان کے متناظر اضلاع کی نسبت مساوی ہوتی ہے۔ کیا ان کے رقبوں کی نسبت اور متناظر اضلاع کی نسبت میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے۔ اس بات کو سمجھنے کے لیے ہم حسب ذیل عملی کام پر غور کریں۔

مشغلہ-3

دو مثلثات ABC اور PQR اتاریے جو $\Delta ABC \sim \Delta PQR$



AD اور PS کے طول ناپئے

$AD \times BC$ اور $PS \times QR$ کی قدر ناپئے

غور کیجئے کہ

$$AD \times BC = BC^2$$

$$PS \times QR = QR^2$$

ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ ΔABC کا رقبہ $\times 2 = AD \times BC$

PS x QR = 2 x کارقبہ ΔPQR

غور کیجئے کہ

$$\frac{\Delta ABC \text{ کارقبہ}}{\Delta PQR \text{ کارقبہ}} = \frac{\frac{1}{2}\times AD\times BC}{\frac{1}{2}\times PS\times QR}$$

$$= \frac{AD\times BC}{PS\times QR}$$

$$= \frac{BC^2}{QR^2} \qquad \ldots\ldots(1)$$

چوں کہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$$\frac{\Delta ABC \text{ کارقبہ}}{\Delta PQR \text{ کارقبہ}} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

یہ کہا جاسکتا ہے کہ دو مشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

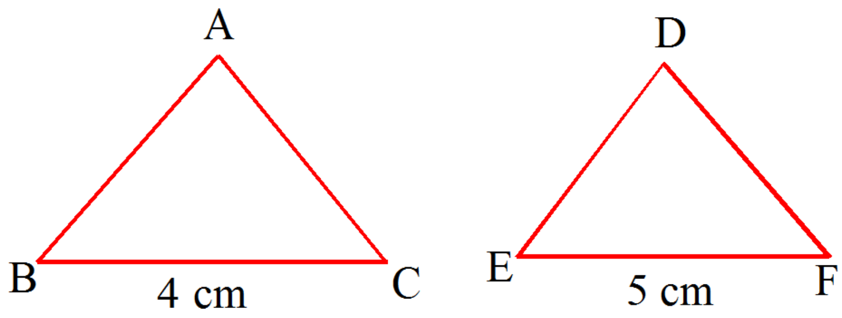
برعکس

1. دو مشابہہ مثلثوں کا رقبہ ان کے متناظر بلندیوں کے مربعوں کے متناسب ہوتا ہے۔
2. دو مشابہہ مثلثات کا رقبہ ان کے متناظر وسطانیوں کے مربعوں کے متناسب ہوتا ہے۔
3. دو مشابہہ مثلثات کا رقبہ ان کے متناظر زاویوں کے ناصفوں کے متناسب ہوتا ہے۔
4. دو مشابہہ مثلثات کا رقبہ ان کے متناظر احاطوں کے متناسب ہوتا ہے۔

آیئے ان نتائج کو مثالوں کے ذریعے سمجھیں گے۔

مثال-9: اگر ΔABC اور ΔDEF مشابہہ مثلثات میں اس طرح BC = 4cm ‘ EF = 5cm اور ΔABC کا رقبہ 64 مربع سمر ہے۔ ΔDEF کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$BC = 4$ cm, $EF = 5$cm.

کارقبہ $\Delta ABC = 64\ cm^2$

ہم جانتے ہیں $\dfrac{\text{کارقبہ } \Delta ABC}{\text{کارقبہ } \Delta DEF}$

$= \left(\dfrac{BC}{EF}\right)^2$ [$\because$ دومشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے]

$$\Rightarrow \frac{64}{\text{کارقبہ } \Delta DEF} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{64}{\text{کارقبہ } \Delta DEF} = \frac{16}{25} \qquad \because \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$$

(ضرب چلیپائی)

$$\Rightarrow \quad \text{کارقبہ } \Delta DEF = \frac{\cancel{64}^{4} \times 25}{\cancel{16}_{1}}$$

$= 4 \times 25$

$= 100\ cm^2$

$\therefore$ کارقبہ $\Delta DEF = 100\ cm^2$

مثال-10: دومشابہہ مثلثات کا رقبہ بالترتیب 12cm2 اور 64cm2 ہے۔ایک مثلث کے وسطانیہ کا طول 12.1 cm ہے تب دوسرے مثلث کی متناظر بلندی معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

کارقبہ $\Delta ABC = 121\ cm^2$

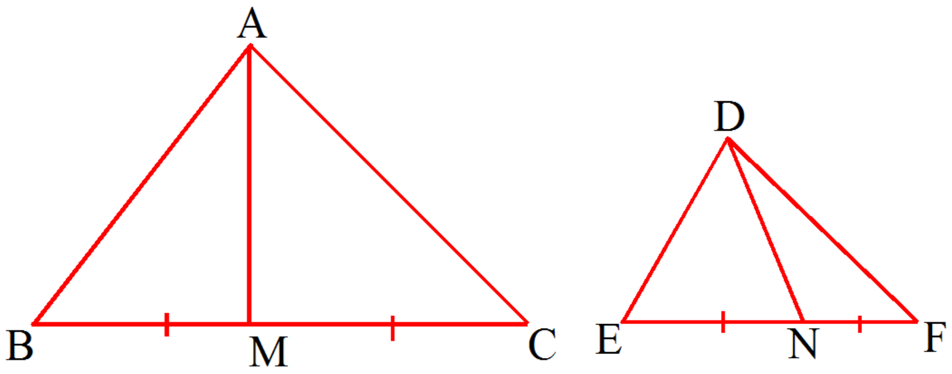
کارقبہ $\Delta DEF = 64\ cm^2$

وسطانیہ $= AM = 12.1$ cm

بلندی $= DN = ?$

$$\frac{\text{کارقبہ } \Delta ABC}{\text{کارقبہ } \Delta DEF} = \left(\frac{AM}{DN}\right)^2$$

[دومشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے مناظر وسطانیوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے]



$$\Rightarrow \frac{121}{64} = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \left(\frac{12.1}{DN}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{11}{8} = \frac{12.1}{DN}$$

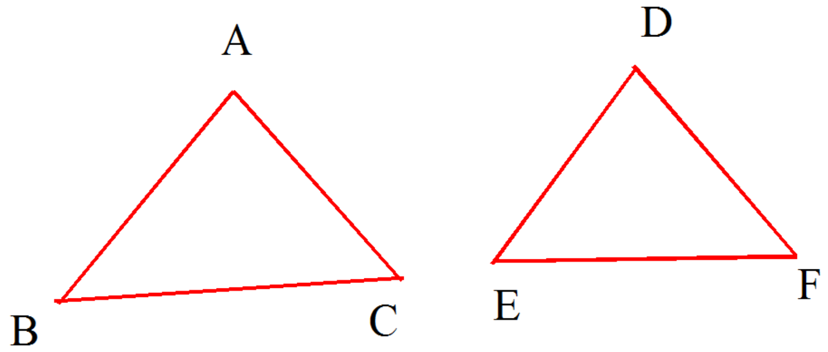
(ضرب چلیپائی)

$$\Rightarrow DN = \frac{\cancelto{1.1}{12.1} \times 8}{\cancel{11}_1}$$

$$= 8.8 \text{ cm}$$

بلندی(Median) کا طول 8.8 سمر

مثال-11: اگر دومشابہہ مثلثات کا رقبہ مساوی ہوتب ثابت کرو کہ مثلثات مماثل ہیں۔



حل: دیا گیا ہے کہ

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

اس لیے ΔABC کا رقبہ

چوں کہ دومشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے کوئی دومتناظر اضلاع کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔

$$\frac{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}}{\Delta ABC \text{ کا رقبہ}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

$$= \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

چوں کہ ΔABC کا رقبہ $=$ ΔDEF کا رقبہ

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = 1 \qquad \boxed{\Delta ABC \sim \Delta DEF}$$

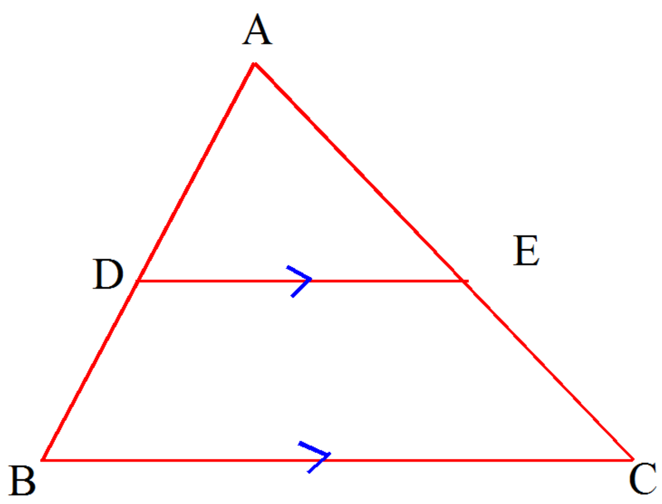
$$\Rightarrow AB^2 = DE^2,\ BC^2 = EF^2,\ AC^2 = DF^2$$

$$AB = DE, BC = EF,\ AC = DF \qquad \boxed{\begin{array}{l} x^2 = y^2 \\ \Rightarrow\ x = y;\ x, y > 0 \end{array}}$$

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ [SSS کے مماثل مسئلہ کے مطابق]

مثال-12: مثلث ABC میں $BC \parallel DE$ اس کے علاوہ AB اور AC نقاط D اور E پر ترتیب وار قطع کرتے ہیں۔ اگر $AD : DB = 2:3$ تب ΔADE اور ΔABC کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل: دیا گیا ہے کہ



$\Delta ABC,\ DE \parallel BC$ میں

$$AD : DB = 2 : 3$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \quad \text{......(1)}$$

بنیادی تناسب مسئلہ کی رو سے

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

مساوات (1) کے مطابق

$$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$$

مقلوب لکھتے ہوئے

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} = \frac{3}{2}$$ [ہر رکن میں 1 جمع کرنے پر]

$$\frac{DB}{AD}+1 = \frac{EC}{AE}+1 = \frac{3}{2}+1$$

$$\frac{DB+AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{3+2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$$ [مقلوب لکھتے ہوئے]

$$\therefore \quad \Delta ADE \sim \Delta ABC$$ [معیار کے مطابق]

اب $$\frac{\Delta ADE}{\Delta ABC} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$= \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$\therefore$ کا رقبہ ΔADE ; کا رقبہ ΔABC

4 ; 25

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. اگر دو مشابہہ مثلثات ABC اور PQR کا احاطہ 36cm اور 24cm ہے تب ان مثلثات کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

2. ΔABC میں XY || AC اور XY مثلث کی دو مساوی رقبوں میں تقسیم کرتا ہے۔ AX / XB معلوم کیجئے۔

3. ایک منحرف ABCD کے وتر ایک دوسرے کو '0' پر قطع کرتے ہیں جہاں AD / DC میں۔ اگر AB = 2CD ہوتو مثلثات AOB اور COD کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

4. کسی مثلث ABC میں نقاط D، E، F اضلاع BE، BC، CA اور AB کے وسطی نقاط ہیں۔ ΔDEF اور ΔABC کے رقبوں کی نسبت معلوم کیجئے۔

5. اگر ABC اور ΔDEF مشابہہ ہیں BC = 3cm، EF = 4cm اور ΔABC کا رقبہ 54 مربع سمر ہوتو ΔDEF کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4.6.4 فیثا غورث کا مسئلہ

مسئلہ فیثا غورث یونانی ریاضی دان فیثا غورث (570-495 ق م) سے موسوم ہے۔

تین اعداد (a, b, c) فیثا غورث کے تثلیث کہلاتے ہیں۔ اگر وہ کسی قائم الزاویہ مثلث کی تشکیل انجام دیتے ہیں۔

چناں چہ (a, b, c) فیثا غورث کی تثلیث ہے اگر صرف اور اگر $c^2 = a^2 + b^2$

فیثا غورث کی تثلیث کے تعلق سے مزید معلومات حاصل کرنے کے لیے حسب ذیل مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ - 4

(i) کوئی دو متواتر طاق اعداد لیجیے۔

(ii) ان اعداد کے مقلوب کو آپس میں جمع کیجیے۔ آپ کو ایک عدد $\frac{p}{q}$ کی شکل میں حاصل ہوگا۔

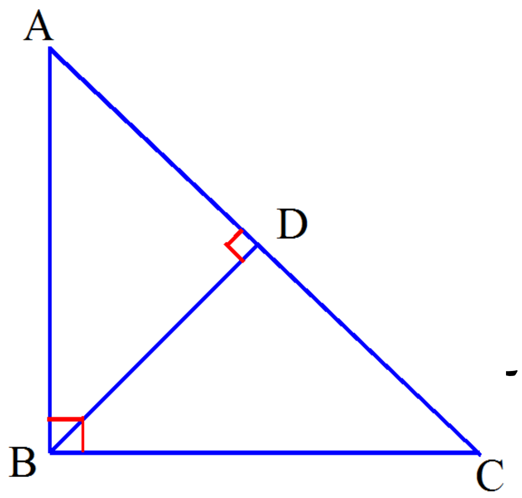
(iii) $\frac{p}{q}$ کے نسب نما میں 2 جمع کرنے پر $q + 2$ حاصل ہوگا۔

(iv) اعداد p، q، $q = 2$ پر غور کیجیے۔ کیا ان میں کوئی رشتہ قائم کر سکتے ہیں؟

تین متواتر طاق اعداد لے کر یہ عمل کیجیے اور اپنے نتیجے پر غور کیجیے۔

نوٹ: 1, 3 ; 3, 5; 5, 7 ; 7, 9 - متواتر طاق اعداد کی مثالیں ہیں۔

آیئے فیثا غورث کے مسئلے کا مطالعہ کریں گے۔



مسئلہ 4.6.3 : کسی قائم الزاویہ مثلث میں وتر پر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔

دیا گیا ہے: قائم الزاویہ مثلث ABC میں $\angle B = 90^0$

مطلوب: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

بناوٹ: $BD \perp AC$ بنایئے۔

ثبوت: مثلث DABC اور DADB میں

$\angle A$ مشترک ہے۔

$\angle ABC = \angle BDA = 90^0$ | $\because BD \perp AC$

اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ | $\because$ AA کا مثلث

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$ | $\because$ ضرب چلیپائی

$\Rightarrow AB^2 = AC \times AD$ ......(1)

ΔABC اور ΔBDC کے ذریعے

$\angle C$ مشترک ہے۔

$\angle BDC = \angle ABC = 90^0$ | $\because AD \perp AC$

اس لیے $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ | $\because$ AA کا مثلث

$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{BC}$ | $\because$ ضرب چلیپائی

$\Rightarrow BC^2 = AC \times CD$ ......(2)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$AB^2 + BC^2$

$= AC \times CD + AC \times AD$

$= AC\,(CD + AC)$ | $\because AC + CD = AC$

$= AC \times AC$

$= AC^2$

اس لئے $AB^2 + BC^2 = AC^2$

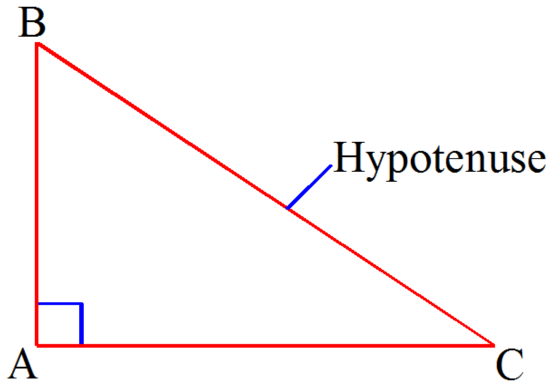
ثابت ہوا۔

فیثاغورث کے مسئلے کو ہندوستان کے قدیم ریاضی داں ''بودھیان'' نے پیش کیا تھا۔

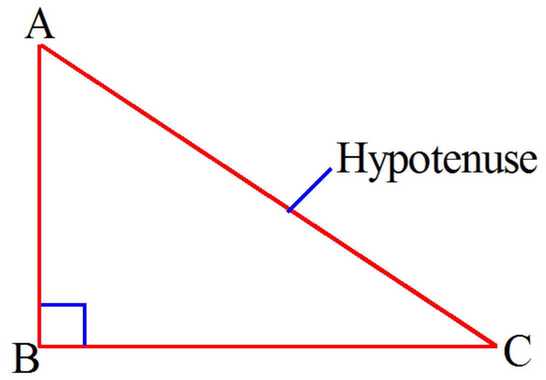
اوپر بیان کیے گئے مسئلہ کے عکس کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ اسے اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے ''ایک مثلث میں ایک ضلع کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف بننے والا زاویہ قائمہ ہوگا اور مثلث ایک قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔

نوٹ 1 : ΔABC میں اگر $AB^2 + CA^2 = BC^2$

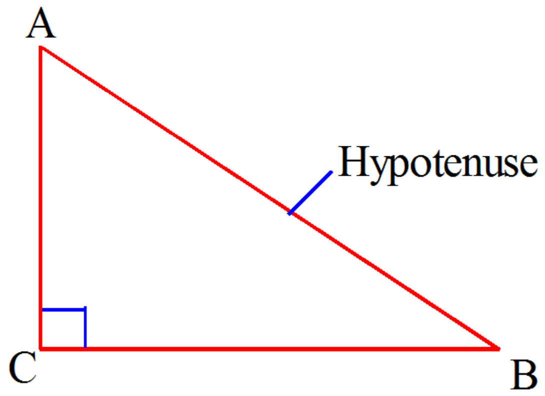
تب $\angle A = 90^0$



.2 مثلث ABC میں اگر $AB^2 + BC^2 = AC^2$ تب $\angle B = 90^0$

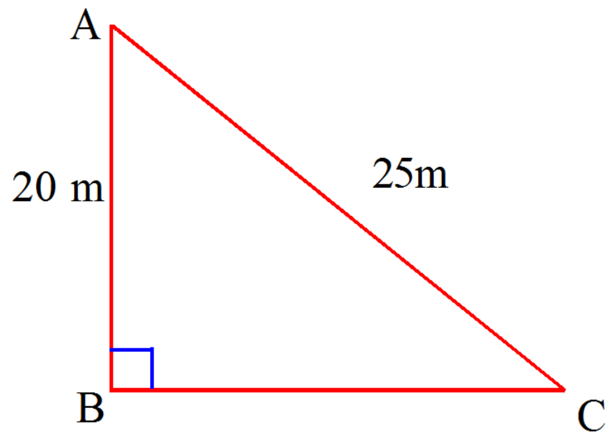


.3 مثلث ABC میں اگر $AC^2 + BC^2 = AB^2$ تب $\angle C = 90^0$



مسئلہ فیثا غورث اور برعکس مسئلہ کی بنیاد پر چند مسائل حل کریں۔

مثال-13: 25 میٹر لمبی ایک سیڑھی ایک عمارت کی کھڑکی تک پہنچتی ہے جو زمین سے 20 میٹر کی اونچائی پر ہے۔ بتائیے کہ سیڑھی عمارت کے قاعدے سے کتنے فاصلے پر رکھی گئی ہے۔



حل: دیا گیا ہے کہ

سیڑھی کا طول

$= AC = 25\text{ m}$

کھڑکی کی بلندی

$= AB = 20\text{ m}$

سیڑھی کے قاعدے اور عمارت کا فاصلہ = $BC = ?$

$\angle B = 90^0$ میں DABC

فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 + BC^2$

$\Rightarrow (25)^2 = (20)^2 + BC^2$

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{a^2} &= \sqrt{a \times a}\\ &= a\ ;\ a > 0\end{aligned}}$$

$\Rightarrow 625 = 400 + BC^2$

$= 225$

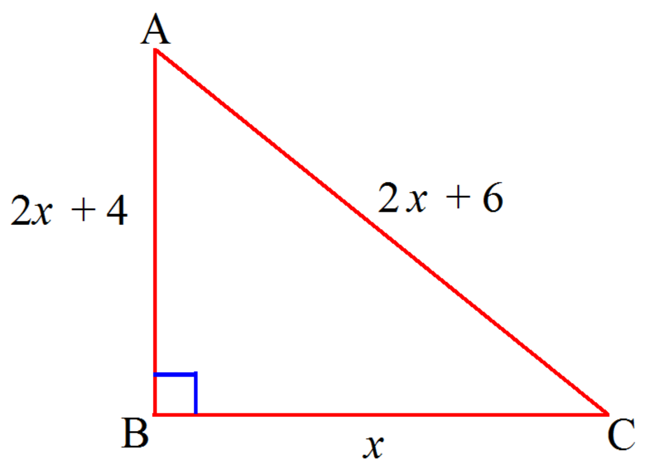
$BC = \sqrt{225} = \sqrt{15 \times 15}$

$= 15$ m

لہٰذا سیڑھی کے قاعدے اور عمارت کا درمیانی فاصلہ = 15 m

مثال-14: ایک قائم الزاویہ مثلث میں وتر اس کے سب سے چھوٹے ضلع کے دوگنا سے 6m سے زیادہ ہے۔ تیسرا ضلع وتر سے 2m کم ہو تب مثلث کے اضلاع کے اصول معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ سب سے چھوٹا ضلع



$BC = x$

وتر $AC = 2x + 6$

تیسرا ضلع $= AB$

$= 2x + 6 - 2$

$= 2x + 4$

فیثاغورث مسئلہ کی رو سے $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$(2x + 6)^2 = (2x + 4)^2 + (x)^2$

$\Rightarrow (2x+6)^2 = (2x+4)^2 + (x)^2$ $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(6) + (6)^2$$

$$\Rightarrow (2x)^2 + 2(2x)(4) + (4)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 24x + 36 = 4x^2 + 16x + 16 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16x + 16 = 24x + 36$$

$$\Rightarrow x^2 + 16x - 24x + 16 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 2x + 20 = 0 \qquad -20 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$$

$$\Rightarrow x(x-10) + 2(x-10) = 0 - 8 = \boxed{-10} \times \boxed{2}$$

$$\Rightarrow (x-10) + (x+2) = 0$$

$$x - 10 = 0 \qquad x + 2 = 0$$

$$\boxed{x = 10} \qquad \boxed{x = -2}$$

لیکن x منفی نہیں ہوسکتا اس لیے

$$\therefore \boxed{x = 10}$$

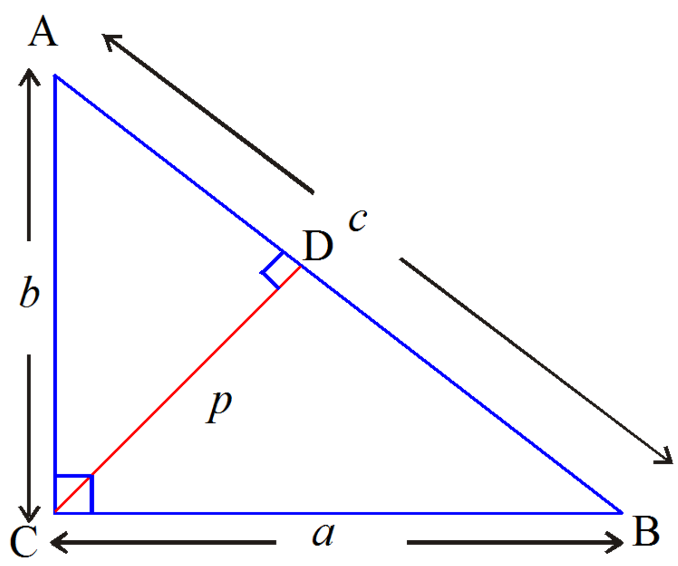
اضلاع ہوں $x, \ 2x + 4, \ 2x + 6$

$$\Rightarrow 10, \ 20 + 4, \ 20 + 6$$

$$\Rightarrow 10, \ 24, \ 26.$$

مثال-15: ΔABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جو C پر قائمہ ہے۔فرض کیجئے کہ $BC = a$ ، $CA = b$ اور $AB = C$ اورفرض کیجئے کہ 'p' C سے AB پر عمود کا طول ہے۔ثابت کیجئے کہ

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$



حل: $CD \perp AB$ اور $CD = p$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$= \frac{1}{2} \times c \times p$$

$$= \frac{1}{2} c\, p \qquad \text{......(1)}$$

ΔABC کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b = \frac{1}{2}ab \quad \cdots\cdots(2)$$

(1) اور (2) کی مدد سے

$$\Rightarrow \frac{1}{2}cp = \frac{1}{2}ab$$

$$cp = ab \quad \cdots\cdots(1)$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$\because$ (1) سے $\quad \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$

$c = \dfrac{ab}{p} \quad c^2 = b^2 + a^2$

چنانچہ $\quad \left(\dfrac{ab}{p}\right)^2 = a^2 + b^2$

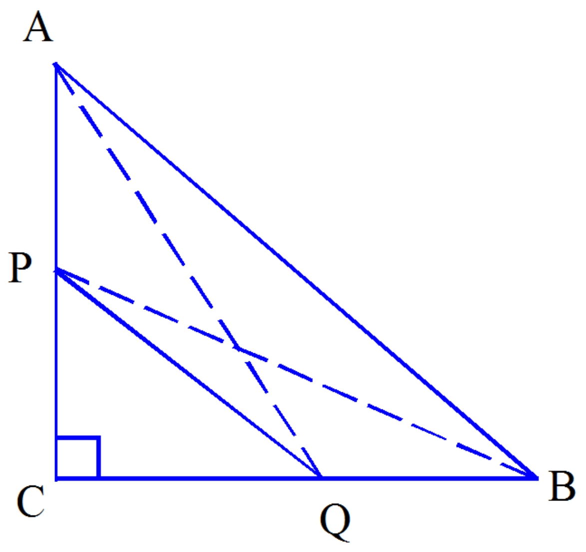
$$\Rightarrow \frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2} + \frac{b^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

ثابت ہوا۔

مثال-16: ΔABC میں P اور Q اضلاع CA اور CB کے بالترتیب وسطی نقاط ہیں جیسا کہ قائم الزاویہ C پر واقع ہے۔
ثابت کیجئے کہ $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$



حل: ΔABC نقطہ C پر قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$\Rightarrow AQ^2 = AC^2 + QC^2$ ......(1)

ΔABC نقطہ C پر قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$\Rightarrow BP^2 = BC^2 + CP^2$ ......(2)

ΔABC نقطہ C پر قائم الزاویہ مثلث ہے۔

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$ ......(3)

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر

$$AQ^2 + BP^2 = AC^2 + QC^2 + BC^2 + CP^2$$

دونوں جانب 4 کو ضرب دینے پر

$$4(AQ^2 + BP^2) = 4AC^2 + 4QC^2 + 4BC^2 + 4CP^2$$

$= 4AC^2 + (2QC)^2 + 4BC^2 + (2CP)^2$ | P اور Q وسطی نقاط ہیں

$= 4AC^2 + BC^2 + 4BC^2 + AC^2$ $\because 2QC = BC$

$= 5AC^2 + 5BC^2$ $\because 2CP = AC$

$= 5(AC^2 + BC^2)$ | $\because$ (3) مساوات

$= 5AB^2$

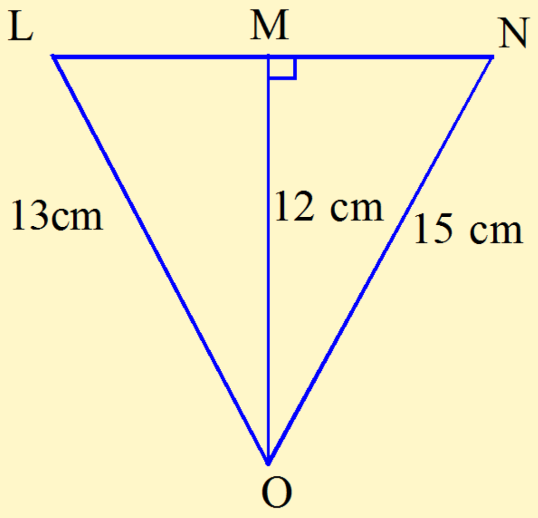
پس، ثابت ہوا۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

.1 کیا ایک قائم الزاویہ مثلث کی پیمائشات 5cm، 12cm اور 13cm ہوسکتی ہیں؟

.2 ایک 20 فٹ سیڑھی ایک دیوار پر 16 فٹ تک پہنچ پاتی ہے۔ سیڑھی کا قاعدہ دیوار سے کتنی دوری پر ہے۔

.3 متصلہ شکل میں LM، MN اور LN کا طول معلوم کیجئے۔



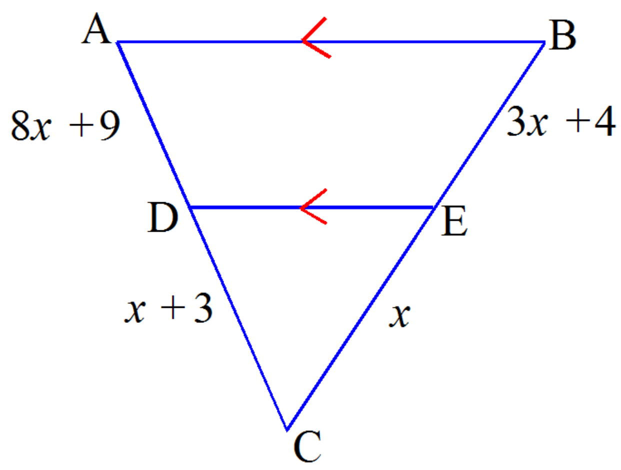
.4 اس مربع کے وتر کا طول معلوم کیجئے جس کا ضلع 'a' اکائیاں ہو۔

.5 PQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $\angle Q = 90^0$ ۔ ثابت کیجئے کہ $PR^2 = 2PQ^2$

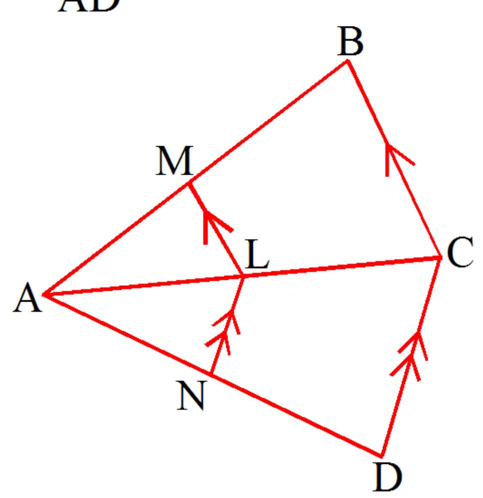
مشق

.1 اسحاق کہتا ہے کہ مختلف طول رکھنے والے نصف قطروں کے دائرے مشابہہ ہوتے ہیں۔ کیا آپ اسحاق سے متفق ہیں۔ اپنے جواب کی توضیح کیجئے۔

.2 متصلہ شکل میں AB || DE تب x یعنی (S) کی قدر معلوم کیجئے۔



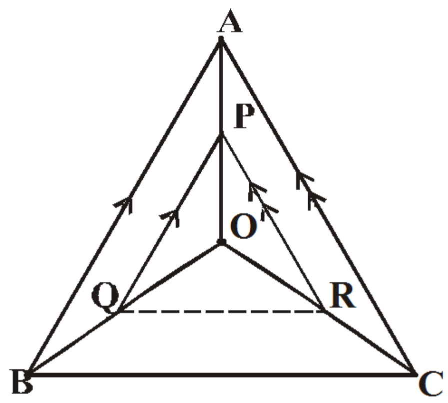
.3 شکل میں CB || LM اور CD || LN ثابت کیجئے کہ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$



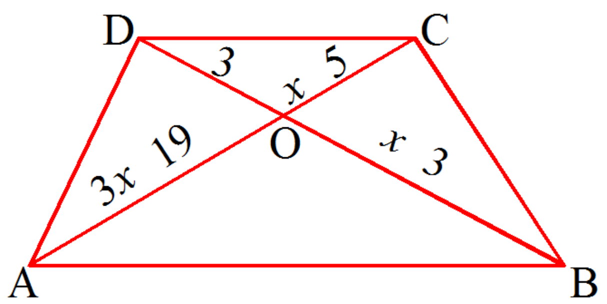
4. ABCD ایک منحرف ہے جس میں AB || DC اور اس کے وتر ایک دوسرے کو نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ بتائیے کہ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$

5. ΔPQR میں نقاط E اور F اضلاع بالترتیب PQ اور PR پر واقع ہیں۔ PE = 3.9cm، EQ = 3cm، PF = 3.6cm اور FR = 2.4cm بتائیے کہ EF || QR یا نہیں۔

6. شکل کے مطابق A، B اور C اضلاع OP، OQ اور OR پر ترتیب وار واقع ہیں اس طرح کہ
AB || PQ اور AC || PR
بتائیے کہ BC || QR

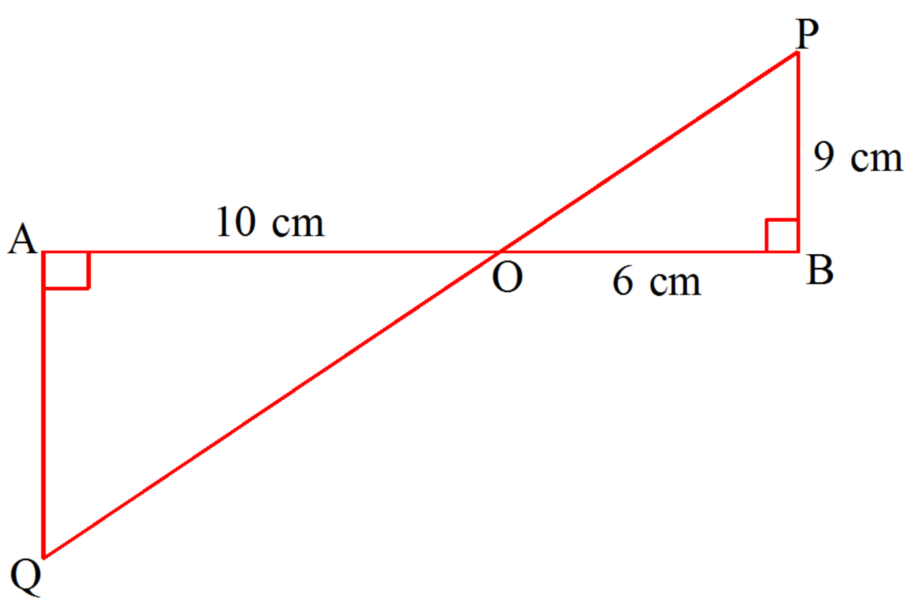


7. شکل میں AB || DC، x کی قدر معلوم کیجیے۔

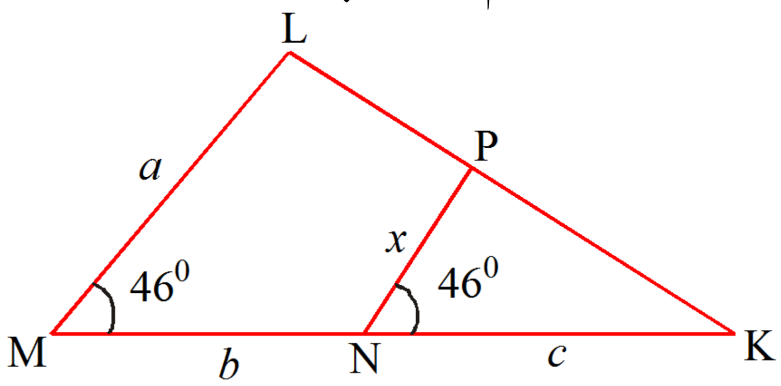


8. دو کھمبے جن کی بلندی a میٹر اور b میٹر ہیں زمین میں نصب ہیں۔ ثابت کیجیے کہ کھمبوں کے اوپری سرے سے مقابل کے کھمبوں کے قدم سے ملانے والے خطوط کا نقطہ تقاطع زمین سے $\frac{ab}{a+b}$ میٹر بلندی پر ہے۔

9. دی گئی شکل میں QA اور PB خط AB پر عمودوار ہیں۔ اگر AO = 10cm، BO = 6cm اور PB = 9cm تب AQ معلوم کیجیے۔



.10 دی گئی شکل میں x کو a ‘ b اور c کی رقوم میں ظاہر کیجیے۔



.11 ثابت کیجیے کہ کسی مربع کے ضلع پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ‘ وتر پر بنائے گئے مساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ کا نصف ہے؟

.12 ایک گلی میں 13 میٹر لمبی ایک سیڑھی عمارت کی کھڑکی تک جو 12 میٹر اونچی ہے‘ رکھی گئی ہے۔ سیڑھی کو گلی کی دوسری طرف بلندی پر یہ 5 میٹر اونچائی تک پہنچتی ہے۔ گلی کی چوڑائی کیا ہوگی؟

.13 ABC ایک مساوی الساقین ہے جس میں $AC = BC$ اگر $AB^2 = AC^2$ ثابت کیجیے کہ ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔

.14 ΔABC میں اگر AD وسطانیہ معلوم ہے تب بتائیے کہ $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

.15 ایک مساوی الاضلاع مثلث ABC میں ضلع BC میں ایک نقطہ D اس طرح واقع ہے کہ $BD = \frac{1}{3}\ BC$ ثابت کیجیے کہ $9AD^2 = 7AB^2$

ہم نے کیا سیکھا؟

- دو اشیا جن کی شکل ایک ہو لیکن جسامت مختلف یا ایک ہی ہو‘ مشابہہ اشیا کہلاتی ہیں۔
- کوئی دو کثیر ضلعی جس میں متناظر زاویے مساوی اور متناظر اضلاع ایک تناسب میں ہوں مشابہہ ہوتی ہیں۔
- دو مثلثات مشابہہ ہوتے ہیں اگر

  (i) ان کے متناظر زاویے مساوی ہوں۔

  (ii) ان کے متناظر اضلاع ایک ہی تناسب میں ہوں۔

- کسی مثلث میں ایک خط کسی ضلع کے متوازی کھینچا گیا ہو تب یہ خط دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
- اگر کسی مثلث میں ایک خط اس کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں تقسیم کرتا ہو یہ خط مثلث کے تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔
- دو مشابہہ مثلثوں کے رقبوں کی نسبت ان کے متناظر اضلاع کے مربعوں کی نسبت کے مساوی ہوتی ہے۔
- کسی قائم الزاویہ مثلث میں وتر پر کا مربع باقی دو اضلاع پر کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہوتا ہے۔
- ایک مثلث میں ایک ضلع پر کا مربع باقی دو اضلاع کے مربعوں کے مجموعے کے مساوی ہو تو پہلے ضلع کے مخالف بننے والا زاویہ قائمہ ہوگا اور مثلث ایک قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ (مسئلہ فیثا غورث کا برعکس مسئلہ)

سبق
4.7
دائرے
Circles

4.7.0 اکتسابی مقاصد

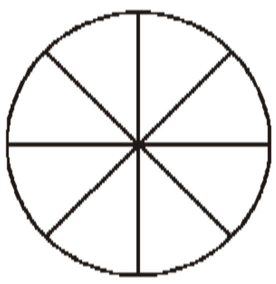
اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے:

- دائرہ کی تعریف۔
- دائرہ کے متعلقہ مختلف اصطلاحات کو مثالوں کے ذریعہ سمجھنا۔
- مشابہہ دائرے اور ہم مرکز دائرے کی تعریف اور تشریح۔
- دائرہ کے متعلق تصورات جیسے وتر، قوس، قطاع، قطعہ وغیرہ کی نشاندہی اور تشریح۔
- دائرے کے وتر اور قوس پر مبنی سوالات کے حل کو تجربہ کرتے ہوئے تصدیق۔
- سوالات حل کرنے میں مسئلوں (Theorems) کا استعمال۔

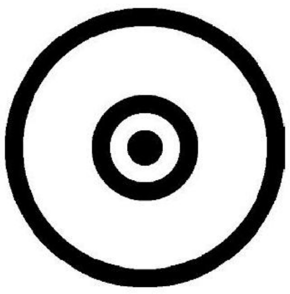
4.7.1 تعریف

روزمرہ زندگی میں ہمیں کئی ایسی اشیاء سے واسطہ پڑتا ہے جس کی شکل گول ہوتی ہے جیسے سکہ، گاڑی کا پہیہ، چوڑیاں، ڈسک، حرف 'o' اور گھڑی کی سوئی کا راستہ۔ سوئی کے کنارے سے بننے والا منحنی خط دائرہ کہلاتا ہے۔

سکہ


پہیہ

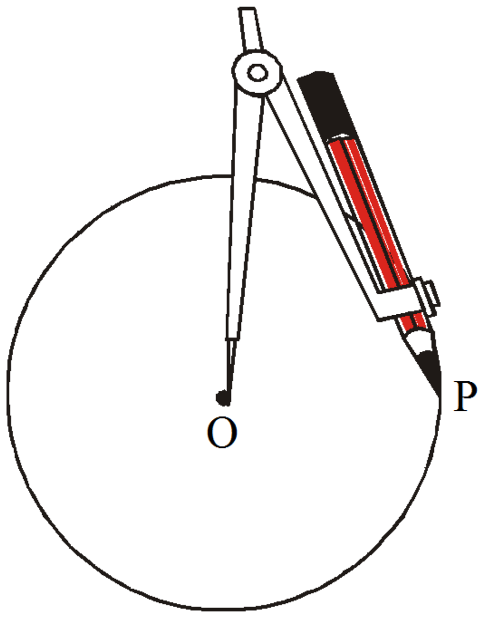

چوڑی


CD

4.7.2 دائرہ اور اس سے متعلقہ تصورات/اصطلاحات (Ccircle and related Terms)

پنسل کو پرکار میں کَس (Fix) دیجئے۔ کاغذ کی شیٹ پر پرکار کی نوک رکھ کر پنسل کو اس طرح گھمایئے کہ وہ ایک بند شکل ہوجائے۔ جیسا کہ آپ جانتے ہیں یہ دائرہ ہوگا۔ آپ کو دائرہ کس طرح حاصل ہوا؟ نقطہ 'O' کا تعین کرتے ہوئے پرکار کی سوئی کو 'O' پر رکھ کر اتنے نقاط لگائے جائیں کہ کوئی جگہ باقی نہ رہے۔ اس کی تعریف ہم یوں کرتے ہیں۔

''کسی مستوی میں ایک متعین نقطہ سے مساوی فاصلہ پر لئے گئے تمام نقاط سے بننے والی شکل دائرہ کہلاتی ہے۔''



شکل-1

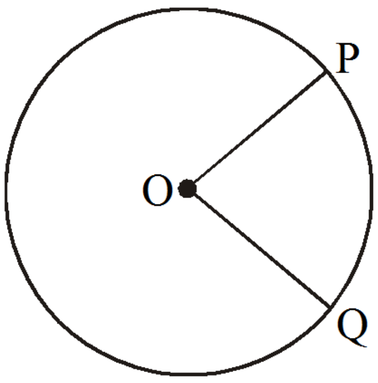
متعین نقطہ دائرہ کا 'مرکز' اور مرکز سے منحنی خط پر کسی بھی نقطہ کا فاصلہ دائرہ کا نصف قطر (radius) کہلاتا ہے۔ جس کو 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(شکل-1) میں 'O' دائرہ کا مرکز اور OP دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$\therefore \ r = OP$

نوٹ: خطی قطعہ جو مرکز اور دائرہ پر کسی بھی نقطہ کو ملاتا ہو دائرہ کا نصف قطر کہلاتا ہے۔ نصف قطر کو ایک خطی قطعہ کے طور پر یا اس کے طول کے مفہوم میں بھی لیا جاتا ہے۔

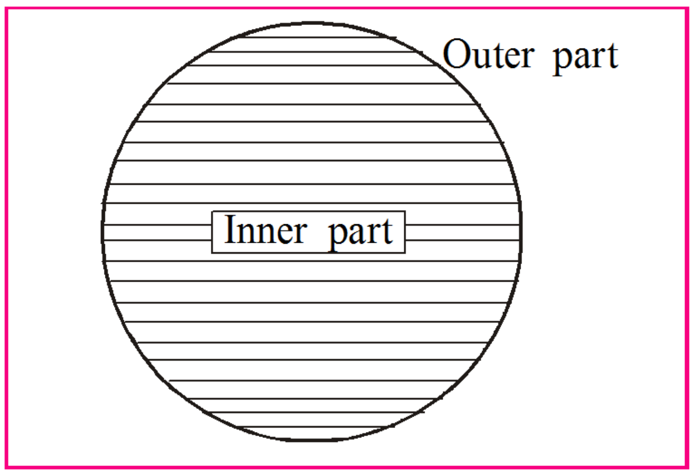
مشغلہ-1



کسی بھی نصف قطر کا دائرہ بنائیے۔ جیسا کہ (شکل-2) میں بتلایا گیا ہے OP اور OQ کی پیمائش کیجئے آپ کیا مشاہدہ کریں گے کہ وہ مساوی ہیں۔

$OP = OQ = r$

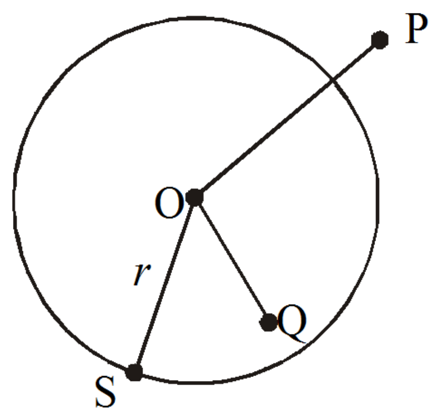
- ایک دائرہ کے تمام نصف قطر مساوی ہوتے ہیں۔



مستوی میں ایک بند جیومٹریائی شکل مستوی کو تین حصوں میں تقسیم کرتی ہے جیسا کہ شکل-3 میں دکھلایا گیا ہے۔ یہ تین حصے ہیں: (i) اندرونی دائرہ (سایہ دار حصہ) (ii) بیرون دائرہ (غیر سایہ دار حصہ) اور (iii) دائرہ کا منحنی خط

مشغلہ-2

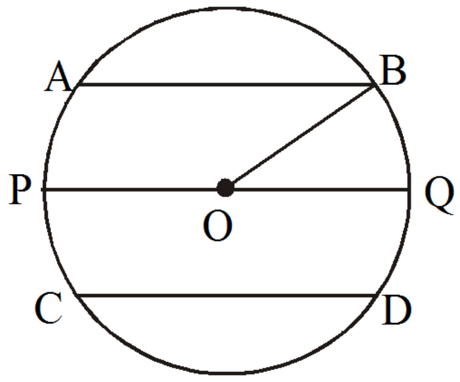
1. دائرہ کے اندرونی حصہ میں ایک نقطہ 'Q' لیجئے (شکل-4 دیکھئے) OQ کی پیمائش کیجئے۔ آپ کو پتہ چلے گا کہ $OQ < r$ 'دائرہ کا اندرونی حصہ اندرون دائرہ کہلاتا ہے۔''



2. اب آپ دائرہ کے باہر ایک نقطہ 'P' لیجئے (شکل-4) OP کی پیمائش پر یہ معلوم ہوگا کہ $OP > R$ دائرہ کے باہر کا حصہ "بیرون دائرہ" کہلاتا ہے۔

3. نقطہ 'S' دائرے پر واقع ہے یعنی $OS = r$

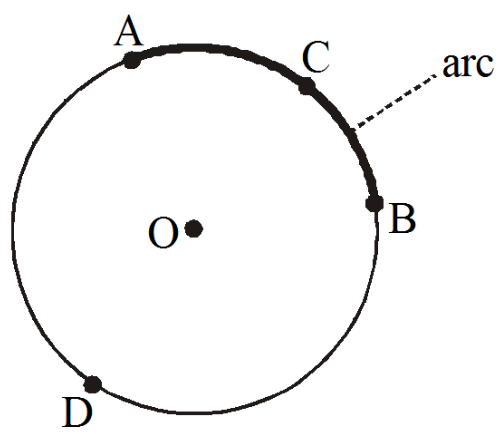
وتر (Chord)



خطی قطعہ جو دائرہ کے کوئی دو نقاط کو ملاتا ہے 'وتر' (Chord) کہلاتا ہے۔ شکل-5 میں AB، PQ اور CD دائرہ کے تین وتر ہیں جس کا مرکز 'O' اور نصف قطر 'r' ہے۔ وتر جو دائرہ کے مرکز سے گذرتا ہے۔ 'قطر' (diameter) کہلاتا ہے۔ عام طور پر قطر کو 'd' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشغلہ-3

شکل-5 میں AB ‘PQ ‘CD ‘OB کا طول معلوم کیجئے۔ آپ کو پتہ چلے گا PQ ‘2OB کے مساوی ہے۔
اس طرح



$$d = 2r$$

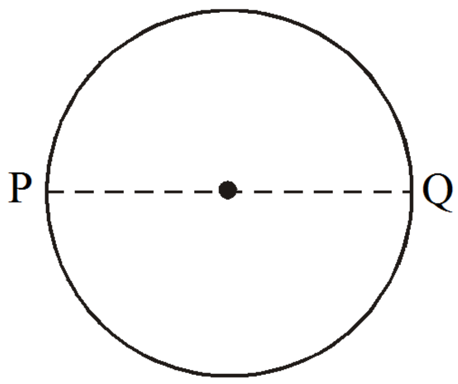
اور $PQ > AB$ اور $PQ > CD$

یعنی قطر' دائرہ کا سب سے بڑا وتر ہوتا ہے۔

قوس (Arc)

دائرہ کے محیط کا حصہ ایک قوس' کہلاتا ہے۔ (شکل-6) میں ACB ایک قوس ہے اور اس کو $\overset{\frown}{ACB}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

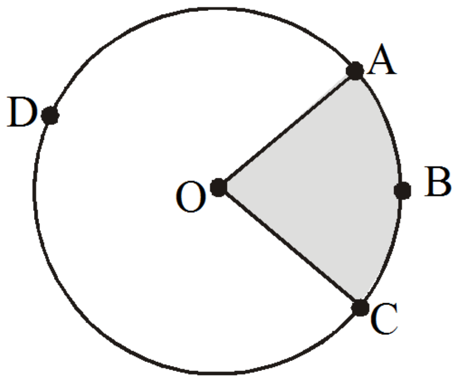
شکل-6 میں قوس ACB قوس اصغر اور قوس ADB قوس اکبر کہلاتی ہے۔



نصف دائرہ (Semi Circle)

شکل-7 میں اگر نقاط 'P' اور Q ایک قطر کے دو اختتامی نقاط ہیں جو دائرہ کو دو مساوی قوس میں تقسیم کرتے ہیں۔ تب ہر ایک قوس میں ایک نصف دائرہ ہوگا۔

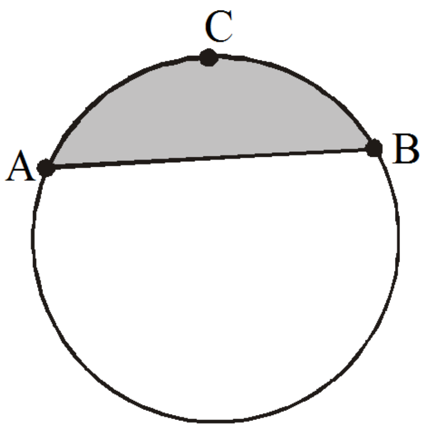
قطاع (Sector)



دائرہ کا قوس اور دو نصف قطروں سے گھرا ہوا علاقہ قطاع (Sector) کہلاتا ہے۔ (شکل 8-) میں قوس ABC سے تشکیل پانے والا قطاع سایہ دار ہے۔ جب کہ قوس ADC سے تشکیل پانے والا قطاع غیر سایہ دار ہے۔

شکل-8، میں $\angle AOC$ قطاع کا زاویہ کہلاتا ہے۔

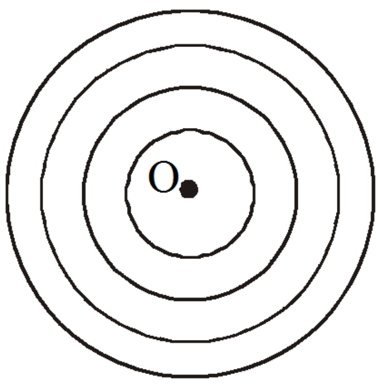
قطعہ (Segment)



اگر ایک وتر دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے ہر ایک حصہ ایک قطعہ ہوگا۔ وتر اور قوس اصغر سے گھرا ہوا علاقہ 'قطعہ اصغر' کہلاتا ہے۔ جب کہ وتر اور قوسِ اکبر سے گھرا ہوا علاقہ ACB "قطعہ اصغر" اور غیر سایہ دار علاقہ ADB "قطعہ اکبر" ہے۔

کامل دائرہ کا طول "محیط" کہلاتا ہے۔

ہم مرکز دائرے (Cocentric Circles)



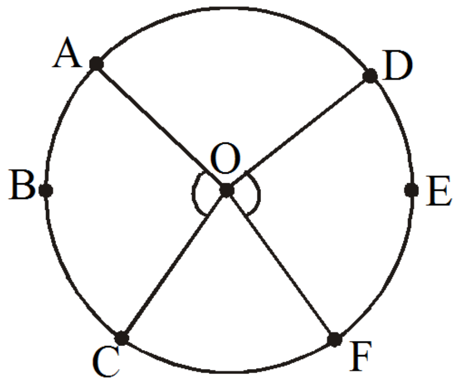
دائرے جو ایک ہی مرکز لیکن مختلف نصف قطر رکھتے ہیں "ہم مرکز دائرے" کہلاتے ہیں۔ جیسا کہ (شکل-10) میں دکھلایا گیا ہے۔

مماثل دائرے (Congruent Circles)

ایک ہی نصف قطر والے تمام دائرے ایک دوسرے کے مماثل ہوتے ہیں۔

یعنی تمام مماثل دائرے ایک ہی جسامت رکھتے ہیں۔ اگر ایسے دائرے ایک دوسرے پر رکھے جائیں تو وہ بالکل ٹھیک طور پر ایک دوسرے سے منطبق ہوجاتے ہیں۔

4.7.3 کسی دائرہ کے دوقوس اس وقت ہر طرح مماثل کہلاتے ہیں جب کہ دائرہ کے مرکز پر بننے والے زاویے مساوی ہوں۔



مشغلہ-4

1. ایک دائرہ بنایئے جس کا مرکز 'O' ہو۔
2. (شکل-11) میں، اگر

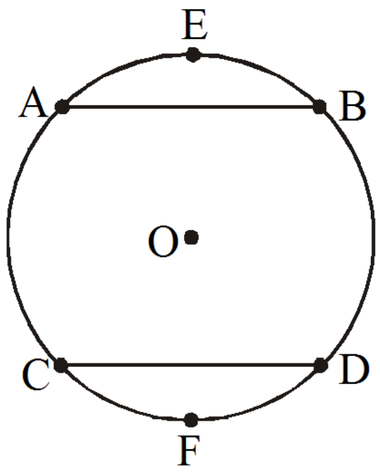
قوس ABC = قوس DEF

تب $\angle AOC = \angle DOF$

- یعنی، ایک دائرہ کے دوقوس مماثل ہوتے ہیں۔ اگر اور صرف اگر مرکز پر بننے والے مقابل کے زاویے مساوی ہوں۔

4.7.4 ایک دائرہ کے دوقوس، مماثل ہوتے ہیں اگر اور صرف اگر ان کے متناظر وتر مساوی ہوں۔

مشغلہ-5



1. ایک دائرہ بنایئے جس کا مرکز 'O' ہو۔
2. (شکل-12) میں AB اور CD دو مساوی وتر کھینچے گئے ہیں۔

اگر AB = CD تب

قوس AEB = قوس CFD اس کے برعکس۔

اگر قوس AEB = قوس CFD

تب AB = CD

- یعنی، ایک دائرہ کے دوقوس مماثل ہوتے ہیں۔ اگر اور صرف اگر ان کے متناظر قوس مساوی ہوں۔

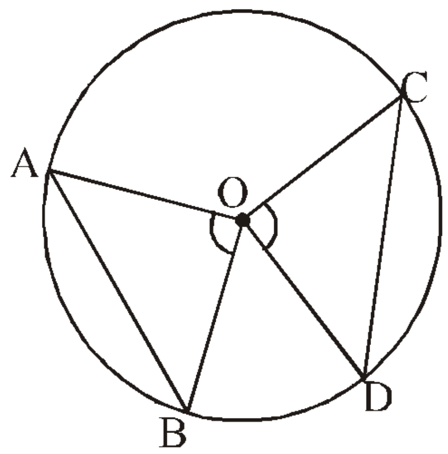
4.7.5 ”ایک دائرہ کے دو مساوی وتر مرکز پر مقابل کے مساوی زاویے بناتے ہیں اور اس کے برعکس اگر دائرہ کے وتر سے مرکز پر بننے والے مقابل کے زاویے مساوی ہوں تو ان کے وتر بھی مساوی ہوتے ہیں۔“

مشغلہ-6

1. ایک دائرہ بنایئے جس کا مرکز 'O' ہو۔

2. دو مساوی وتر AB اور CD بنائیے جیسا کہ (شکل-13) میں دکھلایا گیا ہے۔

3. OA، OB، OC اور OD کو ملائیے۔



4. $\angle AOB$ اور $\angle COD$

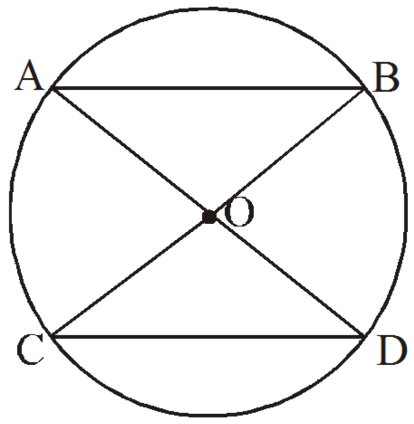
اس کا برعکس،

اگر $\angle COD = \angle AOB$

تب $AB = CD$

- ''ایک دائرہ کے دو مساوی وتر مرکز پر مقابل کے مساوی زاویے بناتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر دائرہ کے وتر سے مرکز پر بننے والے مقابل کے زاویے مساوی ہوں تو ان کے وتر بھی مساوی ہوتے ہیں۔''

مثال-1 (شکل-14) میں $AB = CD$، بتلائیے کہ قوس $AC = BD$ قوس



شکل-14

حل: (شکل 3.6.14) میں مساوی وتر AB اور CD کے متناظر قوس مساوی ہیں

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

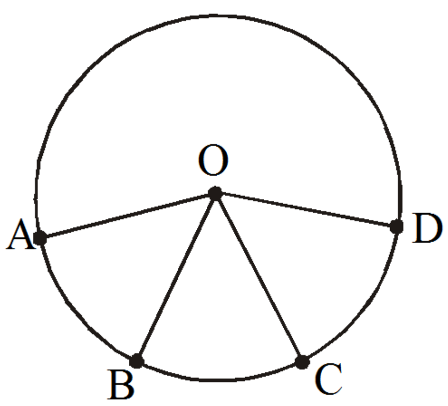
$$\therefore \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$$

$$\therefore \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{DBC}$$

$\therefore$ قوس $AC =$ قوس BD

($\because$ قوس مماثل ہیں، وتر مساوی ہیں)

لہٰذا یہ ثابت ہوا۔



مثال-2 (شکل-15) میں قوس $BC =$ قوس AB $\angle AOB = 50^0$

$\angle COD = 40^0$

$\angle AOD$ معلوم کیجئے۔

حل: قوس AB = قوس BC

$\therefore \angle AOB = \angle BOC \quad (\because 4.7.3)$

$\therefore \angle BOC = 50^0$

$\angle AOD = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD$

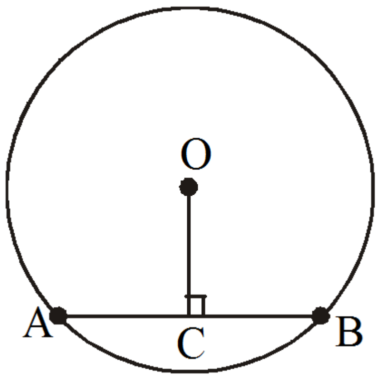
$= 50^0 + 50^0 + 40^0$

$= 140^0$

$\therefore \angle AOD = 140^0$

4.7.6 ''دائرہ میں مرکز سے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے''

مشغلہ-7

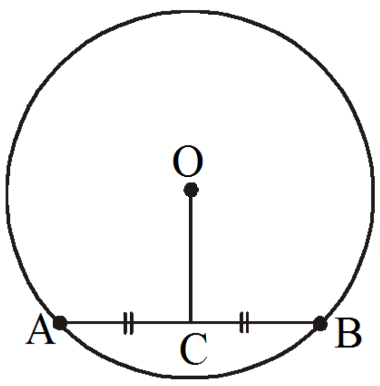


1. ایک دائرہ بنائیے جس کا مرکز 'O' ہو۔
2. دو مساوی وتر AB اور CD بنائیے جیسا کہ (شکل-16 دیکھئے)
3. AB پر 'O' سے عمود کھینچئے۔ یعنی $OC \perp AB$
4. AC اور CB کی پیمائش کیجئے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ : CB

- دائرہ میں مرکز سے وتر پر گرایا گیا عمود اس کی تنصیف کرتا ہے۔

4.7.7 خطی قطعہ جو مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے وتر پر عمود وار ہوتا ہے

مشغلہ-8



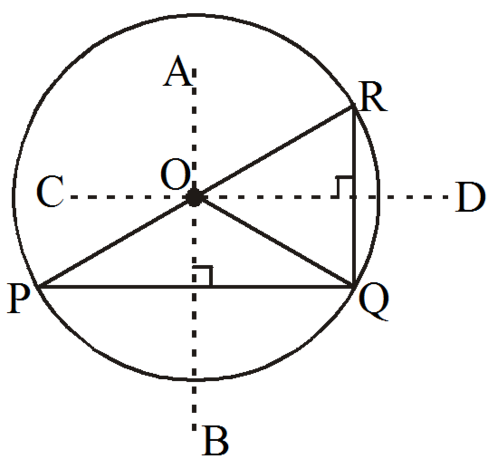
1. دائرہ بنائیے جس کا مرکز 'O' ہو۔ (شکل 17 دیکھئے)
2. AB قوس کھینچئے۔
3. AB کا وسطی نقطہ 'C' معلوم کیجئے۔
4. 'O' اور 'C' کو ملائیے۔
5. $\angle OCA$ اور $\angle OCB$ کی پیمائش کیجئے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\angle OCA = \angle OCB = 90^0$

لہٰذا، خطی قطعہ جو مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔

4.7.8 کوئی تین غیر ہم خط نقاط سے گذرنے والے دائروں کی تعداد ایک ہی ہوتی ہے۔

مشغلہ-9



1. تین غیر ہم خط نقاط P، Q اور R لیجئے۔
2. وتر PQ اور وتر QR کے لئے دو عمودی ناصف AB اور CD کھینچئے۔ جیسا کہ (شکل 18) میں بتلایا گیا ہے۔
3. چونکہ P، Q، R غیر ہم خط نقاط ہیں۔ اس لئے AB غیر متوازی ہے CD کے۔ دونوں عمود صرف نقطہ 'O' پر ہی قطع کرتے ہیں۔ OP، OQ اور OR کو ملا کر ان کی پیمائش کیجئے۔

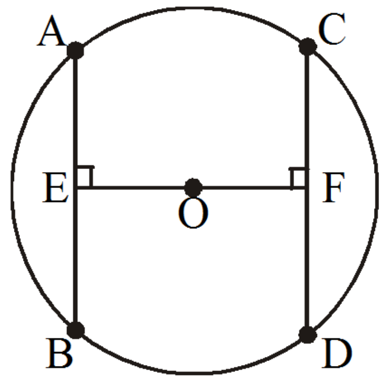
ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ OP = OQ = OR

اب 'O' کو مرکز مان کر اور OP نصف قطر لے کر دائرہ بنایئے جو نقاط P ، Q اور R سے گذرتا ہے۔

دوسرے تین غیر ہم خط نقاط لیتے ہوئے اسی طریقہ کو دہرایئے اور مشاہدہ کیجئے کہ دیئے گئے تین غیر ہم خط نقاط سے گذرنے والے دائروں کی تعداد صرف ایک ہی ہوتی ہے۔

4.7.9 دائرہ کے مساوی وتر (یا مشابہہ دائروں کے) مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ (مراکز)

مشغلہ-10



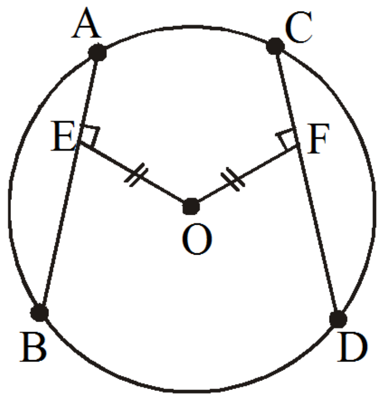
1. 'O' کو مرکز مان کر ایک دائرہ بنایئے (شکل-19 دیکھئے)
2. دائرہ میں دو مساوی وتر AB اور CD کھینچئے۔
3. AB ⊥ OE اور CD ⊥ OF کھینچئے۔
4. OE اور OF کی پیمائش کیجئے، معلوم ہوا کہ OE = OF

لہٰذا،

دائرہ کے مساوی وتر (یا مشابہہ دائروں کے) مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ (مراکز)

4.7.10 ایسے وتر جو دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے‘ طول میں مساوی ہوں گے

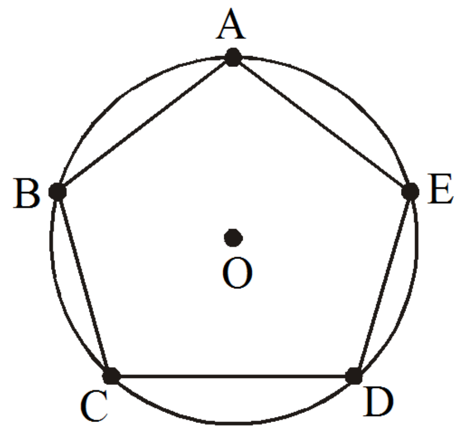
مشغلہ-11



1. 'O' کو مرکز مان کر ایک دائرہ بنائیے (شکل-20 دیکھئے)
2. مرکز سے OE = OF کھینچئے۔
3. وتر AB کھینچئے جو E پر OE کے عموداور ہے۔ اسی طرح وتر CD کھینچئے جو کہ F پر OF کے عموددار ہے۔
4. وتر AB اور وتر CD کی پیمائش کیجئے۔ آپ مشاہدہ کریں گے کہ AB = CD

لہٰذا‘ ایسے وتر جو دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوں گے‘ مساوی ہوں گے۔

مثال-3 : اگر ایک قائم مخمس (Regular Pentagon) کو ایک دائرہ میں بنایا گیا تب دائرہ کے مرکز سے مخمس کے ضلعوں کا زاویہ کیا ہوگا؟



حل: ایک قائم مخمس میں پانچ مساوی ضلعے ہوتے ہیں اور ہر ضلع مرکز پر مساوی زاویہ بناتا ہے۔

فرض کیجئے کہ بننے والا زاویہ 'x' ہے۔

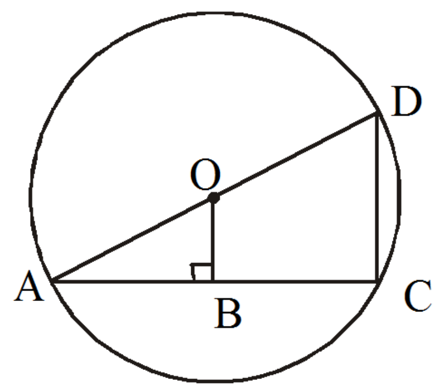
یعنی $5x = 360^0$

$$x = \frac{360}{5}$$

$$x = 72^0$$

لہٰذا دائرہ کے مرکز سے مخمس کا ہر ضلع 72^0 کا زاویہ بنائیے گا۔

مثال-4 : ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' اور قطر AD ہے۔ (شکل-22 دیکھئے) وتر AC پر OB عموددار ہے۔ ثابت کیجئے کہ DC = 2OB



شکل-22

حل: دیا گیا ہے $OB \perp AC$

'B' AC کا وسطی نقطہ ہے (وتر کی تنصیف کرتا ہے) اور مرکز 'O' AD کا وسطی نقطہ ہے۔ ($\because$ AD قطر ہے)

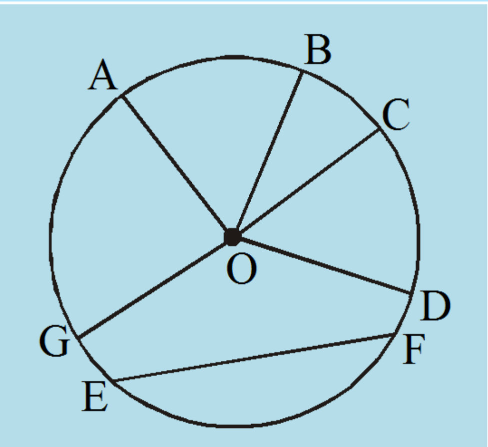
ΔADC میں، 'O' اور 'B' ضلع AD اور ضلع AC کے وسطی نقاط ہیں چونکہ یہ خطی قطعہ مثلث کے کوئی دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملاتا ہے جو کہ مثلث کے تیسرے ضلع کا نصف اور اس کے متوازی ہوتا ہے۔

$$\therefore\ OB = \frac{1}{2}\ DC$$

$$DC = 2OB$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے۔

1. دی گئی شکل میں دائرہ کے مختلف حصوں کی نشاندہی کیجئے۔

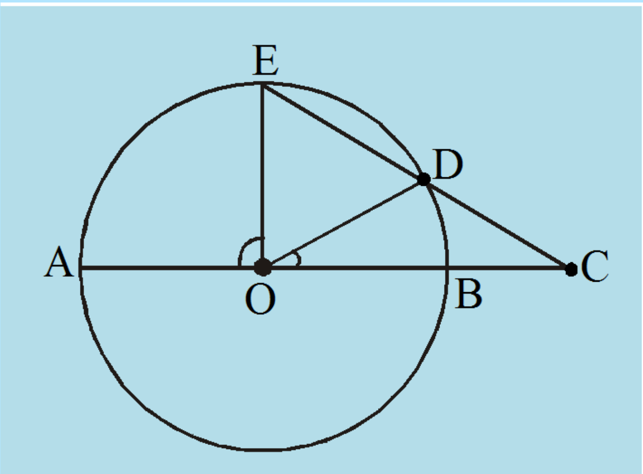


2. اگر ایک قائم ہفت پہلو (Regular Septagon) کو ایک دائرہ میں بنایا گیا ہو تو دائرہ کے مرکز سے ہفت پہلو کے ہر ضلع کا زاویہ کیا ہوگا؟

3. ہم مرکز دائرے اور مماثل دائرے کے درمیان فرق کیجئے۔

4. کیا ہم دو قطاع کو ملا کر ایک دائرہ تشکیل دے سکتے ہیں۔ وجہ بتایئے۔

5. (شکل 24 میں) AB دائرہ کا قطر ہے جس کا مرکز 'O' ہے۔ اگر $\angle BOD = 20^{o}$، $\angle EOB = 70^{o}$ تین $\angle ECA$ معلوم کیجئے۔



شکل-24

مشق

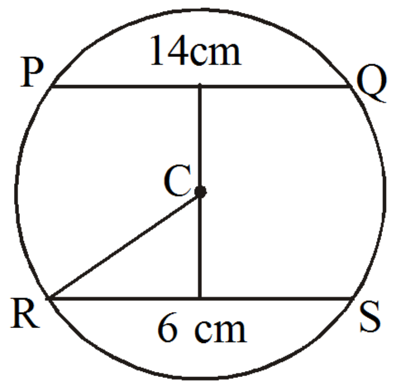
.1 دائروں کے مختلف جوڑ بنائیے۔ ہر جوڑ میں آپ کتنے مشترک نقاط پاتے ہیں؟ زیادہ سے زیادہ مشترک نقاط کتنے ہیں؟

.2 ایک دائرہ کا مرکز معلوم کرنے کا طریقہ کیا ہے؟

.3 ایک قائم مسدس کو ایک دائرہ میں بنایا گیا۔ مرکز سے مسدس کے ہر ضلع کا زاویہ کیا ہوگا؟

.4 (شکل-25 میں) ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' ہے کے دو متوازی وتر ہیں جس کا PQ = 14 سمر، RS = 6 سمر، نصف قطر $r = 9$ سمر ہے۔

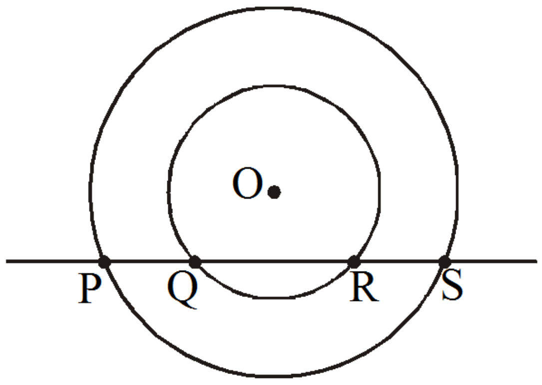
وتر PQ اور وتر RS کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔



شکل-25

.5 اک دائرہ کے وتر کا طول 8 سمر ہے اور مرکز سے وتر کا فاصلہ 3 سمر ہے۔ اس کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

.6 (شکل-26 میں) دو ہم مرکز دائرے جن کا مرکز 'O' ہے کو ایک خطی قطعہ دائروں کے نقاط P، Q، R، S پر قطع کرتا ہے بتائیے کہ RS اور PQ مساوی ہیں؟ وجہ بتائیے۔



شکل-26

ہم نے کیا سیکھا؟

- دائرہ کا سب سے بڑا وتر ''قطر'' کہلاتا ہے۔
- ایک دائرہ مستوی کو تین حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔
- دائرہ کے دو قوس مشابہہ ہوتے ہیں اگر اور صرف اگر ان کے متناظر وتر مساوی ہوں۔
- دائرہ کے مساوی وتر، دائرہ کے مرکز پر مساوی زاویے بناتے ہیں۔
- ایک وتر پر ایک دائرہ کے مرکز سے کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے۔
- خطی قطعہ جو مرکز کو وتر کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے، وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔
- تین غیر ہم خط نقاط سے گذرنے والے دائروں کی تعداد صرف ایک ہوتی ہے۔
- دائرہ کے مساوی وتر، دائرہ کے مرکز سے مساوی فاصلہ پر ہوتے ہیں اور اس کے برعکس۔

خطوطِ قاطع، مماس اور ان کے خواص
Secants, Tangents and their Properties
4.8

4.8.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

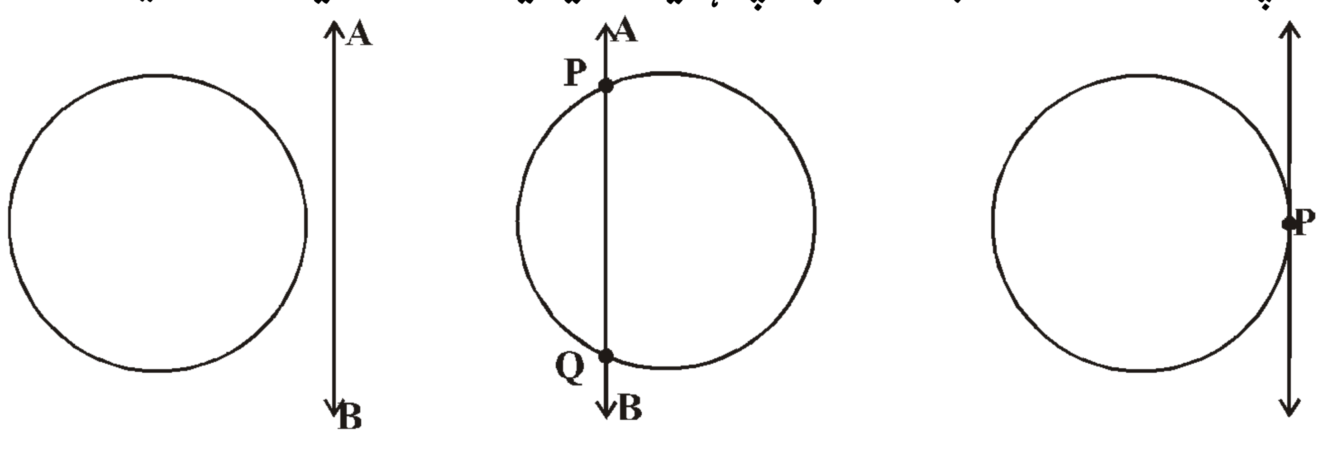
- مماس، خطوطِ قاطع، نقطہ تماس جیسی اصطلاحات کی وضاحت کر سکیں اور انھیں لکھ سکیں۔
- جانچ کر سکیں کہ آیا مماس دائرے کے نقطہ تماس پر نصف قطر پر عمود وار ہے۔
- مذکورہ بالا مسئلوں کی بنیاد پر سوالات حل کر سکیں۔
- جانچ کر سکیں کہ آیا کسی دائرے کے بیرونی نقطے سے کھینچے گئے دو مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔
- اوپر کے مسئلہ پر مبنی سوالات حل کر سکیں۔

4.8.1 تعارف

آپ نے ٹرین کو تو دیکھا ہی ہوگا۔ کیا آپ نے ٹرین کی پٹریاں اور اس پہیوں کے مقام کا مشاہدہ کیا ہے؟ اگر ہاں، تب آپ نے دیکھا ہوگا کہ ریلوے ٹریک ایک سیدھا راستہ ہوتا ہے اور ٹرین کے پہیے ان پٹریوں پر حرکت کرتے ہیں۔

یہاں ہم کہتے ہیں کہ پٹری ٹرین کے پہیوں کی مماس ہے۔

آپ اس طرح کی مماس کے بارے میں جاننا چاہتے ہیں۔ آیئے ایک دائرے اور ایک خط کے درمیان رشتے کو سمجھیں گے۔



(i) (ii) (iii)

شکل (i) دائرے اور خط میں کتنے نقطہ مشترک ہیں۔ ان میں کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہے۔ اس صورت میں AB، بہ لحاظ دائرہ غیر قاطع خط ہے۔

شکل (ii) میں دائرہ اور خط کے درمیان کتنے مشترکہ نقاط ہیں؟ خط اور دائرے کے درمیان دو مشترکہ نقاط P اور Q ہیں۔
اس صورت میں خط AB دائرے کا خط قاطع Secant ہے۔

شکل (iii) میں دائرے اور خط کے درمیان کتنے نقاط مشترک ہیں؟ خط اور دائرے کے درمیان صرف ایک نقطہ P مشترک ہے۔اس خط کو دائرے کا مماس (Tangent) کہا جاتا ہے۔

دائرے اور مماس کا مشترکہ نقطہ 'نقطہ تماس' 'Point of Contact' کہلاتا ہے۔

چناں چہ دائرے کا مماس ایک خط ہوتا ہے جو دائرے کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

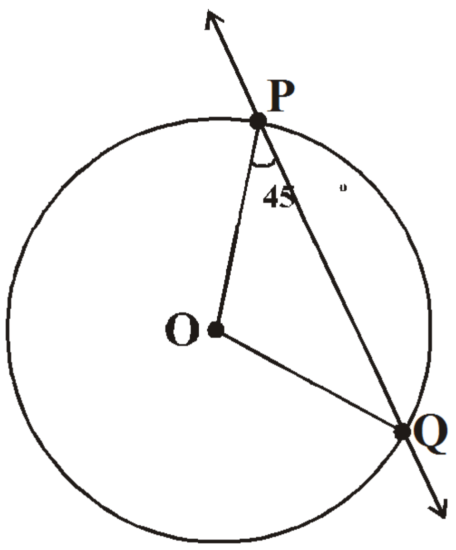
اس باب میں ہم خطوط قاطع، مماس اور ان کی خصوصیات کے تعلق سے مطالعہ کریں گے۔

4.8.2 دائرے کا مماس

'تعارف' میں آپ نے دیکھا کہ دائرے کا مماس دراصل ایک خط ہوتا ہے جو دائرے کو صرف ایک نقطے پر قطع کرتا ہے۔

دائرے کے کسی نقطے پر دائرے کی موجودگی کو سمجھنے کے لئے ہم حسب ذیل مشغلہ انجام دیں گے۔

مشغلہ - 1



'O' مرکز کے ساتھ ایک دائرہ اتاریئے۔

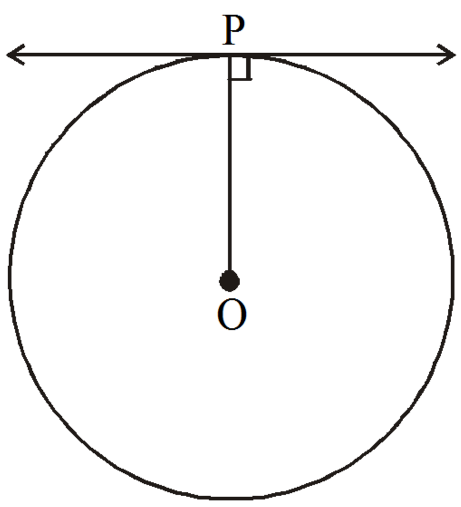
فرض کیجئے کہ 'P' دائرے پر کوئی نقطہ ہے۔

نقطہ پر چاندے کی مدد سے 40^0 کا زاویہ بنایئے اور ایک خط کھینچئے۔

یہ خط 'P' سے گزرتے ہوئے دائرے کو 'Q' پر قطع کرتا ہے۔ OQ کو ملایئے۔

اس قسم کی مزید شکلیں اتاریئے جن میں نقطہ 'P' پر زاویوں کو 50^0، 60^0 اس طرح بڑھاتے جایئے۔آپ کیا غور کرتے ہیں۔

نقطہ 'P' پر زاویہ جیسے جیسے بڑھاتا ہے، 'Q' نقطہ P کے قریب ہوتا جاتا ہے اور ΔPOQ چھوٹا ہوجاتا ہے۔



نقطہ 'P' پر زاویہ 900 ہوجانے پر کیا ہوگا؟

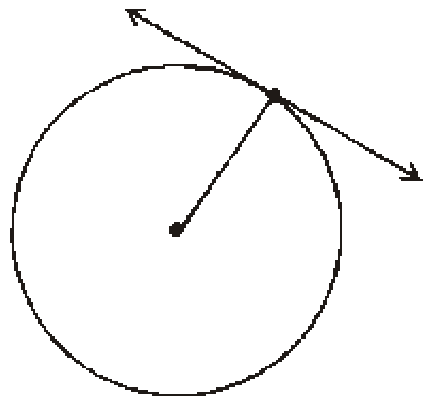
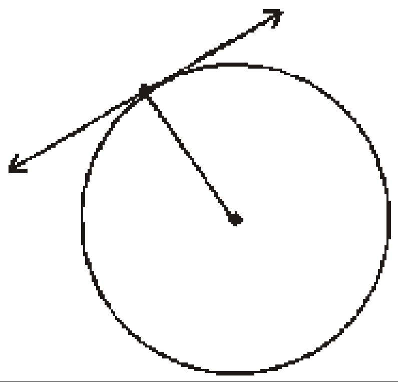
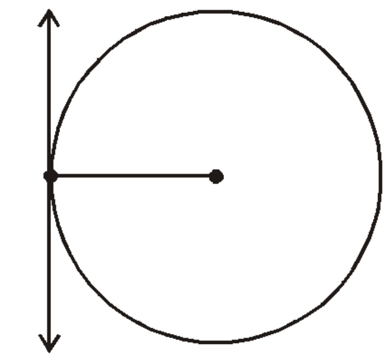
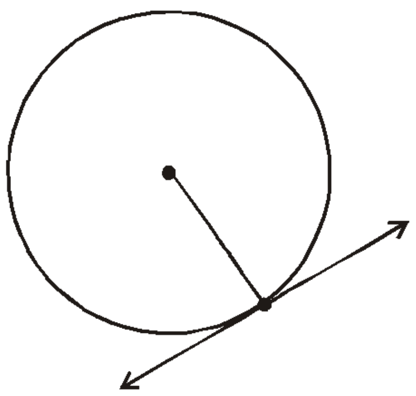
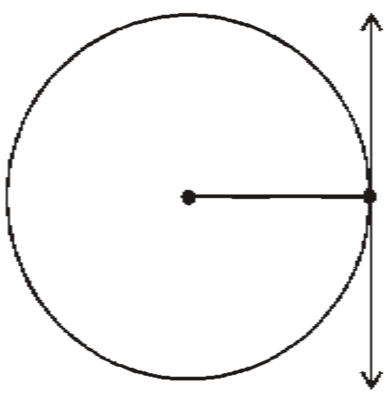
یہ خط دائرے کے کسی اور نقطہ کو چھوئے گا۔ چناں چہ اس خط اور دائرے کے درمیان کوئی مشترکہ نقطہ نہیں ہوگا۔ یہ خط دائرے کا مماس ہوگا۔

اس توضیح کے بعد ہم ایک عام اصول پر پہنچتے ہیں۔

> اگر کوئی خط دائرے کے کسی ایک نقطہ پر کھینچا جائے اور وہ نصف قطر پر اس نقطے پر عمود وار ہو تو وہ خط مماس ہوگا۔

مشغلہ - 2

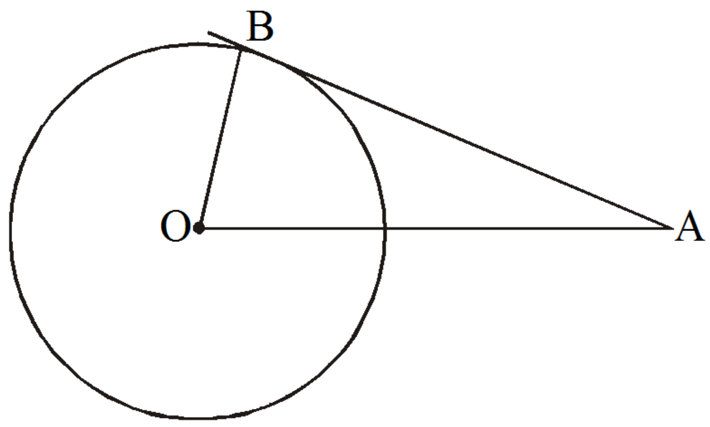
حسب ذیل اشکال میں نصف قطر اور مماس کے درمیان نقطہ تماس پر چاندے کی مدد سے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔

نصف قطر اور مماس کے درمیان زاویوں کی پیمائش	شکل
	
	
	
	
	

اوپر کے مشاہدات کی روشنی میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ

نقطہ تماس پر نصف قطر مماس پر ہمیشہ عمود وار ہوتا ہے۔

مثال-1: ΔOQB ایک مساوی الساقین مثلث ہے جیسا کہ شکل میں ہے، $\angle OAB$ کی پیمائش معلوم کیجئے۔

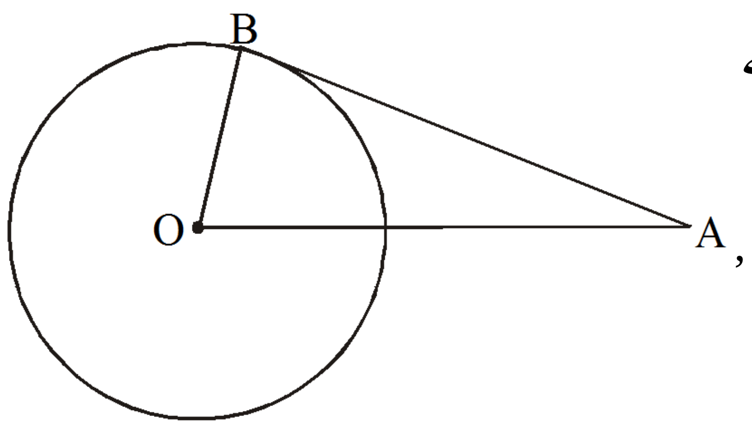


حل: نقطہ تماس پر نصف قطر اور مماس ایک دوسرے پر ہمیشہ عمود وار ہوتا ہے۔

اس لئے $\angle OBA = 90^0$

($\because$ OB نصف قطر اور AB مماس ہے)

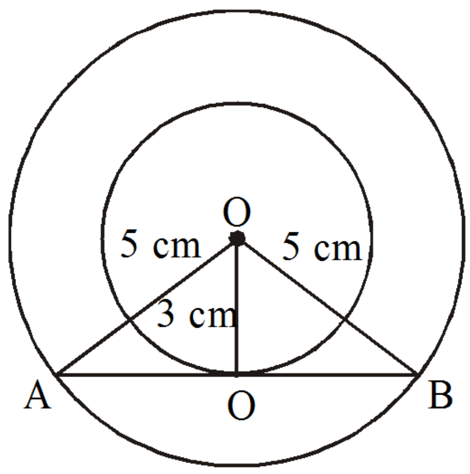
($\because$ ΔAOB ایک مساوی الساقین مثلث ہے اور OQ وتر ہے OB = AB)



(مساوی الساقین مثلث میں مساوی الاضلاع کے مقابلے کے زاویے مساوی ہوتے ہیں) $\angle OAB = \angle OBA$

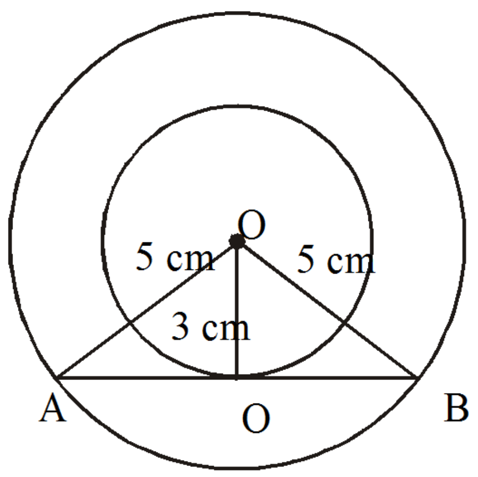
ΔOAB میں، $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^0$

$$90^0 + 2\angle OAB = 180^0$$
$$2\angle OAB = 90^0$$
$$\angle OAB = \frac{90^0}{2} = 45^0$$



مثال-2: دو ہم مرکز دائرے جن کے نصف قطر 5 سمر اور 3 سمر ہیں۔ بڑے دائرے کے وتر کا طول معلوم کیجئے جو چھوٹے دائرے کو چھو کر گزرتا ہے۔

حل: $OP \perp AB$ (نصف قطر نقطہ تماس پر مماس پر عمود وار ہوتا ہے)



فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

ΔOPA میں

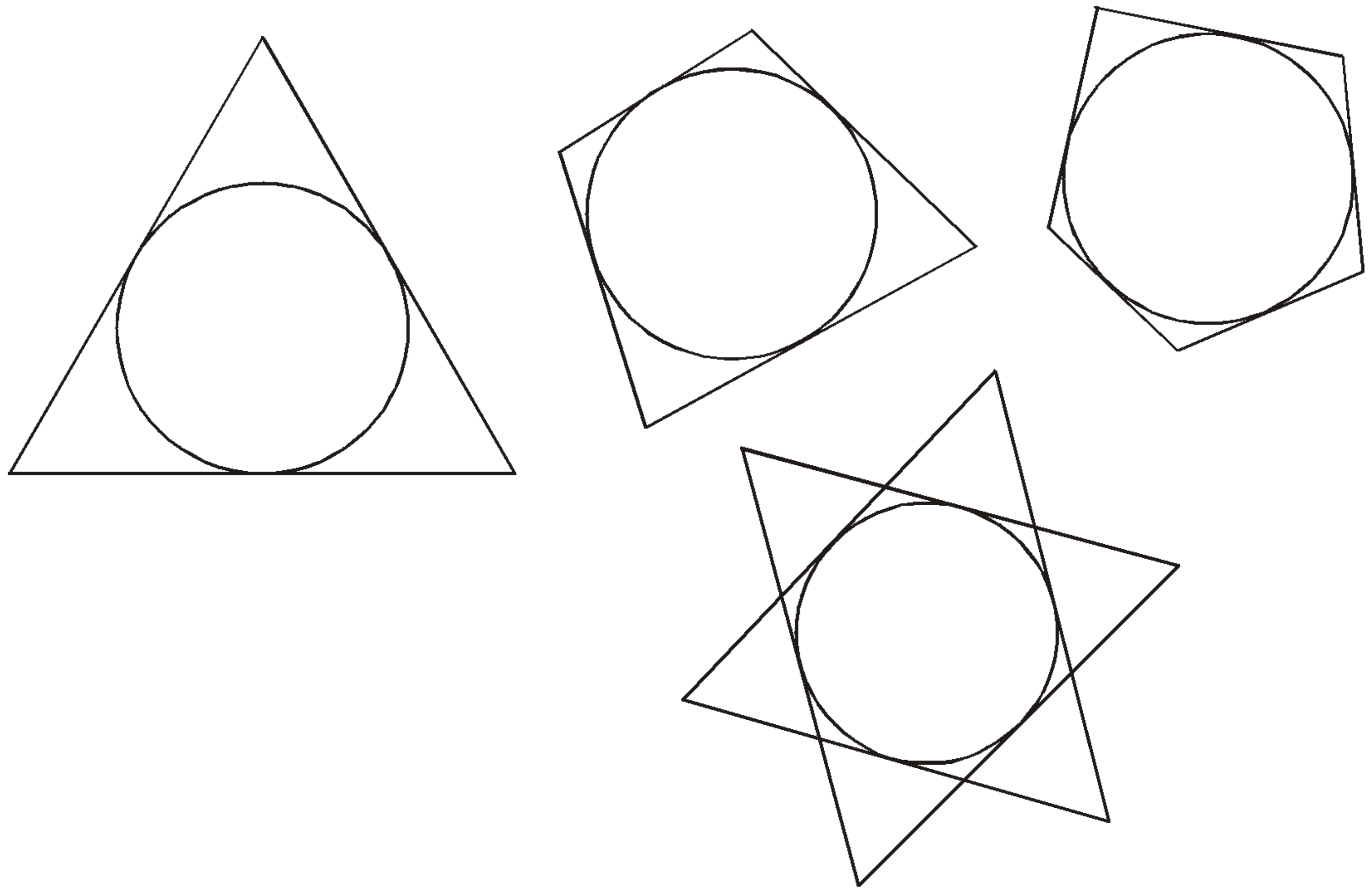
$$(OP)^2 + (AP)^2 = (OA)^2$$
$$(3)^2 + (AP)^2 = (5)^2$$
$$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$$
$$AP = \sqrt{16} = 4 \text{ cm.}$$

لیکن $AP = PB$ (وہ دائرے P کے مرکز سے کھینچا گیا عمود وتر کی تنصیف کرتا ہے)

$$\therefore \quad AB = AP + PB = 2AP$$

$$= 2 \times 4 = 8 \text{ cm.}$$

مشغلہ - 2 خود دریافت کریں۔



بالا اشکال میں دائرے کو چھونے والے خطوط کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں۔

ایک دائرے پر کتنے مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ دائرے پر واقع کسی نقطے پر صرف ایک مماس کھینچا جا سکتا ہے۔ چوں کہ دائرہ ان گنت نقاط سے بنتا ہے اس لیے کسی دائرے پر لا متناہی مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

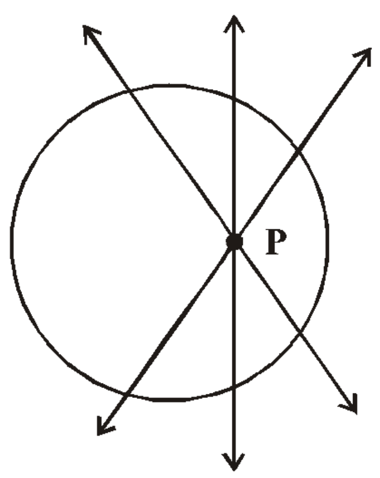
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ایک دائرے پر کتنے مماس ہو سکتے ہیں۔
2. ایک مستوی میں پائے جانے والے ایک خط اور دائرے کے درمیان کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ کتنے مشترکہ نقاط ہو سکتے ہیں۔
3. ایک دائرے اور خط کے درمیان تین مشترک نقاط کیوں نہیں ہو سکتے۔
4. قاطع خط اور دائرے کے درمیان کتنے مشترکہ نقاط ہوتے ہیں۔
5. مماس اور دائرے کے درمیان کتنے مشترکہ نقاط ہوتے ہیں۔

شکل کے ذریعے اصطلاحات کی وضاحت کیجئے۔

شکل	اصطلاحات کی وضاحت
	مماس
	قاطع خط
	نقطۂ تماس Point of Capital

4.8.3 ایک دائرے پر کسی نقطے سے کھینچے گئے مماس کی تعداد



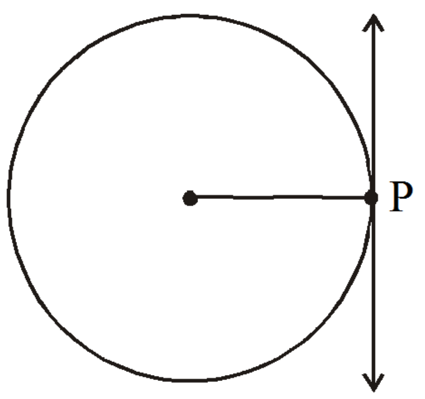
کسی نقطے سے دائرے کے مماس کی تعداد جاننے کے لیے ذیل کے مشغلے انجام دیجئے۔

(i) ایک دائرہ اتار کر دائرے کے اندر کوئی نقطہ لیجئے۔ اس نقطے P سے دائرے پر کوئی مماس کھینچا جا سکتا ہے؟

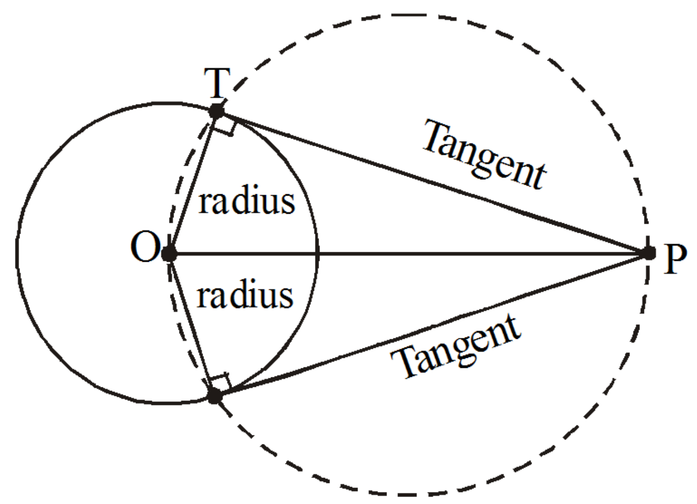
آپ دیکھیں گے کہ اس نقطے سے کھینچے گئے تمام نقاط دائرے کو دو نقاط پر قطع کرتے ہیں۔

چناں چہ دائرے کے اندرون نقطے سے دائرے پر مماس کھینچنا ممکن نہیں ہے۔

(ii) اب دائرے پر ایک نقطہ P لے کر اس پر مماس کھینچئے۔ ہم یہ پہلے سے ہی جانتے ہیں کہ ایسے نقطہ پر صرف ایک مماس ہی کھینچا جا سکتا ہے۔



(iii) دائرے کے باہر ایک نقطہ P لیجئے۔ ہم جانتے ہیں کہ مماس نقطہ تماس پر نصف قطر عمود وار ہوتا ہے۔ چناں چہ نقطہ T پر زاویہ قائمہ ہوگا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ نصف دائرے کا زاویہ، قائمہ زاویہ ہوتی ہے۔ OP کو قطر مانتے ہوئے ایک نصف دائرہ بنایئے یہ دائرے کو نقطہ T پر قطع کرتا ہے۔ TP کو ملایئے جو ایک مماس ہے۔



دوسری جانب بھی نصف دائرہ کھینچا جا سکتا ہے۔
چناں چہ نقطہ P سے دو دائرے کھینچے جا سکتے ہیں۔

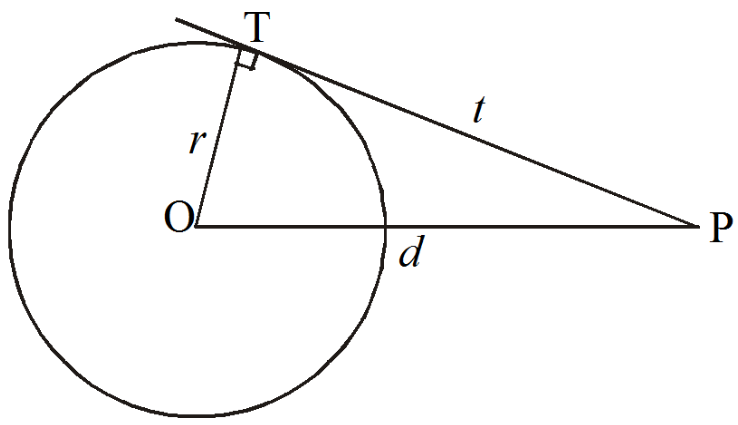
مماس کا طول دراصل کسی بیرونی نقطہ سے نقطہ تماس تک مماس کے قطعہ کا طول ہوتا ہے۔

مماس کا طول ہم کیسے معلوم کر سکتے ہیں؟

ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' ہے اور نصف قطر 'r' ہے، پر کسی بیرون نقطے 'P' سے ایک مماس کھینچا گیا۔

نقطہ P، مرکز سے d فاصلے پر ہے۔

چوں کہ $\underline{|OTP} = 90^0$ اس لیے یہ ایک قائم الزاویہ مثلث ہے۔



فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے

$$OT^2 + PT^2 = OP^2$$

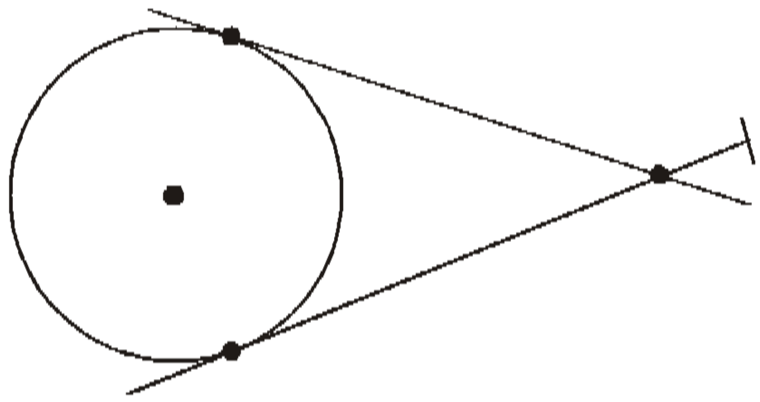
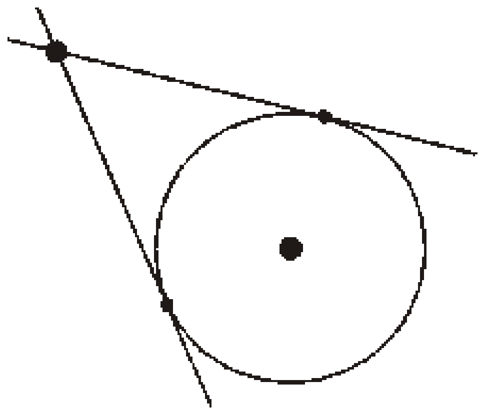
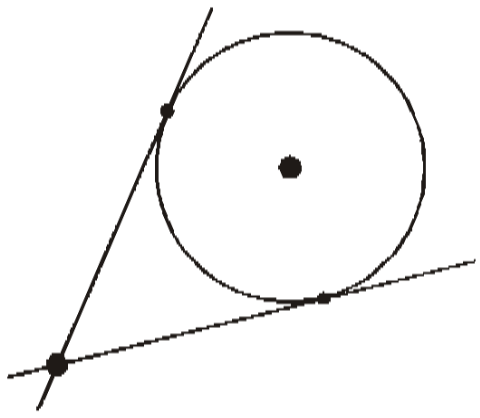
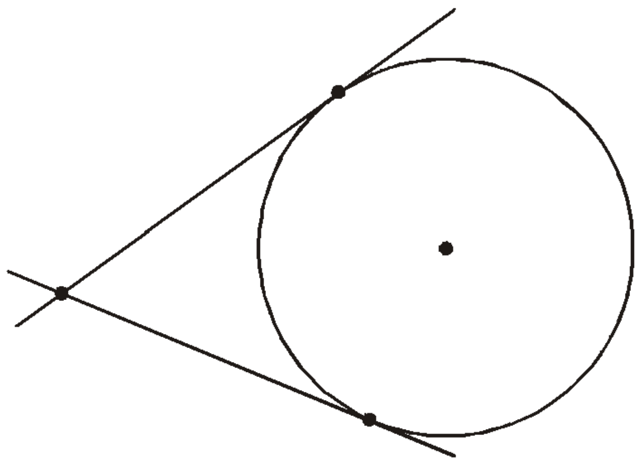
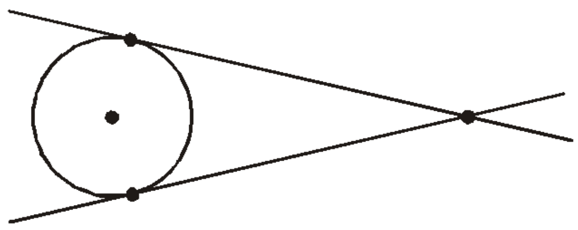
$$t^2 + r^2 = d^2$$

$$t = \sqrt{d^2 - r^2}$$

$$\boxed{\therefore \text{مماس کا طول} = \sqrt{d^2 - r^2}}$$

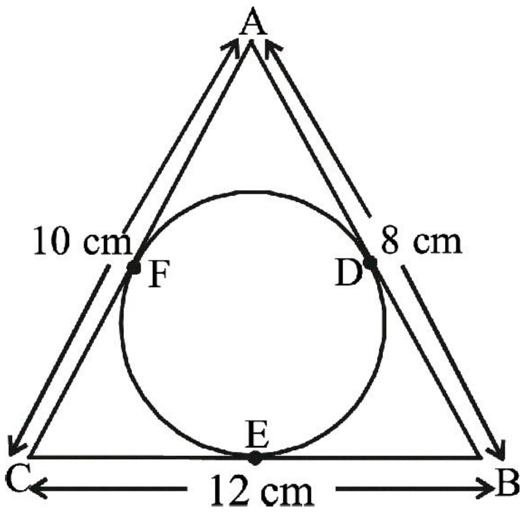
ہم یہ پہلے سے جانتے ہیں کہ کیا بیرونی نقطے سے دائرے پر دو مماس کھینچ سکتے ہیں۔ ان دو مماس کے مسئلوں کے بارے میں ہم کیا کہہ سکتے ہیں۔

دی گئی اشکال میں پٹری کی مدد سے بیرونی نقطے C سے کھینچے گئے مماس کے طول کی پیمائش کیجئے۔

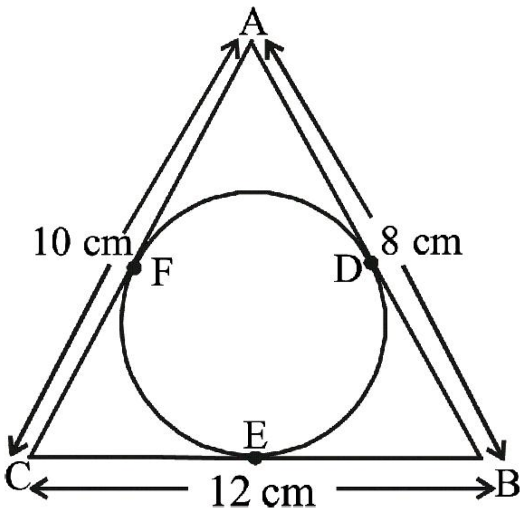
مماس کے طول کی پیمائش	شکل P
پہلے مماس کا طول = دوسرے مماس کا طول =	
پہلے مماس کا طول = دوسرے مماس کا طول =	
پہلے مماس کا طول = دوسرے مماس کا طول =	
پہلے مماس کا طول = دوسرے مماس کا طول =	
پہلے مماس کا طول = دوسرے مماس کا طول =	

اوپر کے تجربات کی روشنی میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ دائرے کے بیرونی نقطے سے کھینچے گئے دو مماس کا طول مساوی ہوتا ہے۔

مثال-3: مثلث ΔABC میں ایک دائرہ اس طرح بنایا گیا ہے کہ مثلث کے اضلاع کے طول 8cm، 10cm اور 12cm ہی جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے AD، BE اور CF کے طول معلوم کیجئے۔



حل: بیرونی نقطے سے دائرے پر کھینچے گئے مماس کا طول مساوی ہوتا ہے۔



$AD = AF = x$

$BD = BE = y$

$CE = CF = z$ (let)

$x + y = 12 \quad \ldots (1)$

$y + x = 8 \quad \ldots (2)$

$x + z = 10 \quad \ldots (3)$

جمع کرنے پر $2(x + y + z) = 30$

$$x + y + z = \frac{30}{2} = 15 \quad \ldots(4)$$

$(4) - (1)$ ہمیں دیتا ہے $y = 5$ cm

$(4) - (2)$ ہمیں دیتا ہے $z = 3$ cm

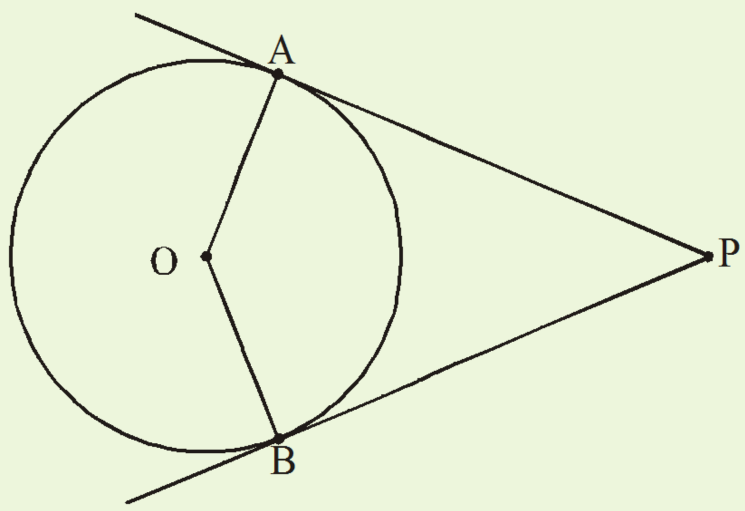
$(4) - (3)$ ہمیں دیتا ہے $x = 7$ cm

$\therefore$ $AD = 7$cm

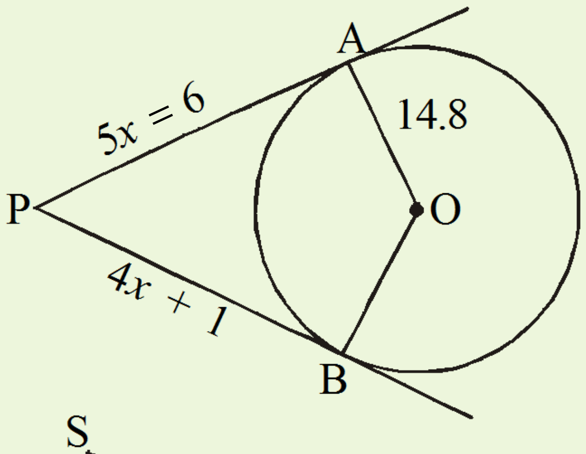
$BE = 5$ cm

$CF = 3$ cm.

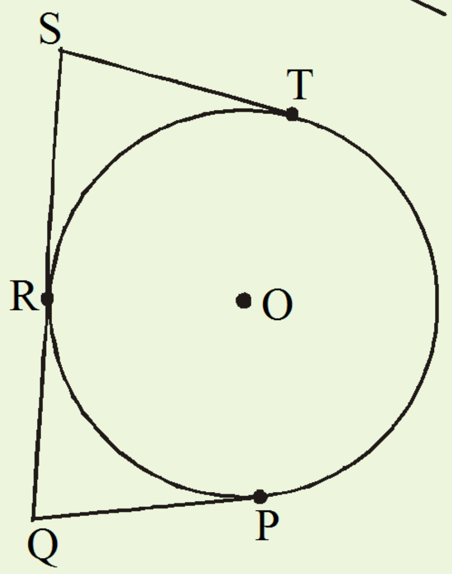
اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے



1. دی گئی شکل میں PA اور PB دائرے کے مماس ہیں۔ اگر $APB = 300$ تب $\angle AOB$ معلوم کیجئے۔

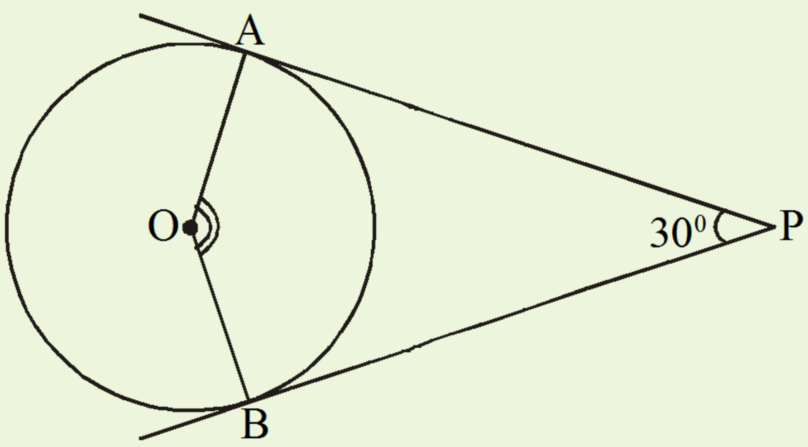


2. دی گئی شکل میں $PA = 5x = 6$ اور $PB = 4x + 1$
اور $PB = 4x + 1$ تب x کی قدر معلوم کیجئے۔



3. دی گئی شکل میں ST، QP اور SQ دائرے کے مماس ہیں جس کا مرکز 'O' ہے۔ اگر $ST = 5cm$ اور $QP = 2cm$ تب SQ معلوم کیجئے۔

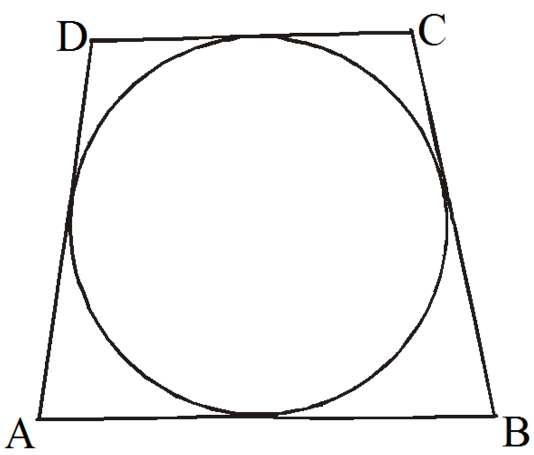
4. ایک دائرہ جس کا مرکز 'O' اور نصف قطر 3 سمر ہے، مرکز سے 5 سمر کی دوری پر واقع ایک بیرونی نقطے سے ایک مماس کھینچا گیا ہے۔ مماس کا طول معلوم کیجئے۔



5. دی گئی شکل میں PA اور PB دائرے کے مماس ہیں۔
اگر $\angle APB = 30^0$ تب $\angle AOB$ معلوم کیجئے۔

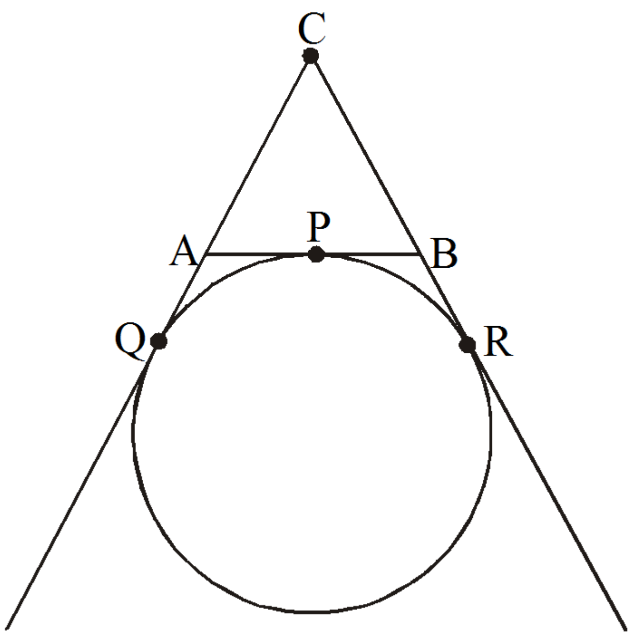
مشق

1. ایک دائرے کے مرکز سے 35 سمر کی دوری پر واقع ایک نقطہ AP سے کھینچے گئے مماس کا طول 28 سمر ہے۔ دائرے کا محیط اور رقبہ معلوم کیجئے۔



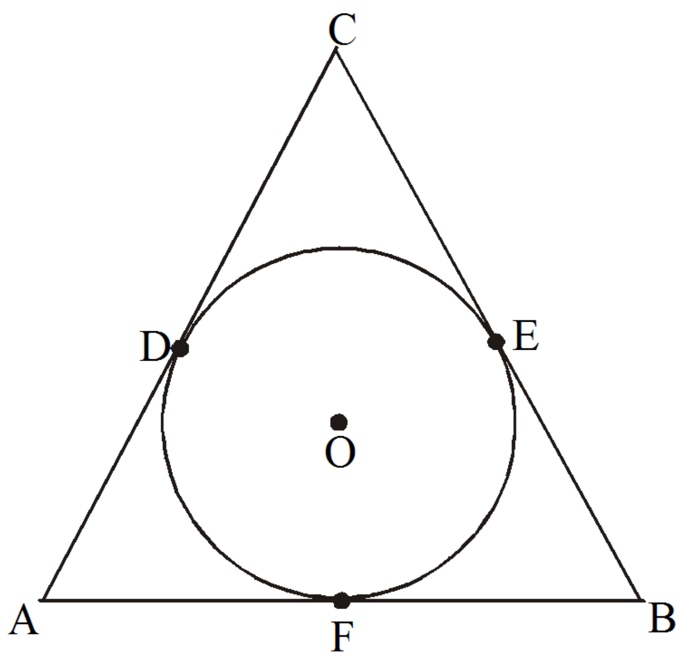
2. دی گئی شکل میں ایک دائرہ ایک چار ضلعی کے اضلاع کو چھوتا ہے جس کے اضلاع کے طول $AB = 6cm$، $BC = 7cm$، $CD = 4cm$ تب AD کا طول معلوم کیجئے۔

3. دی گئی شکل میں ایک دائرہ ضلع BC کو نقطہ P پر چھونے کے علاوہ AB اور AC کو بالترتیب Q اور R پر مس کرتا ہے جیسا کہ AB اور AC کو آگے بڑھایا گیا ہے۔ اگر AQ = 5cm تب ΔABC کا احاطہ معلوم کیجئے۔



4. ثابت کیجئے کہ کسی دائرے کے قطر کے سرے پر کھینچے گئے مماس متوازی ہوتے ہیں۔

5. دی گئی شکل میں ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے مثلث ABC کے اندرون بنایا گیا ہے اس طرح کہ AB' BC اور CA بالترتیب نقاط F' E اور D پر مماس ہیں۔ اگر AF = FB = 5 cm اور DC = 7 cm تب ΔABC کا احاطہ معلوم کیجئے۔



6. کسی بیرونی نقطے سے ایک دائرے پر کتنے مماس کھینچے جا سکتے ہیں؟

7. ان دو مماس کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے جو دو نصف قطروں کے سروں پر کھینچے گئے ہیں جن کے درمیان 45^0 کا زاویہ ہے (نصف قطروں کا درمیانی زاویہ 45^0)

8. نقطہ Q دائرے پر کھینچے گئے مماس کا طول 24 سمر ہے اور Q مرکز سے 25 سمر ہے۔ دارئے کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

- ایک خط جو دائرے کو دو مختلف مقامات پر قطع کرتا ہے' قاطع خط کہلاتا ہے۔
- ایک خط جو دائرے کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے' مماس کہلاتا ہے۔ جس نقطے پر مماس دائرے کو چھوتا ہے اس کو نقطۂ تماس کہا جاتا ہے۔

- دائرے کے کسی نقطے پر کھینچا گیا خط جو نصف قطر پر عمود اور ہو، مماس ہوتا ہے۔
- نصف قطر نقطۂ تماس پر مماس پر ہمیشہ عمود وار ہوتا ہے۔
- بیرونی نقطہ اور نقطہ تماس کو ملانے والے خطی قطعہ کا طول مماس کا طول کہلاتا ہے۔

  $$\text{مماس کا طول} = \sqrt{d^2 - r^2}$$

- کسی بھی بیرونی نقطے سے کھینچے گئے مماس کے طول مساوی ہوتے ہیں۔

سبق 4.9

بناوٹیں
Constructions

4.9.0 اکتسابی مقاصد

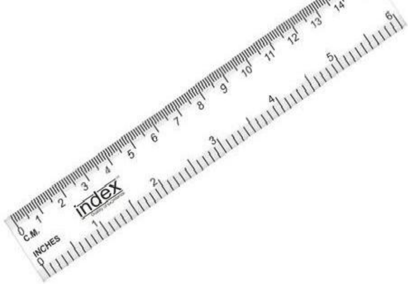
اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- ڈرائنگ کی مہارتوں کو فروغ دے سکیں گے۔ مختلف جیومٹریہ اشکال کے زاویوں اور ضلعوں کی پیائش کر سکیں گے۔
- جیومٹریائی آلات کے استعمال سے مختلف بناوٹوں کا تصور کریں گے اور ان کی نمائندگی کریں گے۔
- بناوٹوں کی صورتحال کا تجزیہ کریں گے اور ان جیومٹریہ اشکال کی خصوصیات کی بنیاد پر درکار پیائشات کو معلوم کر سکیں گے۔

4.9.1 تعارف

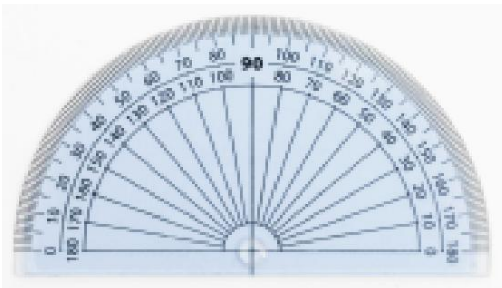
جیومٹری میں بناوٹ کا مطلب اشکال، زاویے یا خطوط کو بالکل درست طریقے سے اتارنا ہوتا ہے۔لیکن ان بناوٹوں کی نشو ونما کیوں ہوئی؟ بناوٹیں، جیومٹریہ تصورات میں بصیرت فراہم کرتے ہیں اور ہم چیزوں کو اتارنے کے لئے چند آلات کو استعمال کرتے ہیں جب کہ ان کی پیائش براہ راست مناسب طریقے سے نہیں کی جاسکتی۔قدیم یونانی صرف مکمل اعداد کا ہی استعمال کرتے تھے۔مثال کے طور پر وہ 5 کو 2 سے تقسیم نہیں کرسکتے تھے تا کہ 2.5 حاصل ہو۔کیونکہ 2.5 مکمل عدد نہیں ہے۔اس لئے اقلیدس اور دوسرے یونانی مسائل کو حل کرنے کے لئے بجائے علم اعداد کے وہ اشکال اتار کر ترسیمی طریقے سے حل کرتے تھے۔ان دنوں یہ پرکار اور خط کش (رولر) استعمال کرتے تھے۔ یہ جیومٹریہ بناوٹوں کی خالص شکل ہے جس میں کہیں بھی اعداد کا استعمال نہ کیا گیا ہو اور یہ خط کش اور پرکار کی بناوٹوں کے نام سے بہت مشہور ہوئے۔

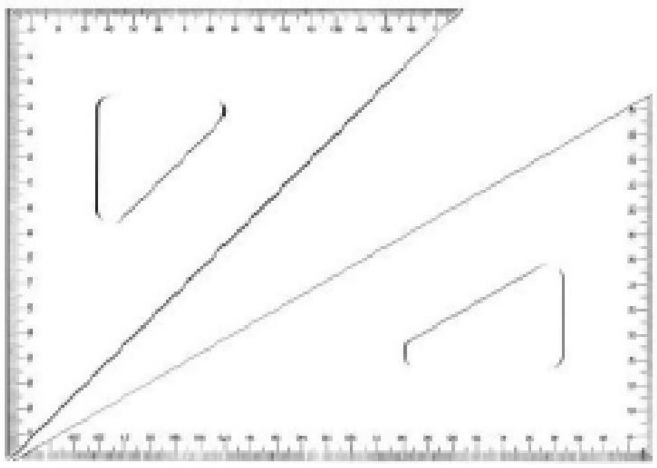
لیکن ہم جیومٹریائی بناوٹوں میں مختلف آلات کا استعمال کرتے ہیں۔آیئے اب ہم جیومٹریہ باکس کے مختلف آلات اور ان کے استعمالات کے بارے میں جانیں گے۔ایک جیومٹری باکس آلات جیسے پٹری، پرکار، چاندہ، قاسم، گنیوں پر مشتمل ہوتا ہے۔



پٹری: ایک خطی قطعہ کے طول کی پیائش کرنے کے لئے پٹری استعمال کی جاتی ہے اور یہ خطوط مستقیم کھینچنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

پرکار: پرکار کو دائرے اور قوس کھینچنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ (یاد رہے کہ قوس دائرہ کا ہی ایک حصہ ہے)





چاندہ: چاندہ کوزاویوں کے درجوں کی پیمائش کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

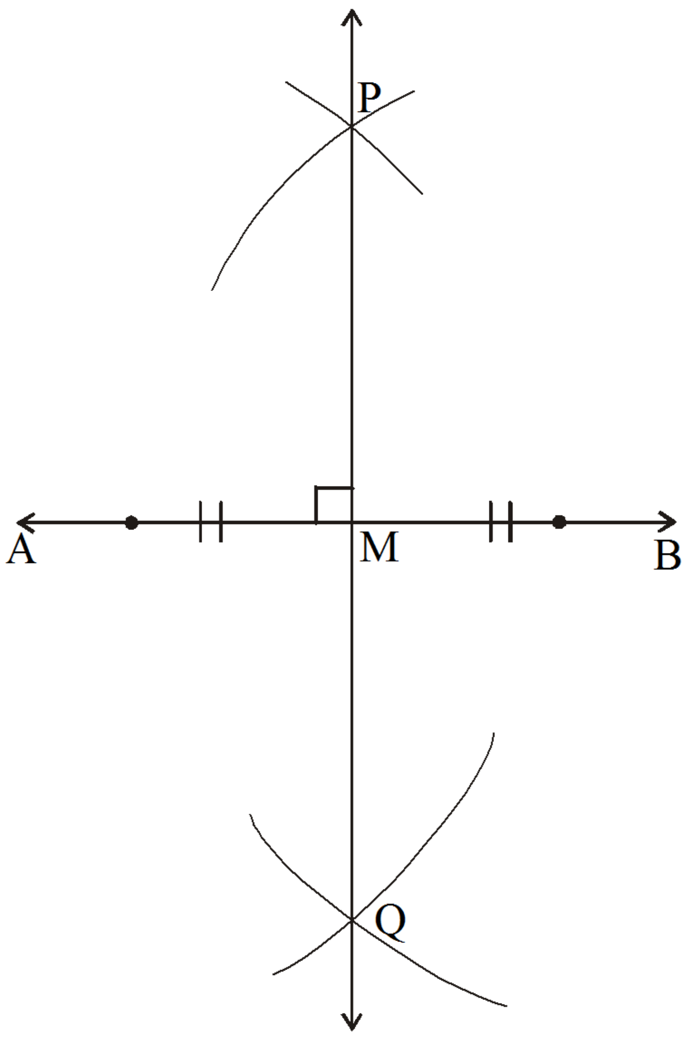
قاسم: قاسم کومنحنی خطوط کی پیمائش کے لئے استعمال کرتے ہیں اوراس کوبغیر پیمائش کے خطی قطعات کے طول معلوم کرنے کے علاوہ مماثل خطوط کھینچنے کے لئے بھی استعمال کرتے ہیں۔

گنیے: دو گنیے دوقائم الزاویہ مثلثات ہوتے ہیں۔ ایک میں 90^0-60^0-30^0 اور دوسرے میں 90^0 -45^0 - 45^0 زاویے ہوتے ہیں۔انہیں متوازی خطوط اورعمودی خطوط کھینچنے کے لئے استعمال کرتے ہیں۔

4.9.2 بنیادی بناوٹوں کا اعادہ

اب ہم تین بنیادی بناوٹوں کوسیکھیں گے جودوسری بناوٹوں کے لئے مفید ثابت ہوں گی۔

I. عمودی ناصف کی بناوٹ



بناوٹ کےمراحل (اقدامات)

(a) ایک خطی قطعہ AB کھینچئے۔

(b) نقطہ A کو مرکز مان کر AB کے نصف سے زیادہ (پیمائش کی ضرورت نہیں' اندازاً لینا ہے) نصف قطر لے کر AB کے دونوں جانب قوس کھینچئے۔

(c) B کومرکز مان کراسی نصف قطر سے پہلے کھینچے گئے قوسوں کوقطع کیجئے اس طرح 'P' اور 'Q' کی نشاندہی ہوئی۔

(d) 'P' اور 'Q' کوملائیے۔ جوکہ ہماراعمودی ناصف ہے۔

جانچ: چاندہ کی مدد سے زاویے معلوم کیجئے۔

$\angle AMP$ = ... = $\angle BMP$ ....

پٹری کی مدد سے پیمائش کیجئے۔

AM = ... cm

BM = ... cm

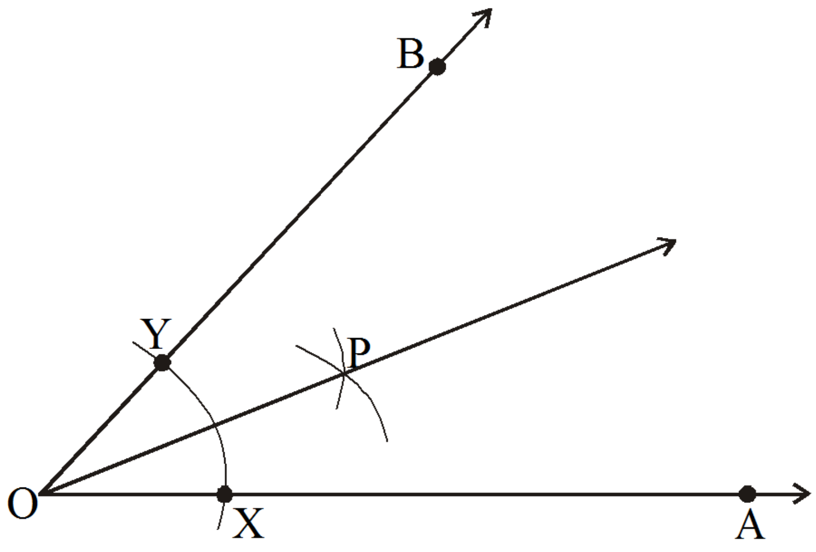
مشاہدات: $\angle AMP = \angle BMP = 90^0$

II. دیئے گئے زاویہ کا زاویائی ناصف کی بناوٹ

بناوٹ کے مراحل:

(a) ایک زاویہ AOB کھینچیے۔

(b) نقطہ 'O' کو مرکز مان کر حسب خواہش (مطلوبہ) نصف قطر سے دو بازوؤں کو قطع کرنے کے لئے قوس کھینچیے۔ جو 'X' اور 'Y' پر قطع کرتے ہیں۔



(c) 'X' کو مرکز مان کر XY کے نصف سے زیادہ نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔ 'Y' کو مرکز مان کر اسی نصف قطر سے پہلے کھینچے گئے قوس کو قطع کیجئے اس طرح نقطہ 'P' کی نشاندہی ہوئی۔

(d) شعاع OP کھینچیے جو ہمارا مطلوبہ زاویائی ناصف ہے۔

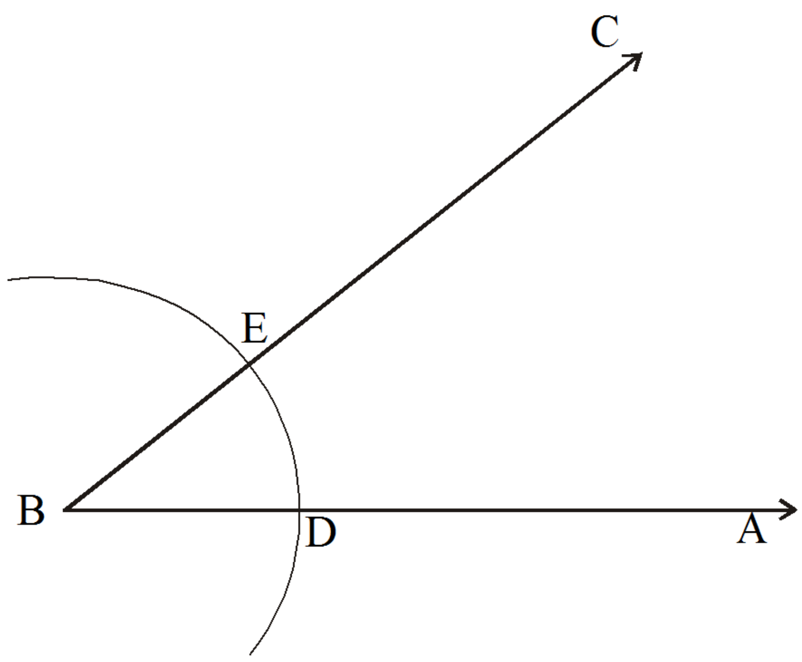
جانچ: چاندہ کی مدد سے زاویے معلوم کیجئے۔

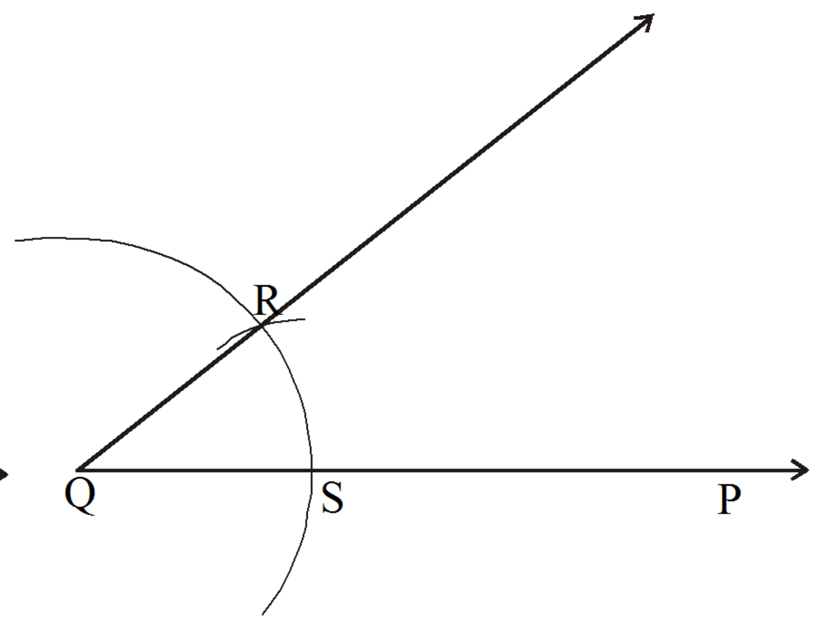
$\angle AOP =$ .... $\angle BOP =$ ....

$\angle AOB =$ ....

مشاہدات: $\angle BOP = \angle AOP = \frac{1}{2}\angle AOB$

III. ایک جیسا زاویہ کو کسی دوسری جگہ بنانا





بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

(a) زاویہ ABC کھینچیے شعاع QP کھینچیے۔

(b) 'B' کو مرکز مان کر کچھ مناسب نصف قطر سے قوس کھینچیے جو AB اور AC کو بالترتیب 'D' اور 'E' پر قطع کرے۔

(c) 'Q' کو مرکز مان کر وہی نصف قطر سے ایک قوس 'Q' کھینچیے جو QP کو 'S' پر قطع کرے۔

(d) اب 'S' کو مرکز مان کر 'DE' کے نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے جو پہلے کھینچی گئی قوس کو 'R' پر قطع کرے۔

(e) شعاع QR کھینچیے $\angle PQR$ ہی ہمارا مطلوبہ زاویہ ہے جو 'Q' پر واقع ہے۔

جانچ: $\angle PQR$ = ... $\angle ABC$ = ...

مشاہدہ: $\angle ABC = \angle PQR$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. حسب ذیل دیے گئے طول کی مدد سے خطی قطعات کے عمودی ناصف کھینچیے

(a) 5 سمر (b) 6.4 سمر

2. حسب ذیل زاویوں کے زاویائی ناصف کھینچیے۔

(a) 60^0 (b) 90^0 (c) 80^0

3. حسب ذیل زاویوں کو چاندہ کی مدد سے بنائیے اور کسی اور جگہ پر اس کی نقل اتاریئے۔

(a) 30^0 (b) 45^0 (c) 70^0

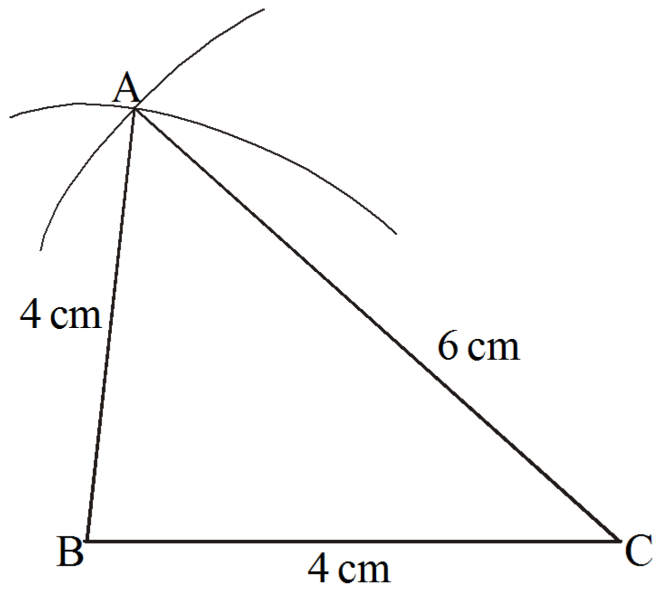
4.9.3 مثلثات کی بناوٹ

اب ہم مثلثات کی بناوٹ سیکھیں گے جب کہ حسب ذیل پیمائشات دی گئی ہوں۔

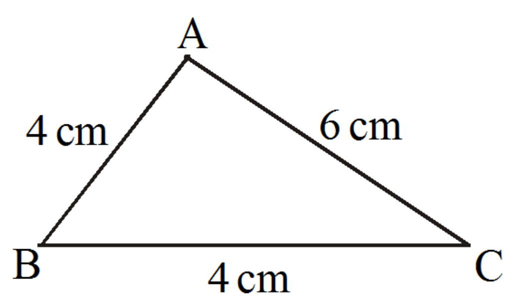
(1) تین ضلعے (SSS) (2) دو ضلعے درمیانی زاویہ (SAS) (3) ایک ضلع دو زاویے (SAA)

I. ایک مثلث بنانا جب کہ تین اضلاع کی پیمائش دی گئی ہو

مثال: ایک مثلث ABC بنائیے جس میں AB = 4 سمر ، BC = 5 سمر اور AC = 6 سمر



کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

(1) 5 سمر طول کا ایک خطی قطعہ BC کھینچئے۔

(2) B کو مرکز مان کر 4 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچئے۔

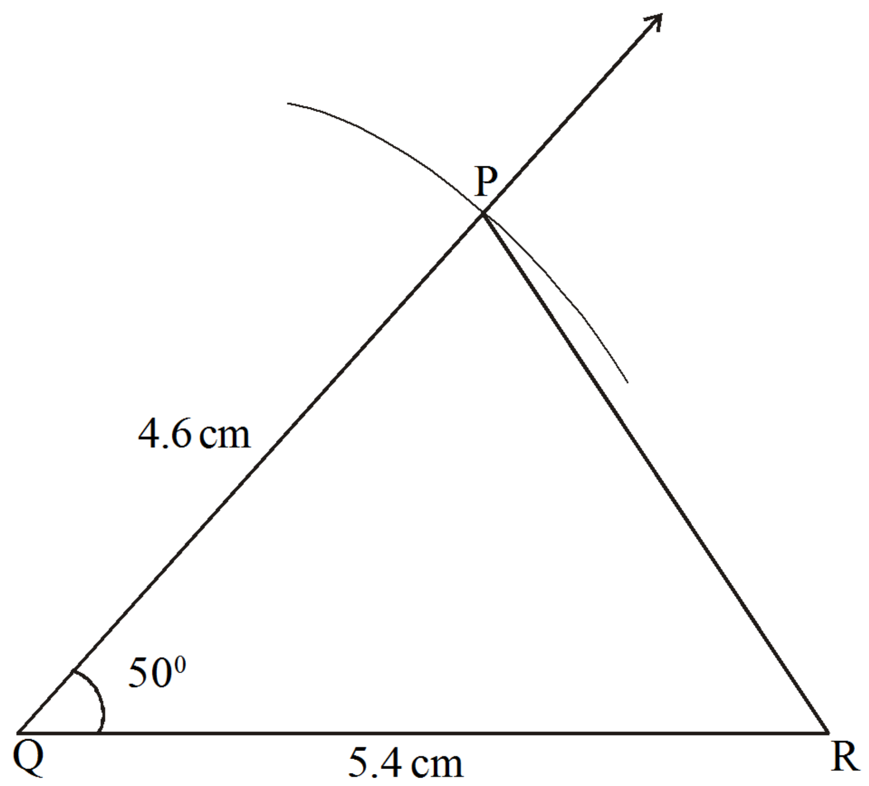
(3) C کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچئے۔ اس طرح کہ وہ پہلے کھینچے گئے قوس کو A پر قطع کرے۔

(4) AB اور AC کو ملائیے۔

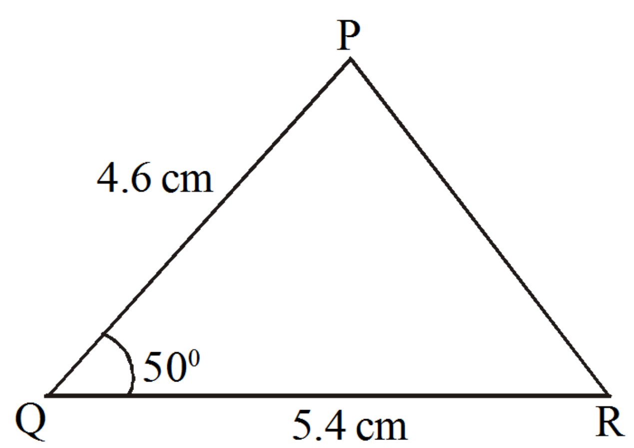
(5) ΔABC ہی ہمارا مطلوبہ مثلث ہے۔

II. ایک مثلث بنانا جب کہ دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو (SAS)

مثال: ΔPQR بنائیے جس میں $PQ = 4.6$ سمر، $QR = 5.4$ سمر اور $\angle Q = 50^0$



کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

(a) 5.4 سمر طول کا ایک خطی قطعہ QR کھینچئے۔

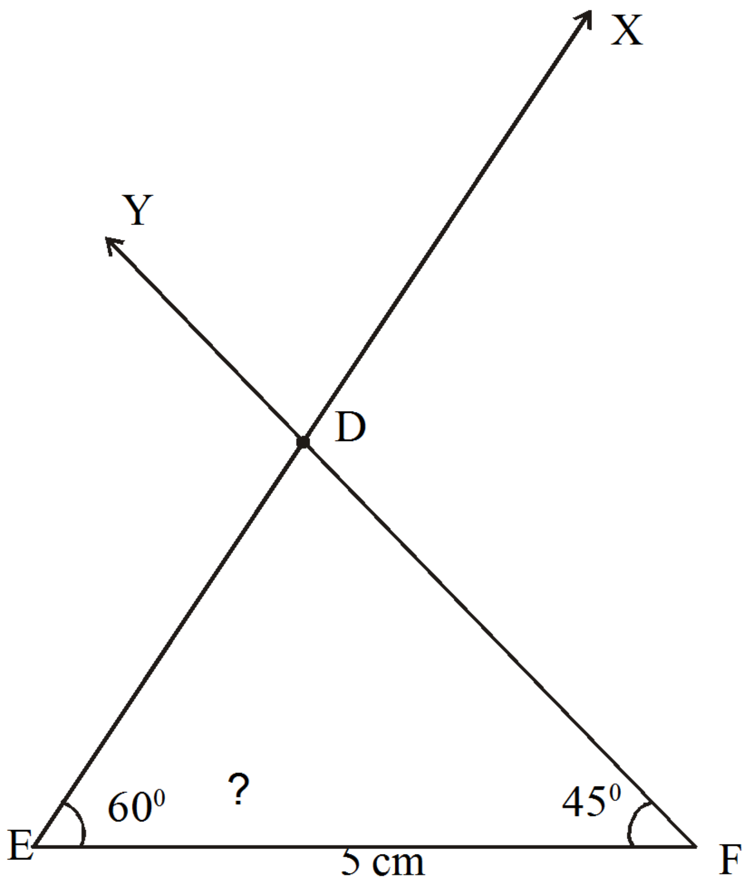
(b) چاندہ کی مدد سے نقطہ 'Q' سے QR کے ساتھ 50^0 زاویہ بنانے والی ایک شعاع QX کھینچئے۔

(c) Q کو مرکز مان کر 4.6 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچئے اس طرح کہ وہ QX شعاع کو 'P' پر قطع کرے۔

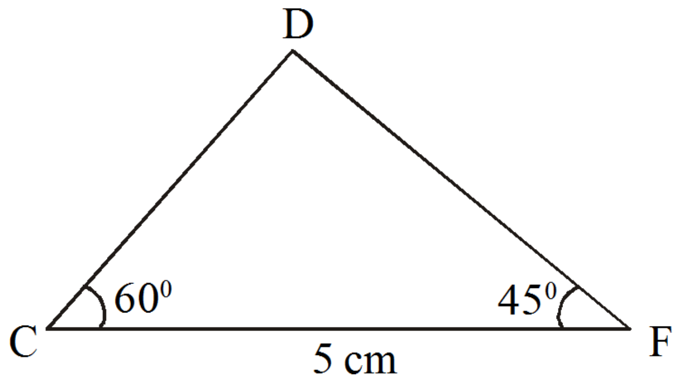
(d) P اور R کو ملائیے۔ ΔPQR ہی ہمارا مطلوبہ مثلث ہے۔

III. ایک مثلث بنانا جب کہ ایک ضلع اور دو زاویوں کی پیمائش دی گئی ہے۔

مثال: ΔDEF بنائیے جس میں $EF = 5$ سمر، $\angle E = 60^0$ اور $\angle F = 45^0$



کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

(a) 5 سم طول کا ایک خطی قطعہ EF کھینچیے۔

(b) چاندہ کی مدد سے 'E' سے EF کے ساتھ 60^0 زاویہ بنانے والی شعاع EX کھینچیے۔

(c) چاندہ کی مدد سے 'F' سے EF کے ساتھ 45^0 زاویہ بنانے والی ایک شعاع FY کھینچیے۔

(d) EX اور FY کو بڑھائیے تاکہ یہ D پر قطع کریں۔

(e) ΔDEF ہی ہمارا مطلوبہ مثلث ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

حسب ذیل مثلثات بنائیے۔

1. ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیے جس کا ضلع 5 سم ہے۔
(اشارہ سم $XY = YZ = ZX = 5cm$)

2. مثلث ABC بنائیے جس میں $BC =$ 4.8 سم، $\angle B = \angle C = 45^0$

3. مثلث PQR بنائیے جس میں $PQ =$ 5.1 سم، $QR =$ 4.7 سم اور $\angle Q = 50^0$

4. مثلث LMN بنائیے جس میں $LM =$ 6 سم، $MN = NL =$ 5 سم

5. مثلث IJK بنائیے جس میں $JK =$ 4.9 سم، $\angle J = 90^0$ اور $\angle K = 30^0$

6. مثلث ABC بنائیے جس میں $BC =$ 3.7 سم، $AB =$ 4.1 سم اور $\angle C = 60^0$

4.9.4 چار ضلعی کی بناوٹیں

آیئے اب ہم چار ضلعی بنائیں گے جب کہ حسب ذیل پیمائشات دی گئی ہوں۔

(1) جب کہ چار ضلعے اور ایک زاویہ دیا گیا ہو (SSSSA)

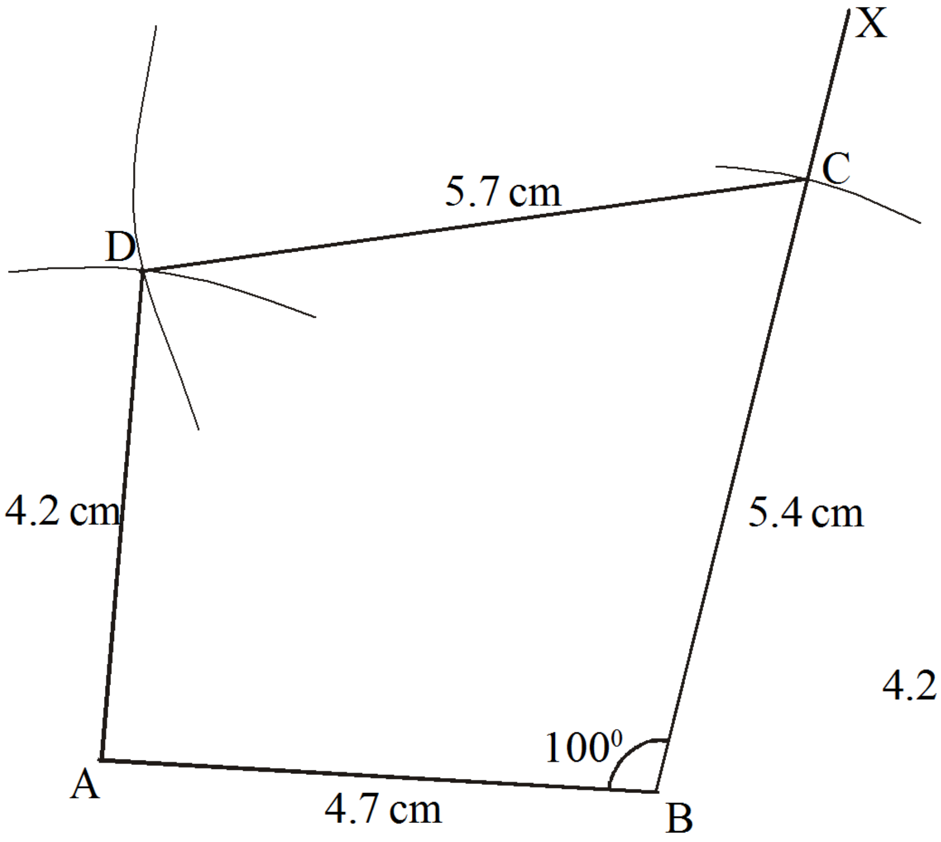
(2) جب کہ چار ضلعے اور ایک وتر دیا گیا ہو (SSSSD)

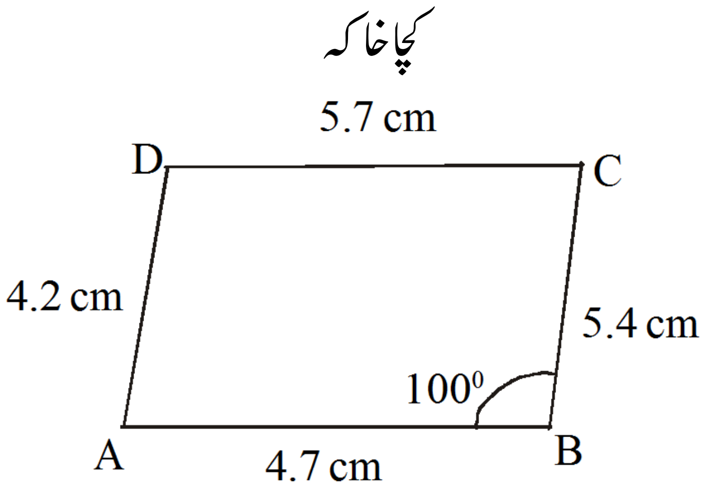
(3) جب کہ تین ضلعے اور دو وتر دیے گئے ہوں (SSSDD)

I. ایک چار ضلعی بنانا جب کہ چار ضلعے اور ایک زاویہ دیا گیا ہے

مثال: ایک چار ضلعی ABCD بنایئے جس میں

AB = 4.7 سمر، BC = 5.4 سمر، CD = 5.7 سمر، AD = 4.2 سمر اور $\angle ABC = 100^0$





بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

پہلے ہم SAS خصوصیت کی رو سے ΔAB بناتے ہیں۔

.1 4.7 سمر طول سے ایک خطی قطعہ AB کھینچیے

.2 چاندہ کی مدد سے 'B' سے BA کے ساتھ 100^0 زاویہ بنانے والی شعاع کھینچیے۔

.3 B کو مرکز مان کر 5.4 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے اس طرح کہ وہ شعاع BX کو C پر قطع کرے۔

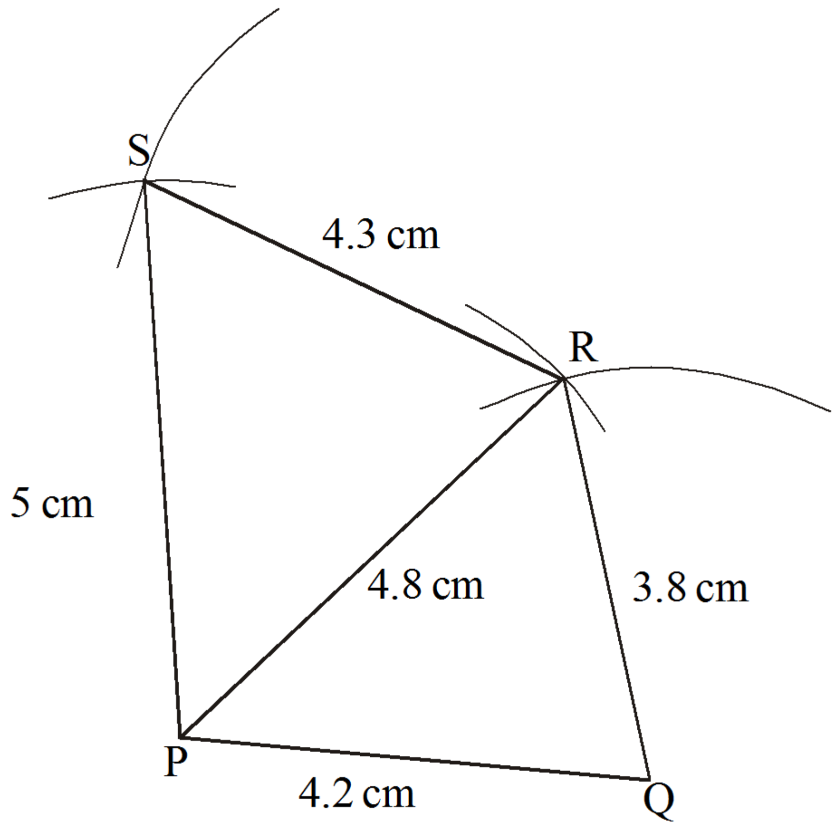
.4 C کو مرکز مان کر 5.7 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔

.5 A کو مرکز مان کر 4.2 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے اس طرح کہ وہ پہلے کھینچی گئی قوس کو D پر قطع کرے۔

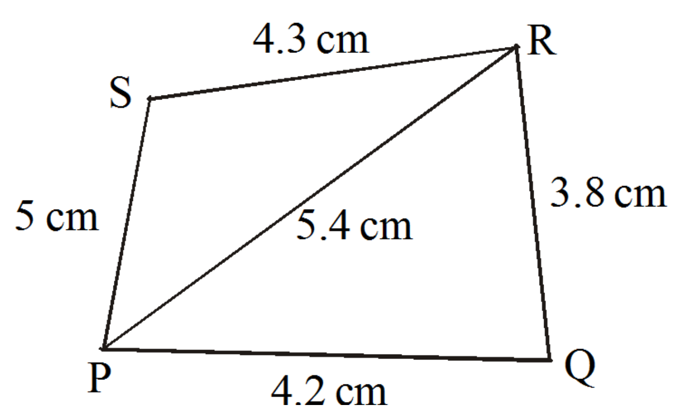
.6 CD اور AD کھینچیے۔ ABCD ہی ہماری مطلوبہ چار ضلعی ہے۔

II. ایک چار ضلعی بنانا جب کہ چار ضلعے اور ایک وتر دیا گیا ہو

مثال: ایک چار ضلعی PQRS بنایئے جس میں PQ = 4.2 سمر، QR = 3.8 سمر، RS = 4.3 سمر، SP = 5 سمر اور PR = 4.8 سمر



کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

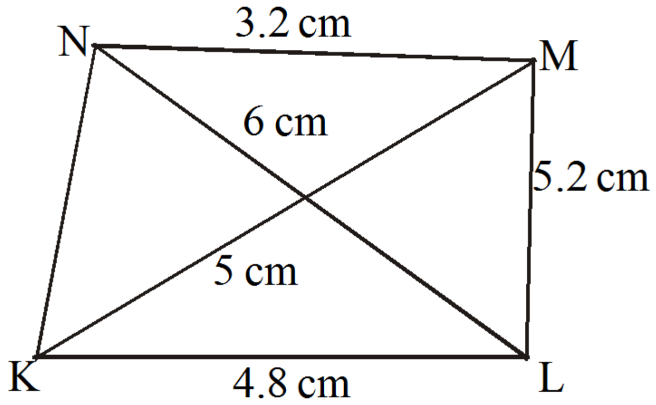
پہلے ہم SSS خاصیت کی رو سے ایک مثلث ΔPQR یا ΔPSR بناتے ہیں۔

1. 4.2 سمر طول سے ایک خطی قطعہ PQ کھینچیے۔
2. Q کو مرکز مان کر 3.8 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔
3. P کو مرکز مان کر 4.8 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔ اس طرح کہ وہ پہلے کھینچی گئی قوس کو R پر قطع کرے PR اور QR کھینچیے۔
4. R کو مرکز مان کر 4.3 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔
5. دوبارہ P کو مرکز مان کر 5 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے اس طرح کہ وہ پہلے کھینچی گئی قوس کو S پر قطع کرے۔
6. PS اور RS کھینچیے۔ PQRS ہی ہماری مطلوبہ چار ضلعی ہے۔

III. ایک چار ضلعی بنانا جب کہ تین ضلعے اور دو وتر دیے گئے ہیں

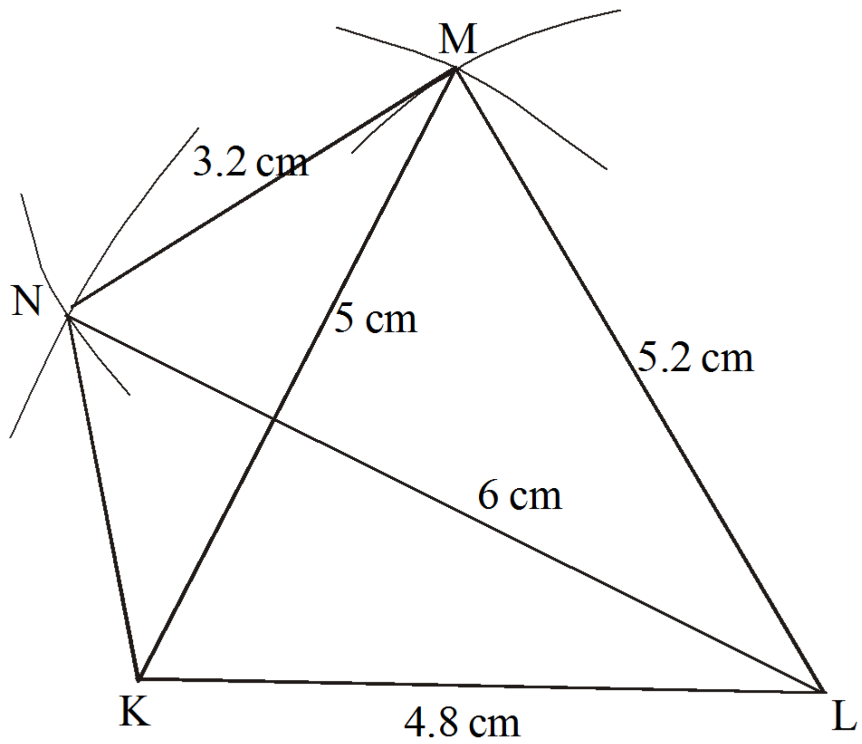
مثال: ایک چار ضلعی KLMN بنایئے جس میں KL = 4.8 سمر، LM = 5.2 سمر، KM = 5 سمر، MN = 3.2 سمر اور LN = 6 سمر

کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

پہلے ہم SSS خاصیت کی رو سے ΔKLM بناتے ہیں۔



1. 4.8 سمر طول سے ایک خطی قطعہ KL کھینچیے۔
2. 'L' کو مرکز مان کر 5.2 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔
3. K کو مرکز مان کر 5 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔اس طرح کہ وہ پہلے کھینچی گئی قوس کو M پر قطع کرے KM اور LM کھینچیے۔
4. M کو مرکز مان کر 3.2 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے۔
5. پھر ایک بار L کو مرکز مان کر 6 سمر نصف قطر سے ایک قوس کھینچیے اس طرح کہ وہ N پر قطع کرے۔
6. LN، MN اور KN کھینچیے۔KLMN ہی ہماری مطلوبہ چار ضلعی ہے۔

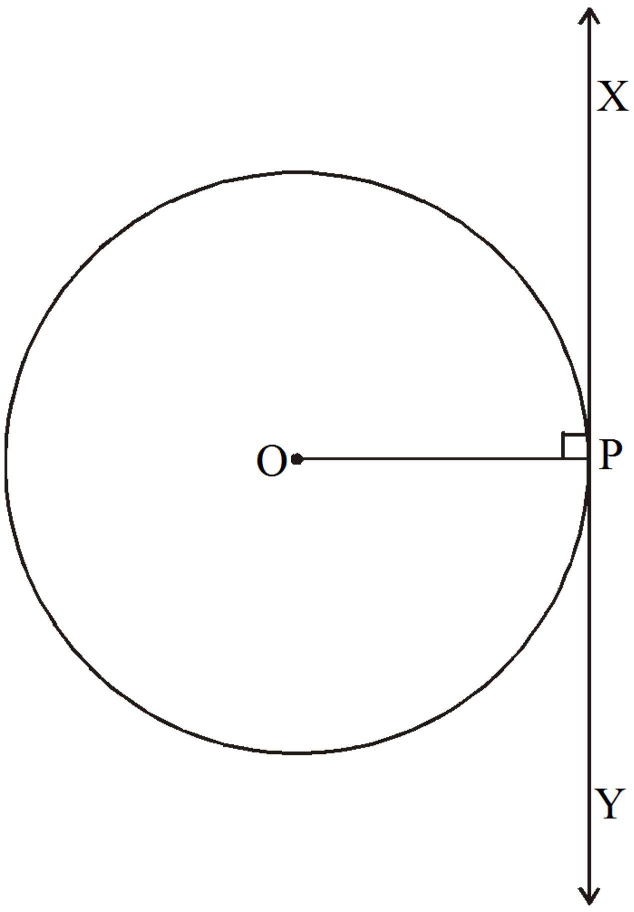
اپنے اکتساب کی جانچ کرلیں

1. ایک چار ضلعی بنائیے جس میں سمر AB = 5.5، سمر BC = 3.5، سمر CD = 4، سمر AD = 5 اور $\angle A = 50^0$
2. ایک متوازی الاضلاع بنائیے جس میں سمر PQ = 4.5، سمر QR = 3 اور $\angle PQR = 60^0$
(اشارہ: PQ = SR اور QR = PS)
3. ایک چار ضلعی PQRS بنائیے جس میں سمر PQ = 3.5، سمر QR = 4، سمر RS = 5، سمر PS = 4.5 اور سمر QS = 6.5
4. ایک معین KLMN بنائیے جس میں سمر KL = 4، سمر LN = 5.6
(اشارہ: KL = LM = MN = KN)
5. ایک چار ضلعی ABCD بنائیے جہاں سمر AB = 4. 2، سمر BC = 3، سمر AD = 2.8، سمر AC = 4.5 اور سمر BD = 5۔

4.9.5 دائرہ کے مماس کی بناوٹ

ہم یہاں یہ سیکھیں گے کہ دائرے پر دیئے گئے نقطہ سے اور بیرونی نقطہ سے دائرے کے مماس کی بناوٹ کس طرح ہوگی جب کہ دائرے کا مرکز معلوم ہو۔

I. دائرے پر دیئے گئے نقطہ سے دائرے کے مماس کی بناوٹ (جب کہ دائرے کا مرکز معلوم ہو)

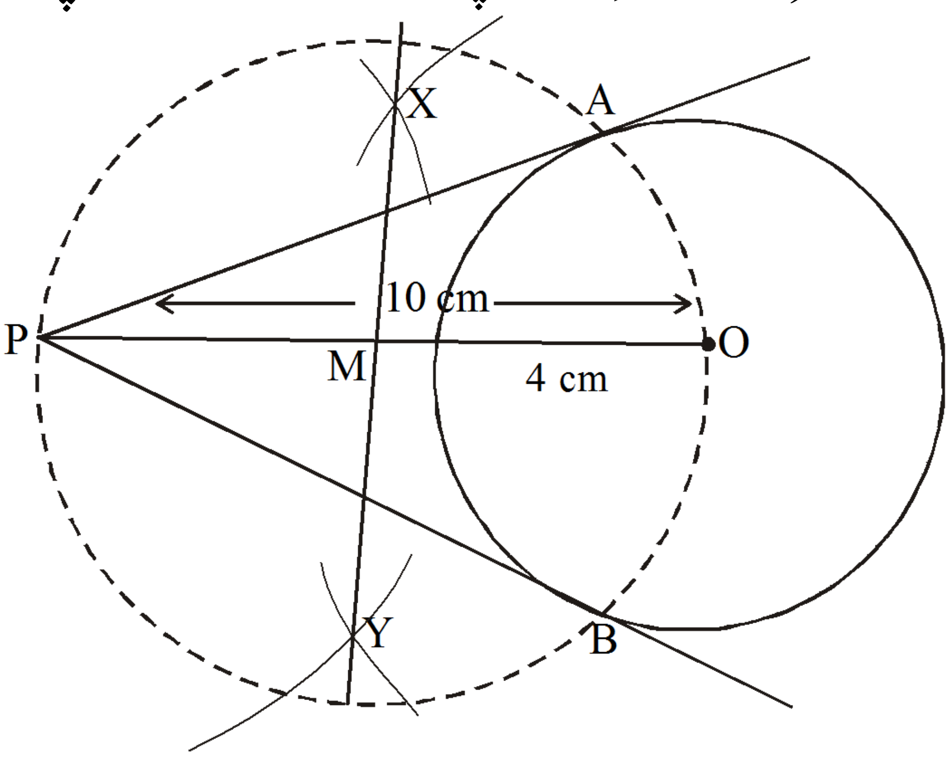


بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

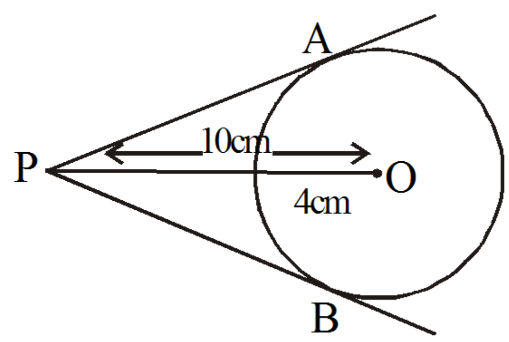
1. دیئے گئے نصف قطر سے 'O' کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچئے۔
2. دائرے پر P کوئی نقطہ لیجئے اور OP کو ملایئے۔
3. P سے گذرتا ہوا OP کے عموداً ایک خط XY کھینچئے۔
4. XPY ہی مطلوبہ مماس ہے۔

II. بیرونی نقطہ سے دائرے کے مماس کی بناوٹ (جب کہ دائرے کا مرکز معلوم ہو)

مثال: 4 سمر نصف قطر والا ایک دائرہ کھینچئے۔ دائرے کے مرکز سے 10 سمر کے فاصلے پر واقع نقطہ سے دائرے کا مماس کھینچئے۔



کچا خاکہ



بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

1. O کومرکز مان کر 4 سمرنصف قطر سے ایک دائرہ کھینچئے۔ مرکز O سے 10 سمرکی دوری پر ایک نقطہ P کی نشاندہی کیجئے۔
2. خطی قطعہ OP کا عمودی ناصف XY کھینچئے جو OP کو M پر قطع کرتا ہے۔
3. M کومرکز مان کر MP یا MO کے نصف قطر سے ایک دائرہ کھینچئے جو پہلے دائرے کو نقاط A اور B پر قطع کرتا ہے۔
4. PA اور PB کھینچئے یہی ہمارے مطلوبہ مماس ہیں۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

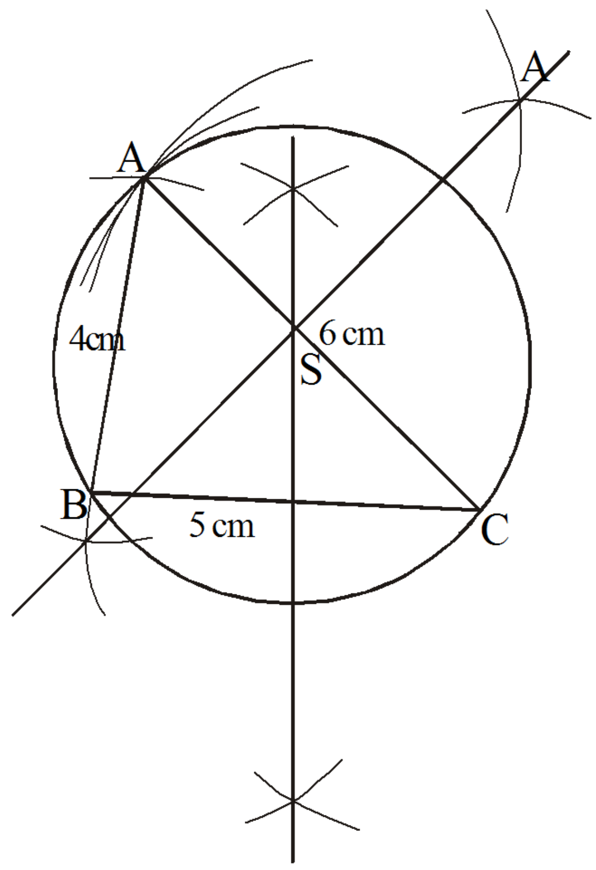
1. 3.5 سمرنصف قطر سے ایک دائرہ بنائیے اس پر ایک نقطہ P لیجئے۔ P سے گذرتا ہوا دائرہ پر ایک مماس بنائیے۔
2. 2.8 سمرنصف قطر کے دائرے پر واقع نقطہ P سے گذرتا ہوا دائرہ کا ایک مماس کھینچئے۔
3. 2.8 سمرنصف قطر سے ایک دائرہ بنائیے۔ مرکز سے 5 سمرکی دوری پر ایک نقطہ P لیجئے۔ نقطہ P سے گذرتے ہوئے دائرے پر دو مماس کھینچئے۔
4. 2.5 سمرنصف قطر سے ایک دائرہ بنائیں۔ مرکز سے 6.8 سمر دوری پر واقع ایک نقطہ سے دائرے پر مماس کی ایک جوڑی کھینچئے۔

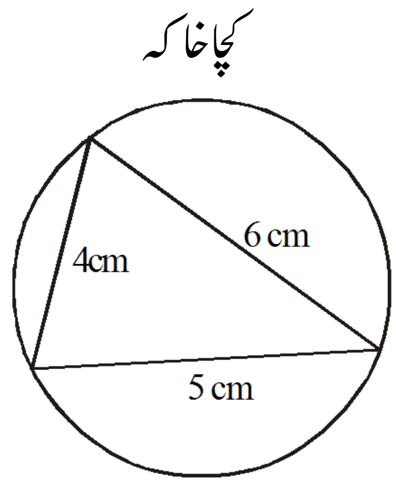
4.9.6 مثلث کا بیرونی دائرہ (محیطی دائرہ) اور اندرونی دائرہ کی بناوٹ

اب ہم مثلث کے بیرونی دائرہ (محیطی دائرہ) کس طرح بنایا جاتا ہے سیکھیں گے۔

I. مثلث کے بیرونی دائرے کی بناوٹ

مثال: ایک مثلث کا بیرونی دائرہ بنائیے جب کہ اس کے اضلاع 5 سمر، 6 سمر اور 4 سمر ہیں۔





بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

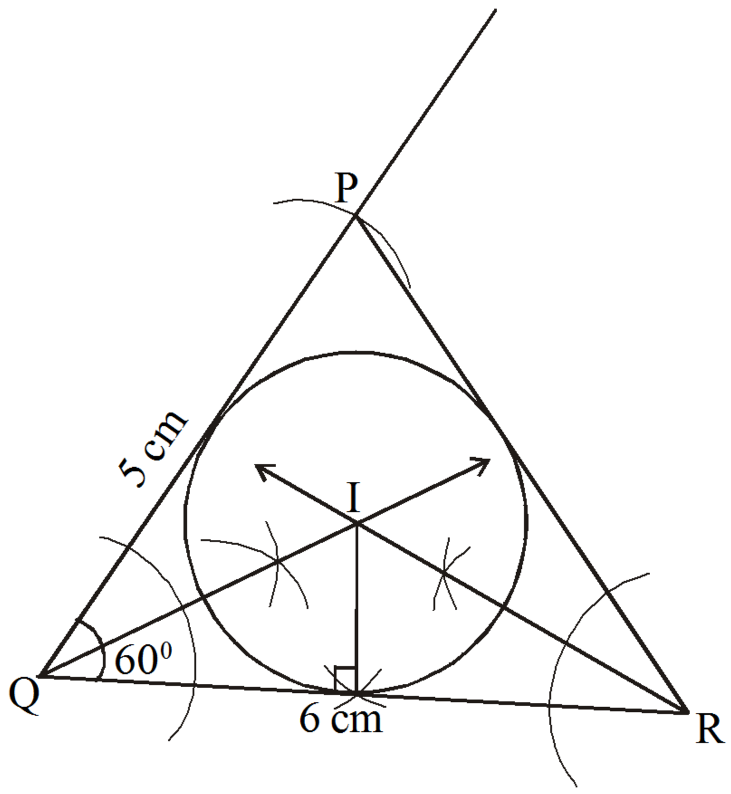
.1 دی گئی پیمائشات ΔABC سے تشکیل دیجئے۔
(SSS یا SAS یا SAA خاصیت کے استعمال سے جو کہ ہم پہلے سیکھ چکے ہیں)

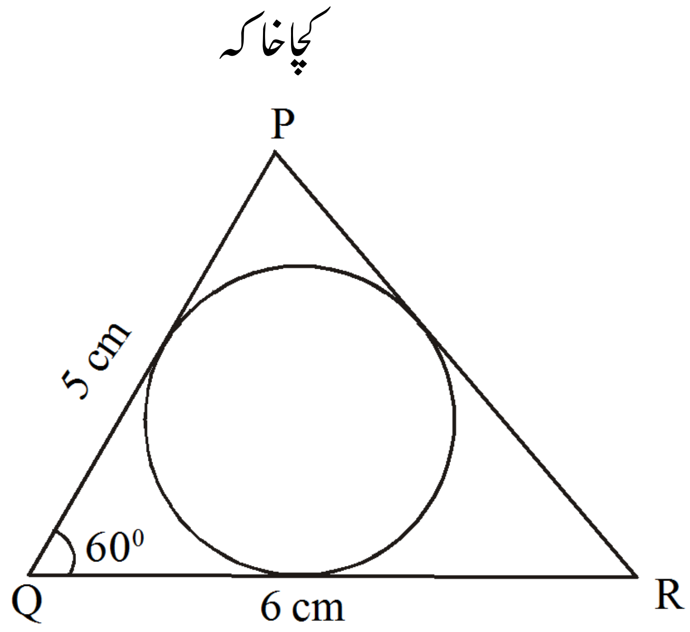
.2 BC اور AC کے عمودی ناصف کھینچیے جو S پر قطع کرتے ہیں۔

.3 S کو مرکز مان کر SA یا SB یا SC نصف قطر لے کر ایک دائرہ کھینچیے جو اس A، B اور C سے گذرتا ہے۔ یہی یہی ہمارا مطلوبہ دائرہ ہے۔

II. ایک مثلث کا اندرونی دائرہ بنانا

مثال: ایک مثلث کی پیمائشات PQ = 5 سمر، QR = 6 سمر، اور $\angle Q = 60^0$ ہیں اس کا اندرونی دائرہ بنایئے۔





بناوٹ کے مراحل (اقدامات)

.1 دی گئی پیمائشات سے ΔPQR بنایئے۔
(SSS یا SAS یا SAA خاصیت کے استعمال سے جو کہ ہم پہلے سیکھ چکے ہیں)

.2 زاویے $\angle Q$ اور $\angle R$ کے زاویائی ناصف کھینچیے جو I پر قطع کرتے ہیں QR کے عموداً نقطہ I سے ایک خط IX کھینچیے۔

.3 'I' کو مرکز مان کر IX نصف قطر سے ایک دائرہ کھینچیے جو مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہوئے گذرتا ہے۔

.4 یہی دائرہ ہمارا مطلوبہ دائرہ ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کرلیں

1. ایک ΔABC بنائیے اس طرح کہ $BC = 6$ سمر اور $\angle B = 60^0$ اور سمر $AB = 4.8$ اور اس کا بیرونی دائرہ بنائیے۔
2. ایک ΔABC بنائیے جس میں سمر $BC = 6.3$ ‘ $\angle B = 60^0$ اور $\angle C = 50^0$ اس کا اندرونی دائرہ بنائیے۔

مشق

1. ایک مثلث ABC بنائیے جب کہ سمر $AB = 4$ ‘ سمر $BC = 6$ اور $\angle B = 90^0$ ہے۔
2. ایک ΔPQR بنائیے جس میں سمر $PQ = 8$ ‘ سمر $QR = 6$ اور سمر $RS = 5$ ہے۔
3. ΔYXZ بنائیے اس طرح کہ سمر $YZ = 6.2$ ‘ $\angle Y = 65^0$ اور $\angle Z = 55^0$ ہے۔
4. ایک چارضلعی ABCD بنائیے جہاں سمر $AB = 2.9$ ‘ سمر $BC = 3.2$ ‘ سمر $CD = 2.7$ ‘ سمر $AD = 3.4$ اور $\angle A = 75^0$ ہے۔
5. ایک معین ABCD بنائیے جہاں سمر $PQ = 4$ ‘ $\angle PQR = 120^0$
6. ایک چارضلعی ABCD بنائیے جہاں سمر $AB = 4.5$ ‘ $BC = 5.5$ سمر ‘ $CD = 4$ سمر ‘ $AD = 6$ سمر اور $AC = 7$ سمر ہے۔
7. ایک متوازی الاضلاع ABCD بنائیے جہاں سمر $AB = 6$ ‘ سمر $CD = 4$ اور سمر $BD = 7.5$ ہے۔
8. ایک چارضلعی KLMN بنائیے جہاں سمر $LM = 7.5$ ‘ سمر $KM = 6$ ‘ سمر $MN = 5$ اور سمر $KN = 5.5$ اور $\angle N = 10$ سمر ہے۔
9. 3.2 سمر نصف والا ایک دائرہ بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ 'P' کی نشاندہی کیجیے۔ 'P' سے گذرتا ہوا دائرہ پر ایک مماس کھینچیے۔
10. 4.4 سمر نصف والا ایک دائرہ بنائیے۔ مرکز سے 9 سمر کی دوری سے دائرہ کے بیرونی جانب واقع کسی نقطہ سے دائرہ پر مماس کی ایک جوڑ بنائیے۔
11. 4.5 سمر ضلع والا ایک مساوی الاضلاع مثلث بنائیے اور اس کا محیطی دائرہ کھینچیے۔
12. ایک مساوی الساقین مثلث بنائیے جہاں سمر $BC = 5$ ‘ سمر $AB = AC = 4.4$ اور اس کا اندرونی دائرہ کھینچیے۔

آیئے خلاصہ کریں

- بنیادی بناوٹوں کا اعادہ، عمودی ناصف، زاویائی ناصف اور یکساں زاویہ کی کسی دوسری جگہ بناوٹ
- مثلثات کی بناوٹ جب کہ
  - (a) تین ضلعے دئے گئے ہوں (SSS)
  - (b) دو ضلعے اور ان کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہو (SAS)
  - (c) ایک ضلع اور دو زاویے دیئے گئے ہوں (SAA)
- چار ضلعی کی بناوٹ جب کہ
  - (a) چار ضلعے اور ایک زاویہ دیا گیا ہو (SSSSA)
  - (b) چار ضلعے اور ایک وتر دیا گیا ہو (SSSSD)
  - (c) تین ضلعے اور دو وتر دئے گئے ہوں (SSSDD)
- دائرے کے مماس کی بناوٹ
  - (a) دائرے پر دئے گئے نقطہ پر
  - (b) بیرونی نقطہ سے
- بیرونی دائرہ اور اندرونی دائرہ کی بناوٹ

سبق 4.10

تحلیلی جیومٹری
Co-ordinate Geometry

4.10.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- کارتیزی نظام میں نقاط کی نشاندہی کرسکیں۔
- کارتیزی مستوی (Co-ordinates plane) میں دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرسکیں۔
- نسبت میں تقسیم کرنے کے ضابطے کے استعمال کے ذریعے اس نقطے کے مختصات معلوم کرسکیں جو دو نقاط کو $m_1 : m_2$ کی نسبت میں داخلی طور پر تقسیم کرتا ہو۔
- وسطی نقطے کے ضابطے کی مدد سے کسی خطی قطعہ کے درمیانی نقطے کے مختصات معلوم کرسکیں۔
- مرکز وسطانی کے ضابطے کے ذریعے مرکز وسطانی کے مختصات دریافت کرسکیں۔

4.10.1 تعارف

کسی شئے کے مقام کا تعین کس طرح کریں گے؟

مثال کے طور پر ایک ہال میں چند کرسیاں قرینے سے رکھی گئی ہیں۔

آپ نے اپنے دوست آدتیا کو ایک سرخ کرسی پر بیٹھنے کے لیے کہا ہے۔

آپ کرسی کے مقام کو کس طرح بیان کریں گے؟

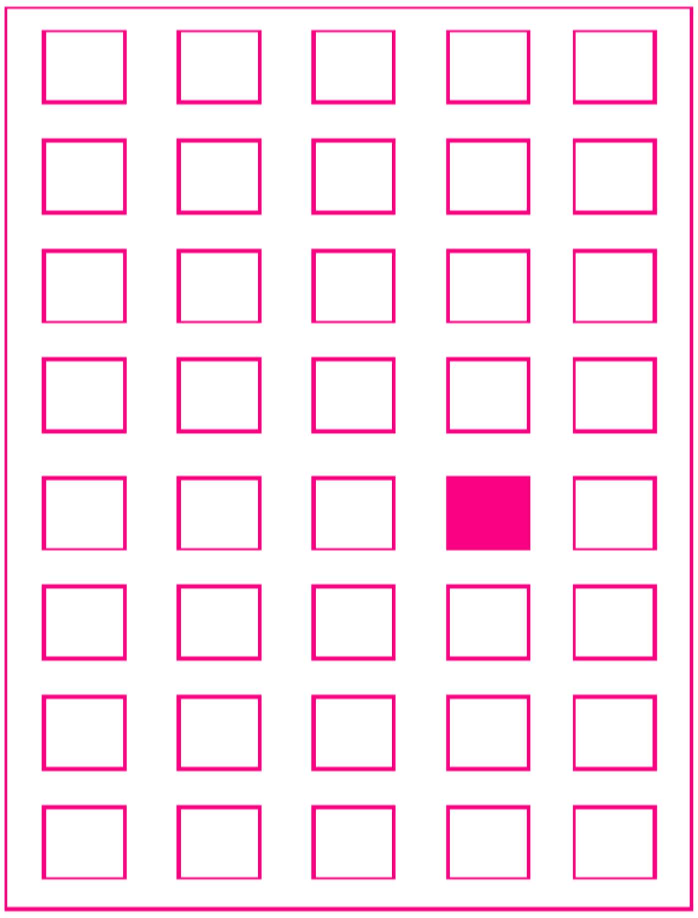
رانی نے کہا: ''آدتیا پانچویں صف اور دوسرے کالم میں بیٹھا ہے۔''

راما نے کہا: ''وہ دوسری صف اور پانچویں کالم میں بیٹھا ہے۔''

کس نے درست اطلاع دی؟

کیا آپ مقام کا تعین کرسکتے ہیں؟

صف اور کالم کا شمار ہم کس نقطے سے کریں گے؟



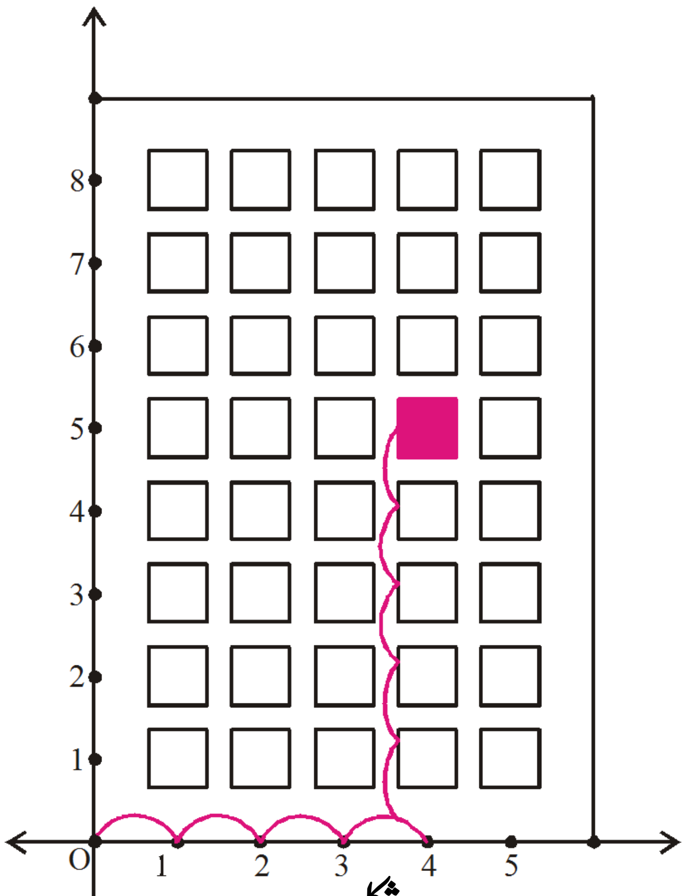
شکل - 1

ہال کی سطحوں (Edges) کو آپ صف اور کالم تصور کریں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔صف کے خط اور کالم کے خط جہاں ایک دوسرے کو قطع کررہے ہیں اسے 'O' مان لیں۔شکل کے مطابق صف اور کالموں کی تعداد معلوم کیجئے۔

نقطہ 'O' سے کرسی کے مقام کا تعین کریں گے جو چوتھے کالم اور پانچویں صف میں ہے۔

فرض کیجئے کہ سرخ کرسی کا مقام 'P' ہے۔ اس لئے $p(x, y)$
$= (4,\ 5)$

چناں چہ پہلا مختص یا x۔ مختص 4 ہے جب کہ دوسرا مختص یا y- مختص 5 ہے۔



شکل - 2

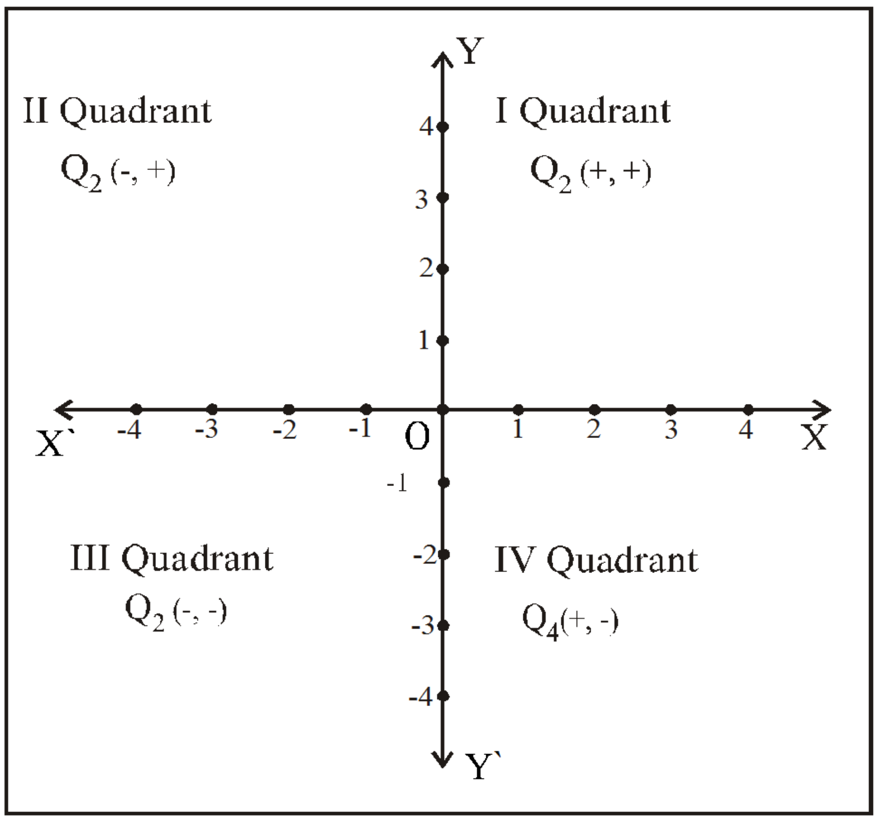
دوحوالوں کی مدد سے ایک نقطے کے اظہار سے ریاضی کی ایک نئی شاخ کو فروغ حاصل ہوا جس کو تحلیلی جیومٹری کے نام سے موسوم کیا گیا ہے۔

فرانسیسی ریاضی داں وفلسفی رینے ڈیکارٹس (Rene Descarts) (1596-16450) نے تحلیلی جیومٹری کو فروغ دیا۔

رینے ڈیکارٹس (1596-16450)

4.10.2 کارتیزی نظام

مستوی میں ہم دو خطوط لیتے ہیں جو ایک دوسرے پر عمود وار ہیں۔افقی خط XX' کو YY' کو Y- محور کے نام سے جانا جاتا ہے۔ جس نقطے پر XX' اور Y' ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں' مبدا (Origin) کہلاتا ہے۔ 'O' کے مختصات (0,0) ہیں۔



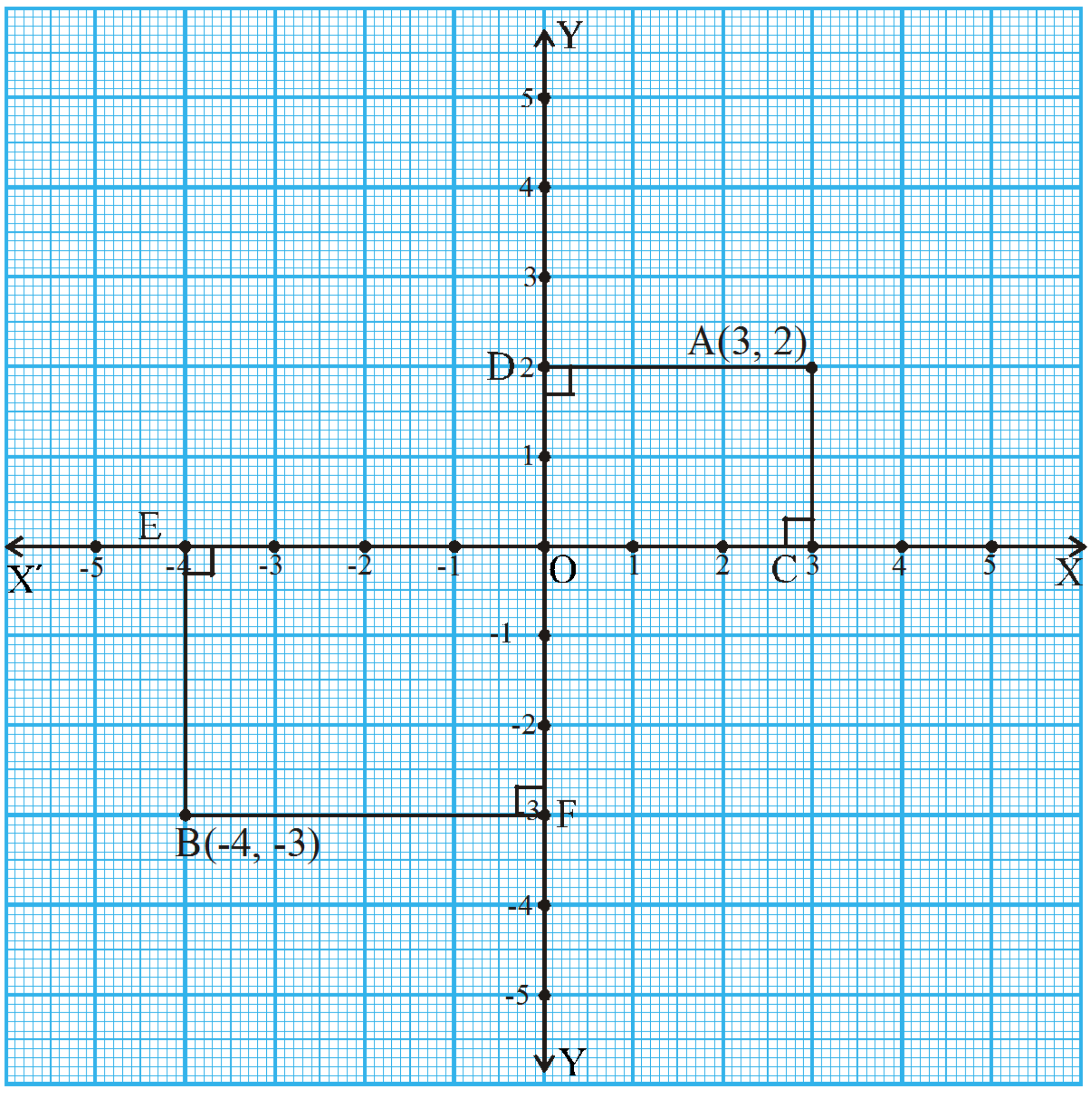
$\overrightarrow{OX}$ کو مثبت x۔محور کہا جاتا ہے۔

$\overrightarrow{OY}$ کو مثبت y۔محور کہا جاتا ہے۔

$\overrightarrow{OX'}$ کو منفی x۔محور کہا جاتا ہے۔

$\overrightarrow{OY'}$ کو منفی y۔محور کہا جاتا ہے۔

(مستوی میں) چار حصوں کو ربعوں یا اربع کہا جاتا ہے جنھیں مخالف سمت ساعت میں Q_1 ' Q_2 ' Q_3 اور Q_4 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



کسی نقطے کا تعین

گراف پر غور کیجئے۔

نقطہ A پہلے ربع (Q_1) میں اور نقطہ (B) تیسرے ربع (Q_3) میں واقع ہیں۔

اب ہم A اور B کا محوروں سے فاصلہ دیکھتے ہیں۔

اس کے لیے ہم X۔محور پر عمود AC اور Y۔محور پر AD گرائیں گے۔

اس طرح عمود BE اور BF بھی گرائیں گے۔

ہم غور کر سکتے ہیں

(i) نقطہ A کا Y محور سے عمودی فاصلہ جسے X۔محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا $AD = OC = 3$ units ہوگا۔ اسے ہم A کا X۔مختص کہیں گے۔

(ii) نقطہ A کا X۔محور سے عمودی فاصلہ جسے Y۔محور کے ساتھ مثبت سمت میں ناپا گیا ہو $AC = OD = 2$ units ہوگا۔ اسے ہم A کا Y۔مختص کہیں گے۔

(iii) نقطہ B کا X۔محور سے عمودی فاصلہ جسے X۔محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہو $OE = BF = 4$ units ہوگا۔ اسے ہم B کا X۔مختص کہیں گے۔

(iv) نقطہ B کا X۔محور سے عمودی فاصلہ جسے Y۔محور کے ساتھ منفی سمت میں ناپا گیا ہو $OF = EB = 3$ units ہوگا۔ یعنی Y۔محور پر 3' اسے ہم B کا Y۔مختص کہیں گے اور $(-4, -3)$ نقطہ B کے مختصات ہوں گے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے - 1

1. ربع لکھئے جس میں حسب ذیل نقاط موجود ہیں۔

(i) $(5, -3)$ (ii) $(-7, -6)$ (iii) $(-4, 3)$ (iv) $(5, 8)$

2. ذیل کے نقاط کے X۔مختص اور Y۔مختص لکھئے۔

(i) $(-4, 8)$ (ii) $(0, 0)$ (iii) $(5, 6)$ (iv) $(-3, -5)$

3. نقطہ $(0, 13)$ کس محور پر واقع ہے؟ نقطہ کا اس محور سے فاصلہ معلوم کیجئے۔

4. نقطہ $(-7, 0)$ کس محور پر واقع ہے۔ نقطہ اس کا اس محور سے فاصلہ کیا ہوگا؟

4.10.3 دونقاط کا درمیان فاصلہ

فاصلہ منفی عدد نہیں ہوسکتا اس لئے ہم مطلق در لیتے ہیں۔

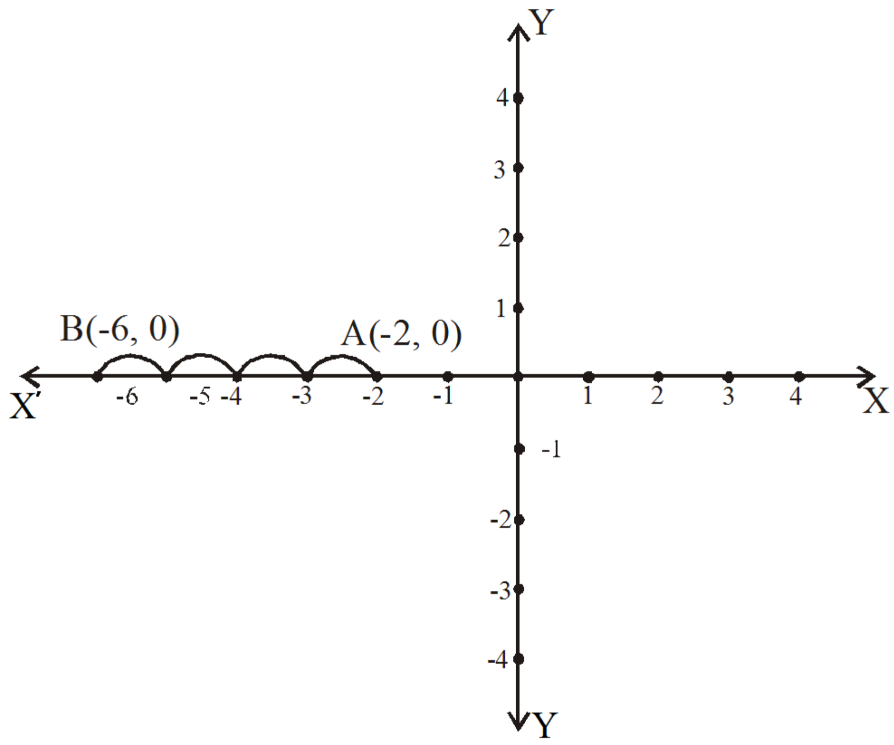
X۔محور پر واقع دونقاط کا درمیانی فاصلہ ان کے X۔مختصات کا فرق ہوتا ہے۔

نقاط $(x_1, 0)$ ، $(x_2, 0)$ کا درمیانی فاصلہ $|x_2 - x_1|$ units ہوگا۔

اس طرح اگر دونقاط Y۔محور پر واقع ہوں تب ان نقاط کا درمیانی فاصلہ Y۔مختصات کا فرق ہوگا۔

∴ دونقاط $(0, y1)$ اور $(0, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $|y_2 - y_1|$ ہوگا۔

مثال-1: نقاط $A(-2, 0)$ اور $B(-6, 0)$ کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟



حل: X۔مختصات کا فرق

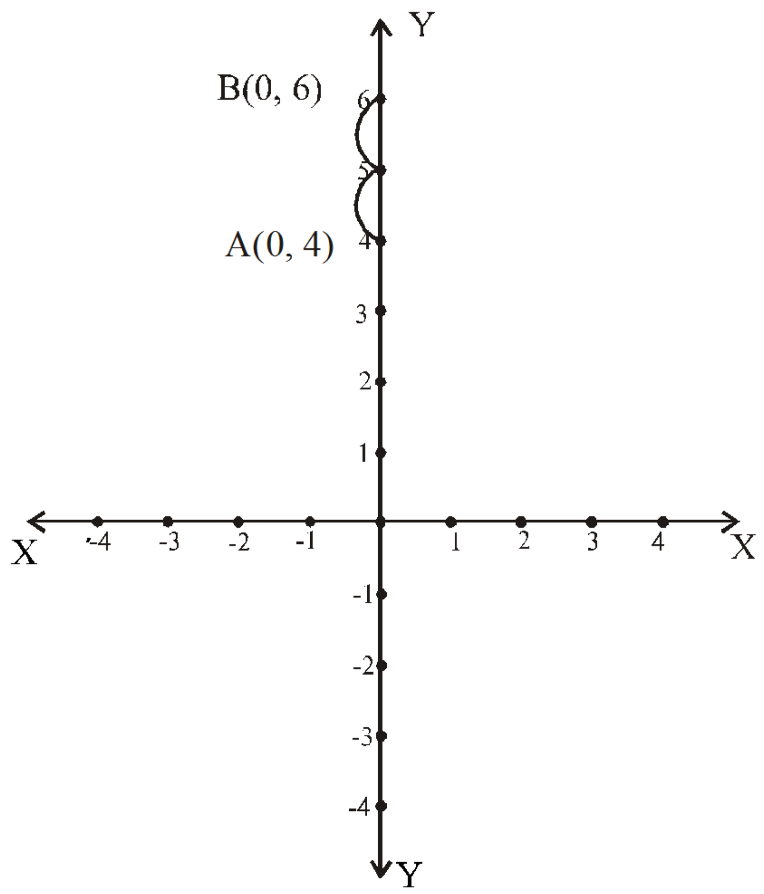
$(-6) - (-2) = -4$ (منفی)

فاصلے کو کسی بھی صورت میں منفی سے ظاہر نہیں کیا جاسکتا ۔ اس لئے ہم کو مطابق قدر نہیں ہوگی ۔ اس لئے فاصلہ ہوگا

$= |-6 - (-2)| = |-4|$

AB = 4 units

مثال-2: نقاط $(0, 4)$ اور $(6, 0)$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

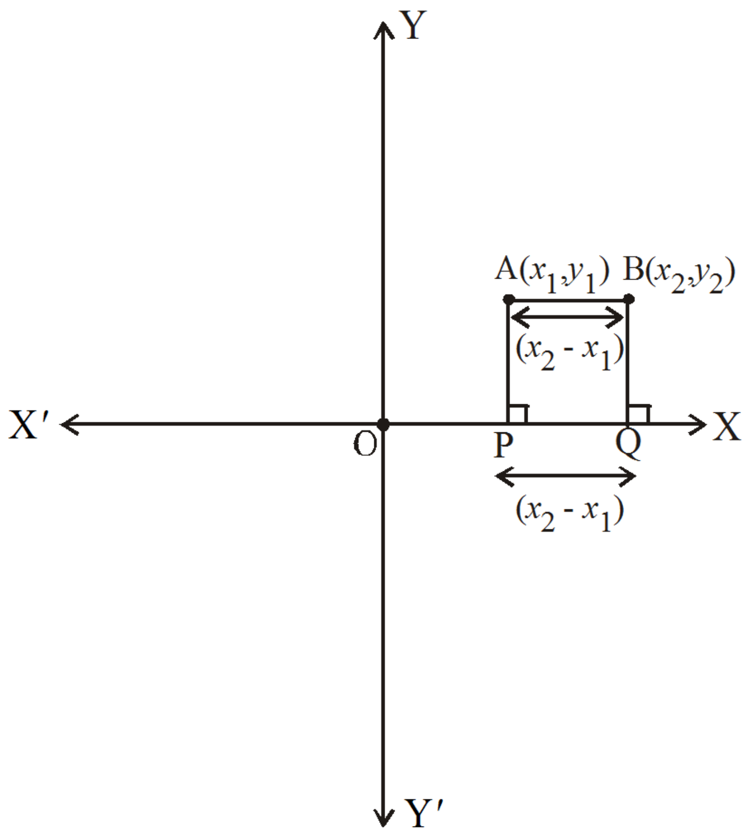


حل: فرض کروکہ نقاط $A(0, 4)$ اور $B(0, 6)$ ہیں ۔ A اور B کا درمیانی فاصلہ ہوگا۔

$= |6 - 4|$

$AB = |2| = 2$ اکائیاں

محوروں کے متوازی خطوط پر واقع دو نقاط کا درمیانی فاصلہ



نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_1)$ پر غور کیجئے۔

چوں کہ Y۔مختصات مساوی ہیں' اس لئے یہ نقاط

X۔محور کے متوازی ہیں۔

X۔محور پر AP اور BQ دو محور کھینچئے۔

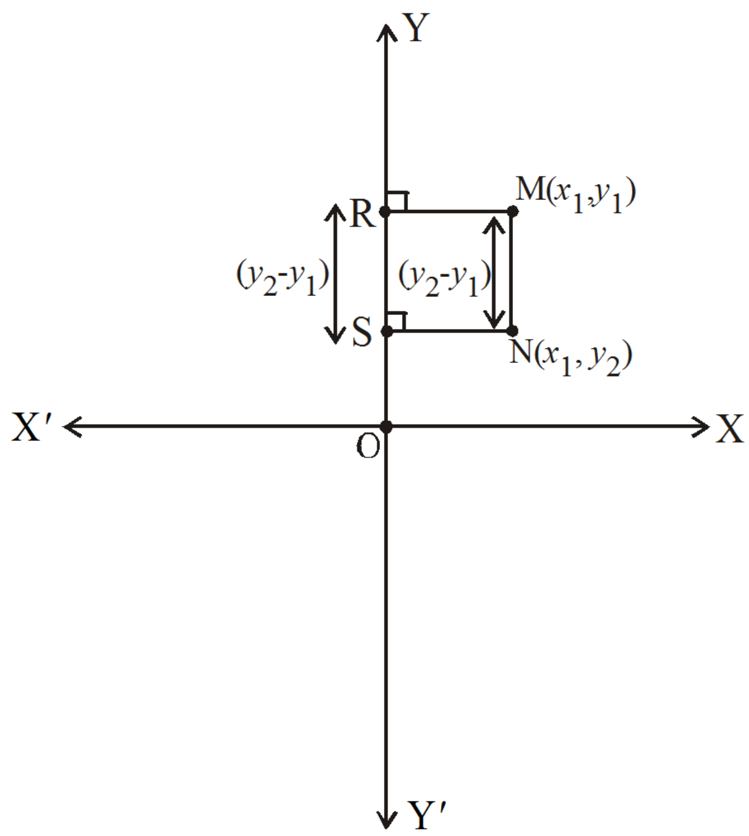
شکل کا مشاہدہ کیجئے۔

APQB ایک مستطیل ہے۔

تب $AB = PQ$

$PQ = |x_2 - x_1|$

$AB = |x_2 - x_1|$



اسی طرح دو نقاط $M(x_1, y_1)$ ' $N(x_1, y_2)$ کو

ملانے والا خط Y۔محور کے متوازی ہے۔

(x۔مختصات مساوی ہیں)

شکل کا مشاہدہ کیجئے۔

RSNM ایک مستطیل ہے

تب

$MN = RS$

$RS = |y_2 - y_1|$

$MN = |y_2 - y_1|$.

مثال-1: نقاط $(-4, -3)$ اور $(-8, -3)$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل: چوں کہ y۔مختصات مساوی ہیں۔

اس لئے دیئے گئے نقاط X۔محور کے متوازی خط پر واقع ہیں ۔

اس لئے نقاط $(-4, -3)$ اور $(-8, -3)$ کا درمیانی فاصلہ ہوگا۔

$|x_2 - x_1| = |-8 - (-4)| = |-8 + 4|$

$= |-4| = 4$ اکائیاں

مثال-2: نقاط $(3, 4)$ اور $(3, 8)$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل: چوں کہ x۔مختصات مساوی ہیں۔

اس لئے دیئے گئے نقاط اس خط پر واقع ہیں جو Y۔محور کے متوازی ہیں۔

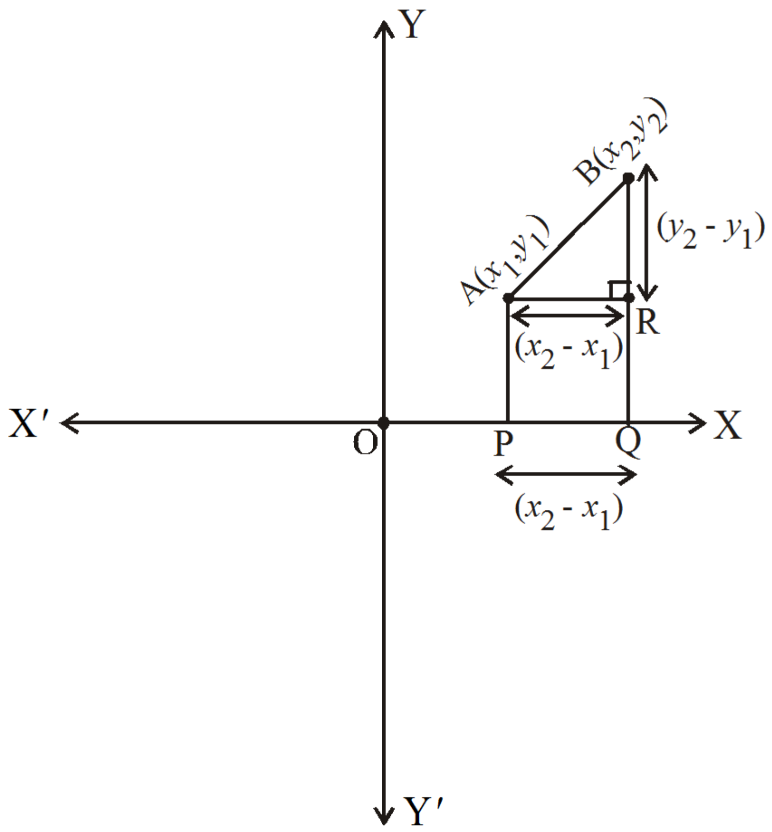
اس لئے نقاط $(3, 4)$ اور $(3, 8)$ کا درمیانی فاصلہ ہوگا۔

$$= |y_2 - y_1|$$

$$= |8 - 4|$$

$= 4$ اکائیاں

X-Y مستوی میں کوئی دو نقاط کا درمیانی فاصلہ



فرض کرو کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ مستوی میں واقع خط پر کے دو نقاط ہیں جیسا کہ شکل سے ظاہر کیا گیا ہے۔

X۔محور پر AP اور BQ دو عمود وار گرائیے۔

ایک عمود AR، نقطہ 'A' سے BQ پر اس طرح گرائیے کہ وہ 'R' تک جا ملے۔ تب

$$OP = x_1, OQ = x_2$$

اس طرح $PQ = OQ - OP = x_2 - x_1$

مثلث ΔARB (قائم الزاویہ مثلث)

$AB^2 = AR^2 + RB^2$ (مسئلہ فیثا غوث کی رو سے)

$$AB^2 = (x^2 - x_1)^2 + (y^2 - y_1)^2$$

$$B = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

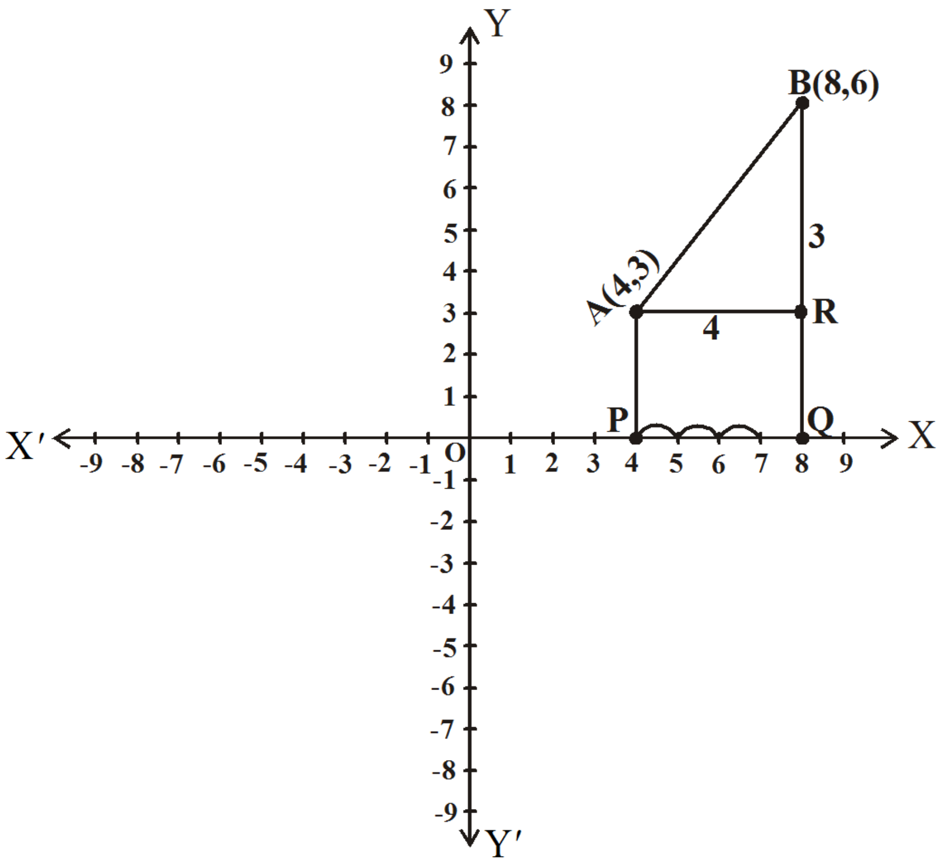
یعنی $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

اس طرح نقاط A اور B کا درمیانی فاصلہ

$$d = \sqrt{(x_2 \quad x_1)^2 \quad (y_2 \quad y_1)^2}$$

مثال-1: آیئے دونقاط $A(4, 3)$ اور $B(8, 6)$ کا درمیانی فاصلہ معلوم کریں گے۔

حل: ان نقاط کا (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے تقابل کیجئے۔تب



$x_1 = 4,\ x_2 = 8, y_1 = 3$

اور $y_2 = 6$

فاصلے کا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے یعنی

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصلہ $AB =$

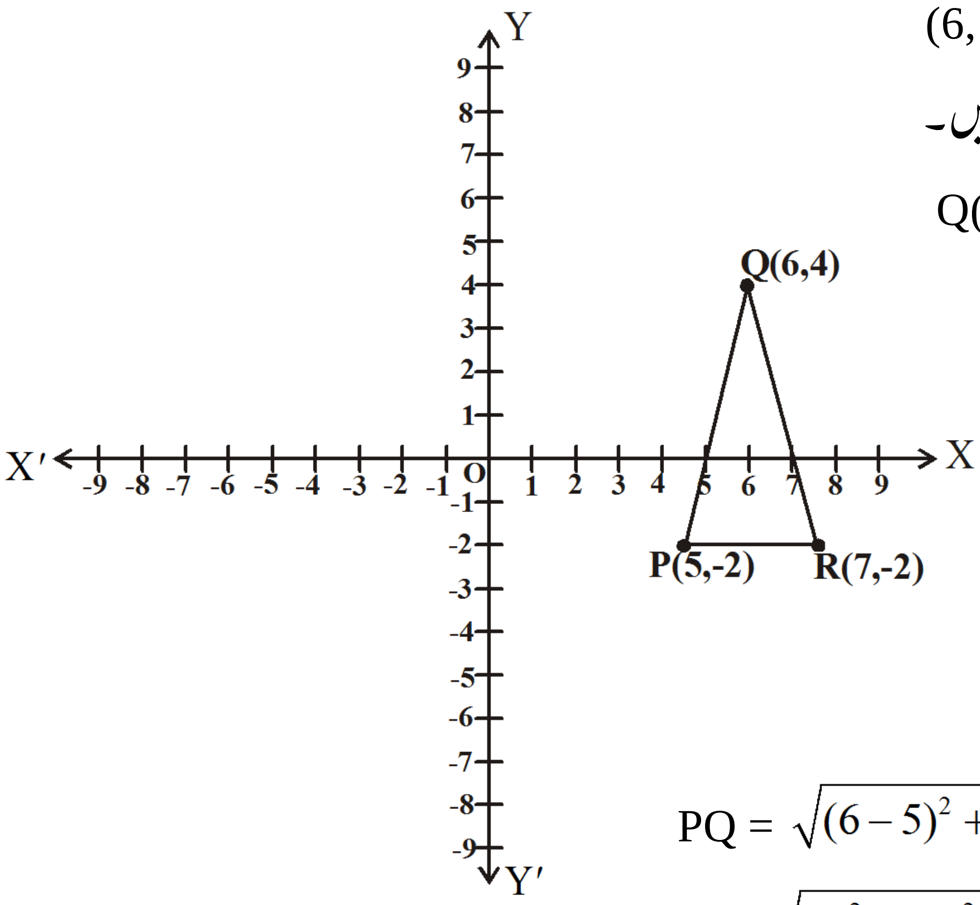
$$\sqrt{(8-4)^2 + (6-3)^2}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$AB = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$AB = 5$ اکائیاں

مثال-2: جانچ کیجئے کہ آیا نقاط $(5, -2)$، $(6, 4)$ اور $(7, -2)$ مثلث مساوی الساقین کے راس ہیں۔



حل: فرض کرو کہ نقاط $P(5, -2)$، $Q(6, 4)$ اور $R(7, -2)$ ہیں۔

دو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کے لئے فاصلے کا ضابطہ ہے

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اس ضابطے کو استعمال کرتے ہوئے ہم PQ، QR اور PR معلوم کریں گے۔

$$PQ = \sqrt{(6-5)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(1)^2 + (4+2)^2}$$

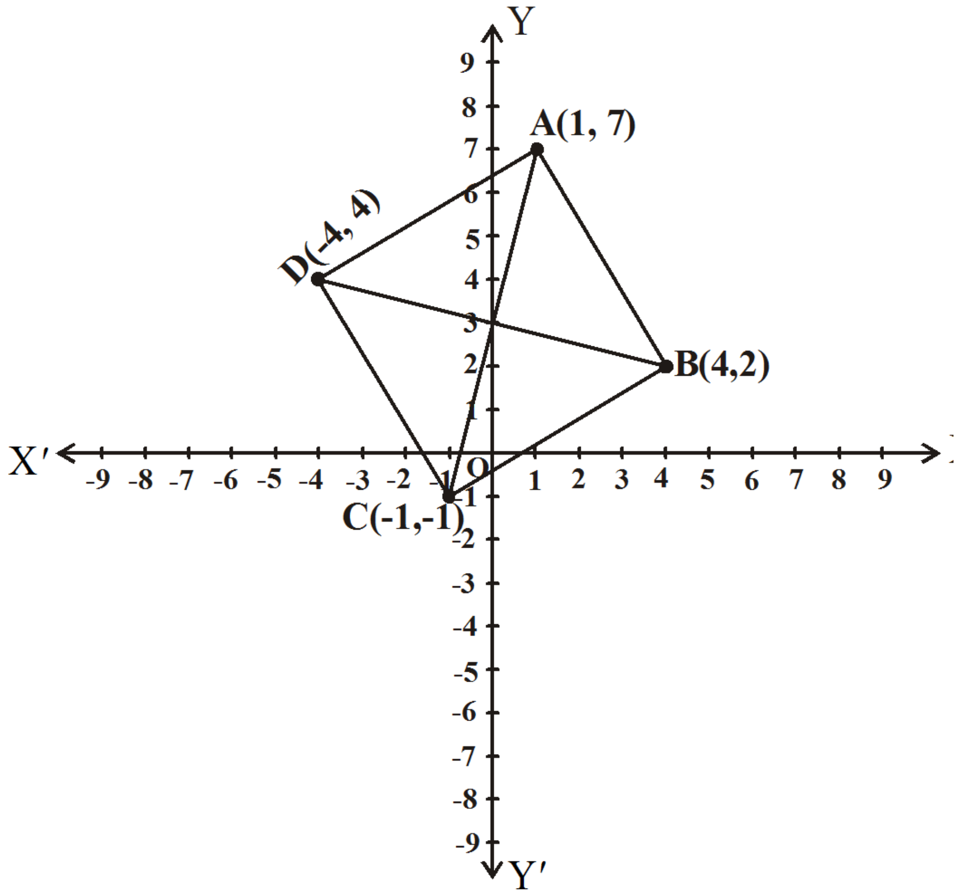
$$= \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$QR = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$PR = \sqrt{(7-5)^2+(-2(-21)^2} = \sqrt{(2)^2+(-2+2)^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

$PQ = QR = \sqrt{37}$ اکائیاں اور $PR = 2$ اکائیاں



ΔPQR ایک مساوی الساقین مثلث ہے

اور (5, -2)، (6, 4)، (7, -2) ایک مساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

مثال-3: ثابت کیجئے کہ نقاط (1, 7)، (4, 2)، $(-1, -1)$ اور $(-4, 4)$ ایک مربع کے راس ہیں۔

حل: فرض کرو کہ دیئے گئے نقاط $A(1, 7)$، $B(4, 2)$، $C(-1, -1)$ اور $D(-4, 4)$ ہیں۔

ABCD ایک مربع ہے اس کو ثابت کرنے کا ایک طریقہ یہ ہوگا کہ اس کے تمام اضلاع مساوی ہوں اور اس کے وتر بھی ایک دوسرے کے مساوی ہوں۔ اب

اضلاع کے طول

$$AB = \sqrt{(4-1)^2+(2-7)^2} = \sqrt{(3)^2+(-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(-1-4)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-4-(-1))^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{(-4+1)^2+(4+1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1-(-4))^2+(7-4)^2} = \sqrt{(1+4)^2+(3)^2} = \sqrt{(5)^2+(3)^2}$$

$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

اس طرح وتر کے طول ہوں گے۔

$$AC = \sqrt{(-1-1)^2+(-1-7)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-8)^2}$$

$$= \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(-4-4)^2+(4-2)^2} = \sqrt{(-8)^2+(2)^2}$$
$$= \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

چوں کہ $AB = BC = CD = DA$ اور $AC = BD$

اس لئے چار ضلعی ABCD کے تمام چار اضلاع اور اس کے وتر AC اور BD بھی مساوی ہیں۔

اس لئے ABCD ایک مربع ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے - 2

.1 دیئے گئے نقاط کے جوڑ کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

(i) (4, 1) اور (2, 3)

(ii) (3, 2) اور (−2, −3)

.2 نقاط (3, 2)، (−2, −3) اور (2, 3) کونسا مثلث بناتے ہیں؟

.3 ثابت کیجئے کہ نقاط (-4, -7)، (-1, 2)، (8, 5) اور (5, -4) ترتیب میں لینے پر ایک معین کے راس ہیں۔

.4 اس دائرے کا نصف قطر معلوم کیجئے جس کا مرکز (3, 2) اور (-5, 6) سے گزرتا ہے۔

(اشارہ: دیئے گئے نقاط کے لیے فاصلے کا ضابطہ)

.5 جانچ کیجئے کہ آیا نقاط (1, 5)، (2, 3) اور (−2, -1) ہم خط ہیں یا نہیں۔

ہم خط نقاط

ایک ہی خط پر پائے جانے والے نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

A، B اور C ہم خط ہیں۔

اس لئے اس کو اس طرح لکھا جاتا ہے $AB + BC = AC$

مثال-4: ثابت کیجئے کہ نقاط A(4, 2)، B(7, 5) اور C(9, 7) ایک ہی خط پر پائے جاتے ہیں۔

حل: آیئے AB، BC اور AC کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

فاصلے کا ضابطہ $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

اس لئے $AB = \sqrt{(7-4)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$$= \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2} \text{ units}$$

$$BC = \sqrt{(9-7)^2+(7-5)^2} = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2} \text{ units}$$

$$AC = \sqrt{(9-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{(5)^2+(5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$= \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2} \text{ units}$$

اب $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC.$

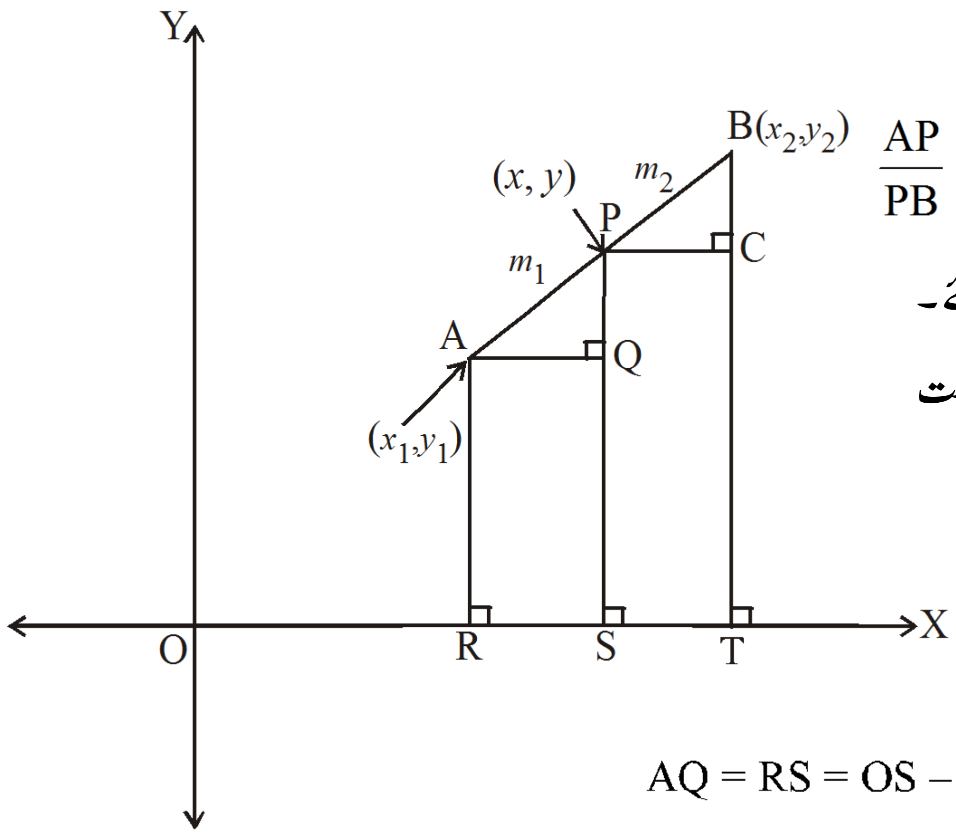
اس لئے تین نقاط $(4, 2)$، $(7, 5)$ اور $(9, 7)$ تین ایک ہی خط پر پائے جاتے ہیں۔

4.10.4 نسبت میں تقسیم کرنے کا ضابطہ

فرض کیجئے کوئی دو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$

کو ملانے والے نقطے $P(x, y)$ داخلاً $m_1 : m_2$ کو نسبت میں

تقسیم کرتا ہے۔



اس لئے $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ......(1)

X۔محور پر AR، PS اور BT محور کھینچیے۔

AQ اور PC، X۔محور پر متوازی کے تحت

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

اس طرح

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad ......(2)$$

اب $AQ = RS = OS - OR = x - x_1$

$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$

$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$

$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y.$

ان تمام قدروں کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

اس طرح $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ لینے پر $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ حاصل ہوگا

اس طرح $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$, لینے پر

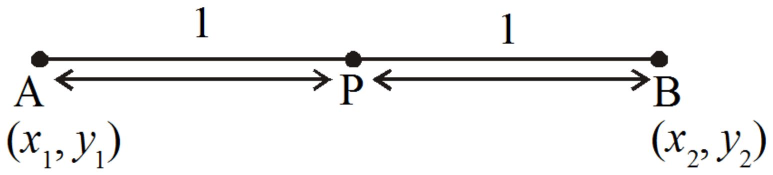
$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

اس لیے $p(x, y)$ کے تحت مختصات خطی قطعہ AB کو داخلاً $m_1 : m_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جب کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ ہوں

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$$ جہاں $m_1 + m_2 \neq 0.$

وسطی نقطہ

خطی قطعہ کا وسطی نقطہ خطی قطعہ کو 1:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے' اس لئے نقطہ P کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔ نسبت میں تقسیم کے ضابطہ Section Formula پر مبنی وسطی نقطہ پر غور کیجئے۔



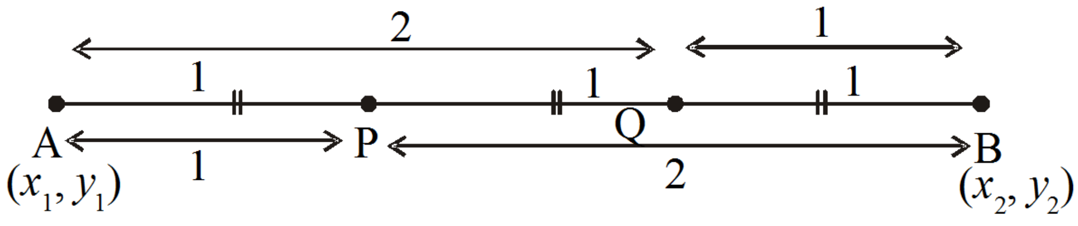
خطی قطعہ کو وسطی نقطہ 'P' اس کو 1:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

اس لئے نقطہ P کے مختصات جو نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ ہے

$$\Rightarrow \left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1+1}, \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1+1}\right) \Rightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

تثلیث کے نقاط Points of trisection

خطی قطعہ کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرنے والے نقاط خط کے نقاط' تثلیث کہلاتے ہیں۔



نقاط P اور Q دراصل $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ سے بننے والے خطی قطعہ AB کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ اس لئے P خطی قطعہ AB کو 1:2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ اس طرح خطی قطعہ AB کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

چناں چہ ایسے دو نقاط جو ایک خطی قطعہ کو 1:2 اور 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں، نقاط تثلیث کہلاتے ہیں۔

تقسیم کے ضابطہ (Section formula) کے ذریعہ

P کے مختصات $$P = \left(\frac{1.x_2 + 2.x_1}{1+2}, \frac{1.y_2 + 2.y_1}{1+2}\right)$$

$$\therefore\ P = \left(\frac{x_2 + 2x_1}{3}, \frac{y_2 + 2y_1}{3}\right)$$

نقطہ Q کے مختصات $$Q = \left(\frac{2x_2 + x_1}{2+1}, \frac{2y_2 + y_1}{2+1}\right)$$

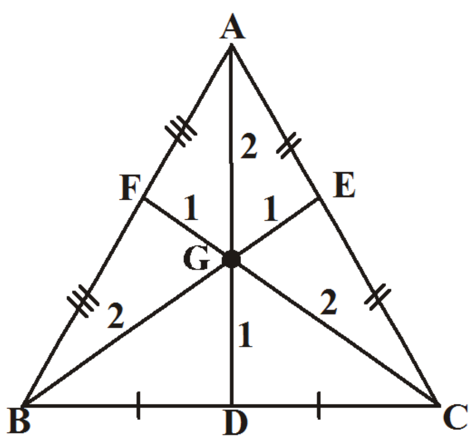
$$= \left(\frac{2x_2 + x_1}{3}, \frac{2y_2 + y_1}{3}\right)$$

مثلث کا مرکز وسطانی Centroid of triangle

مثلث ABC میں نقاط D، E اور F اضلاع ترتیب وار BC، AC اور AB کے وسطی نقاط ہیں۔

نقطہ A اور BC کے وسطی نقطہ کو ملانے والے خطی قطعہ AD کو وسطانیہ کہا جاتا ہے۔اسی طرح BE اور CF وسطانیہ ہیں۔

مثلث کا مرکز وسطانیہ وہ نقطہ ہے جہاں پر مثلث کے تینوں وسطانیہ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔



مرکز وسطانیہ 'G' تینوں وسطانیہ کو 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

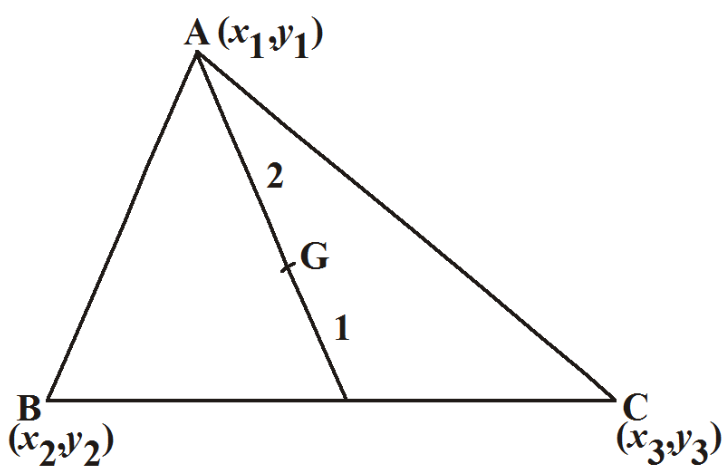
$\therefore\ AG : GD = 2 : 1$

اس طرح $CG : GF = 2 : 1$ اور $GE = 2 : 1$

فرض کرو کہ $A(x_1, y_1)$، $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ ایک مثلث ABC کے راس ہیں۔اس مثلث کے مرکز وسطانی کے مختصات ہم کیسے حاصل کر سکتے ہیں؟

فرض کرو کہ AD وسطانیہ ہے جو قاعدہ BC کا ناصف ہے۔ تب

$$D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$



نقطہ G خط AD کو داخلاً 2:1 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو کہ مثلث کا مرکز وسطانی ہے۔ اگر (x, y)، نقطہ G کے مختصات ہیں۔

$$G(x, y) = \left[\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1(x_1)}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1.(y_1)}{2+1}\right]$$

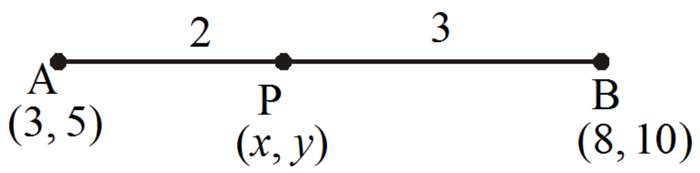
$$G = \left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

اس طرح مرکز وسطانی کے مختصات ہیں

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

مثال-5: اس نقطہ کے مختصات معلوم کیجیے جو نقاط (3, 5) اور (8, 10) کو ملانے والے خط کو 2:3 کی نسبت میں داخلاً تقسیم کرتا ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ $P(x, y)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔ نسبت میں تقسیم کا ضابطہ کی مدد سے



$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

$$x = \frac{2(8)+3(3)}{2+3} = \frac{16+9}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$y = \frac{2(10)+3(5)}{2+3} = \frac{20+15}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$P(x, y) = (5, 7)$ جو کہ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال-6: فرض کرو کہ نقطہ $M(x, y)$، نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کرو کہ نقطہ $M(x, y)$، نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) کو ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ ہے۔

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

نقاط (2, 7) اور (12, −7) کو ملانے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ

$$M(x, y) = \left(\frac{2+12}{2}, \frac{7+(-7)}{2}\right) = \left(\frac{14}{2}, \frac{0}{2}\right)$$

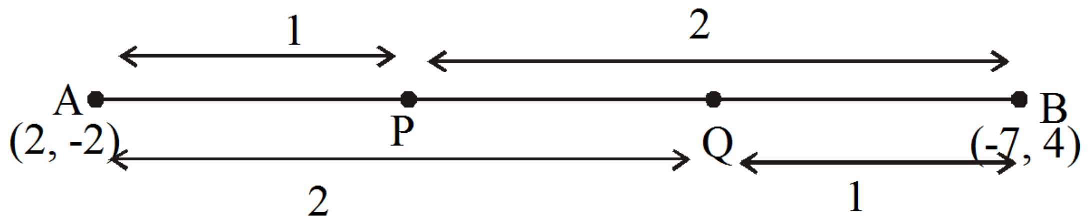
$$M(x, y) = (7, 0).$$

مثال-7: نقاط (2, -2)A اور (4 ,7−)B کوملانے والے خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ P اور Q، خطی قطعہ AB کے نقاط تثلیث ہیں۔

یعنی $AP = PQ = QB$

(شکل دیکھئے)



اس لئے P، خط AB کوداخلاً

1:2 کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

لہٰذا P کے مختصات

(تقسیم کے ضابطہ کی مدد سے)

$$P(x, y) = \left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{1(-7) + 2(2)}{1 + 2}, \frac{1(4) + 2(-2)}{1 + 2}\right)$$

$$P(x, y) = \left(\frac{-7 + 4}{3}, \frac{4 - 4}{3}\right) = \left(\frac{-3}{3}, \frac{0}{3}\right) = (-1, 0)$$

اب نقطہ Q، خط AB کوداخلاً 2:1 میں تقسیم کرتا ہے۔اس طرح کے مختصات ہیں

$$= \left(\frac{2(-7) + 1(2)}{2 + 1}, \frac{2(4) + 1(-2)}{2 + 1}\right)$$

یعنی $$= \left(\frac{-14 + 2}{3}, \frac{8 - 2}{3}\right) = \left(\frac{-12}{3}, \frac{6}{3}\right) = (-4, 2)$$

اس طرح نقاط تثلیث کے مختصات $P(-1, 0)$ اور $Q(-4, 2)$ ہیں۔

مثال-8: مثلث کے راس $(-4, 6)$، $(2, -2)$ اور $(2, 5)$ ہیں۔اس کا مرکز وسطانی معلوم کیجئے۔

حل: مرکز وسطانی کے مختصات ہیں

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

چناں چہ راس $(-4, 6)$، $(2, -2)$ اور $(2, 5)$ کا مرکز وسطانی ہوگی۔

$$\left(\frac{-4 + 2 + 2}{3}, \frac{6 + (-2) + 5}{3}\right) = \left(\frac{0}{3}, \frac{9}{3}\right) = (0, 3)$$

مرکز وسطانی $(0, 3)$ ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے - 3

1. اس نقطے کے مختصات معلوم کیجئے جونقاط $(1, 7)$ اور $(4, -3)$ سے بننے والے خط کو داخلاً $2:3$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔
2. نقاط $(4, -1)$ اور $(-2, -3)$ کو ملانے والے خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجئے۔
3. نقاط $(3, 0)$ اور $(-1, 4)$ سے بننے والے خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجئے۔
4. اس مثلث کا مرکز وسطانی معلوم کیجئے جس کے راس $(-1, 3)$، $(6, -3)$ اور $(-3, 6)$ ہیں۔

مشق

1. جانچ کیجئے کہ آیا نقاط $(3, 1)$، $(6, 4)$ اور $(8, 6)$ ہم خط ہیں یا نہیں؟

   [**اشارہ:** اگر A، B اور C ہم خط ہیں تب $AB + BC = AC$]
2. ثابت کیجئے کہ نقاط $(-7, -3)$، $(5, 10)$، $(15, 8)$ اور $(3, -5)$ ترتیب وار لینے پر ایک متوازی الاضلاع کے راس ہیں۔

   [**اشارہ:** متوازی الاضلاع ABCD میں اضلاع $BC = AD$، $AB = CD$ اور وتر $AC \neq BD$]
3. اس نقطے کے مختصات معلوم کیجئے جونقاط $(-6, 0)$ اور $(3, -8)$ سے بننے والے خط کو $2:7$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

   [**اشارہ:** نسبت میں تقسیم کا ضابطہ]
4. نقاط $(2, 6)$ اور $(-4, 8)$ سے بننوالے خط کے نقاط تثلیث معلوم کیجئے۔

   [**اشارہ:** نقاط P اور Q معلوم کیجئے جو خطی قطعہ AB کو داخلاً $1:2$ اور $2:1$ کی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں۔
5. ثابت کیجئے کہ نقاط $A(a, 0)$، $B(-a, 0)$ اور $C(0, a\sqrt{3})$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

   [**اشارہ:** فاصلہ کا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے AB، BC اور AC معلوم کیجئے اور بتایئے کہ $AB = BC = CA$]
6. نقاط $(3, 2)$ اور $(-5, 6)$ سے بننے والے خط کا وسطی نقطہ معلوم کیجئے۔

   [**اشارہ:** وسطی نقطہ کا ضابطہ کی مدد سے]
7. مثلث کا مرکز وسطانی 6 کے مختصات معلوم کیجئے جس کے راس $(-1, 3)$، $(6, -3)$ اور $(-3, 6)$ ہیں۔

   [**اشارہ:** مرکز وسطانی کا ضابطہ استعمال کرتے ہوئے]
8. رادھا کا کہنا ہے کہ مبدے $(0, 0)$ سے نقطہ $P(x, y)$ کا فاصلہ $\sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ آپ رادھا سے متفق ہیں یا نہیں؟ کیوں؟
9. نقاط $(-4, 0)$، $(4, 0)$ اور $(0,3)$ کونسا مثلث بناتے ہیں؟

   [**اشارہ:** AB، BC اور AC کے طول معلوم کیجئے]
10. دیئے گئے نقاط $(\sin\theta, \cos\theta)$ اور $(-\cos\theta, \sin\theta)$ کا درمیانی فاصلہ کیا ہوگا؟

    [**اشارہ:** فاصلے کے ضابطہ کی مدد سے اور $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ بھی استعمال کریں]

11. ایک دائرے کے قطر کے سرے کے نقاط $(2, 5)$ اور $(-4, 1)$ ہیں۔دائرے کا مرکز معلوم کیجئے۔
[**اشارہ:** وسطی نقطہ کا ضابطہ کا استعمال کریں]

12. نقاط $Q(-3, b)$ اور $R(1, b + 4)$ سے بننے والے خطی قطعہ کا وسطی نقطہ $P(-1, 1)$ ہے تب b کی قدر کیا ہوگی؟
[**اشارہ:** QR کا وسطی نقطہ معلوم کرتے ہوئے اسے P کے ساتھ مساوی کریں]

13. نقاط $(4, 0)$ اور $(0, x)$ کا درمیانی فاصلہ 5 اکائیاں ہے، تب x کی قدر ہوگی [ ]
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

14. نقطہ $A(4, -3)$ کا مبدے سے فاصلہ [ ]
(A) 1 اکائی (B) 7 اکائیاں (C) 5 اکائیاں (D) 3 اکائیاں

15. اس مثلث کا مرکز وسطانی جس کے راس $(7, 5)$، $(5, 7)$ اور $(-3, 3)$ ہیں [ ]
(A) $(3, -5)$ (B) $(-3, 5)$ (C) $(-3, -5)$ (D) $(3, 5)$

16. کوئی دو نقاط $(6, 0)$ اور $(0, 8)$ ہیں۔وسطی نقطے کے مختصات ہوں گے [ ]
(A) $(3, 4)$ (B) $(6, 8)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(4, 3)$

ہم نے کیا سیکھا

- دو حوالوں کی مدد سے ایک نقطے کے اظہار سے ریاضی کو ایک نئی شاخ کو فروغ حاصل ہوا جس کو تحلیلی جیومٹری کا نام دیا گیا ہے۔
- X۔محور XX' اور Y۔محور YY' جہاں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اسے مبدا کہا جاتا ہے اور اسے 'O' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ 'O' کے مختصات $(0, 0)$ ہیں۔
- چار ارباع کو Q_1، Q_2، Q_3 اور Q_4 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- نقاط $(x_1, 0)$ اور $(x_2, 0)$ کا درمیانی فاصلہ $|x_2 - x_1|$ اکائیاں ہوگا۔ علاوہ ازیں $(0, y_1)$ اور $(0, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $|y_2 - y_1|$ اکائیاں ہوگا۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کا درمیانی فاصلہ $(x_2, x_1)^2 + (y_2, y_1)^2$ کا جذرالمربع ہوگا۔
- ایک ہی خط پر پائے جانے والے نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ سے بننے والے خط کو داخلاً $m_1 : m_2$ کی نسبت میں قطع کرنے والے نقطے $P(x, y)$ کے مختصات $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$ ہوں گے جہاں $m_1 + m_2 = 0$
- ایک خطی قطعہ کو 1:1 کی نسبت میں قطع کرنے والے نقطے کو وسطی نقطہ کہا جاتا ہے۔
- نقاط $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ اور $C(x_3, y_3)$ مثلث ABC کے راس ہیں تب مرکز وسطانی کے مختصات $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ ہوں گے۔

اکائی 5 مساحت

سبق 5.1

مستوی اشکال کے رقبے، احاطہ

Area Perimeter of Plane figures

5.1.0 اکتسابی مقاصد

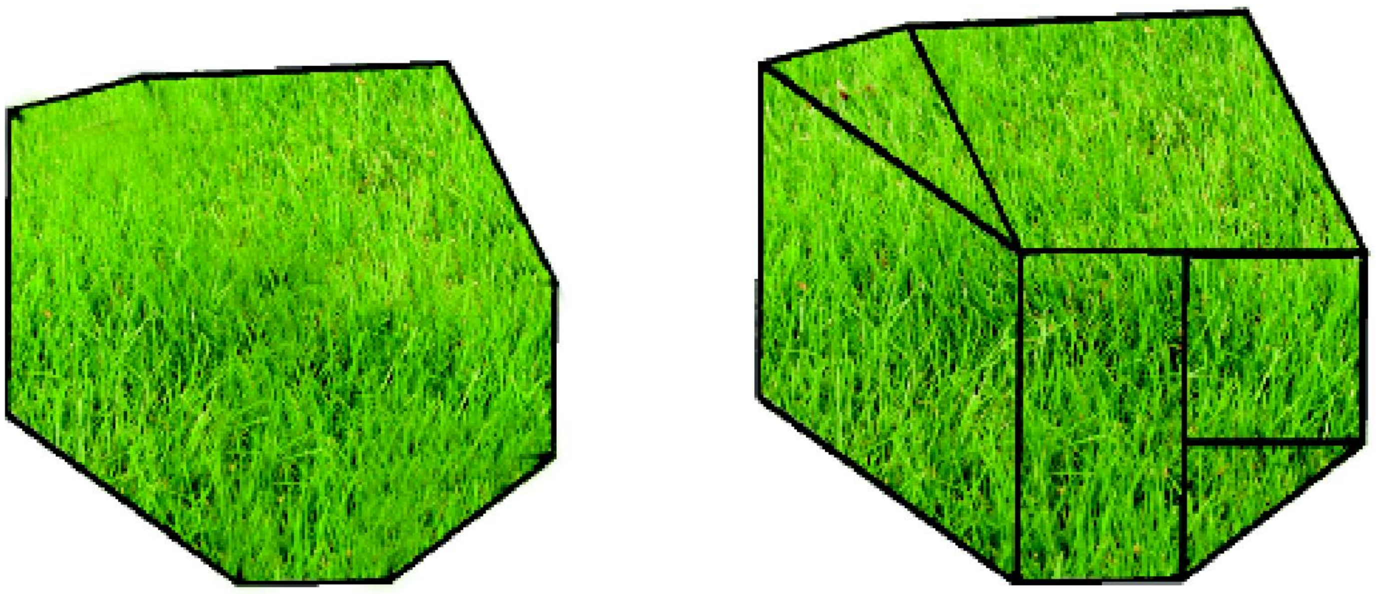
اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- مستوی اشکال کے رقبوں کے سوالات حل کریں گے۔
- فیلڈ (Field) کا رقبہ، مستطیلی راستے اور حلقہ کا رقبہ کو سمجھ پائیں گے اور حل کریں گے۔
- مستوی اشکال میں استعمال ہونے والے ضابطہ کے حروف کو سمجھائیں گے۔
- مستوی اشکال کے رقبے کی ضرورت کی نشاندہی کریں گے۔

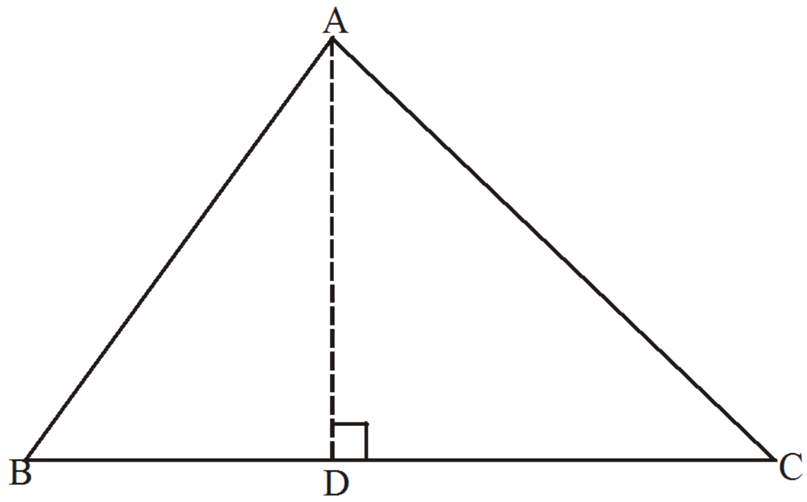
5.1.1 تعارف

آصف اپنی زراعتی زمین کا رقبہ معلوم کرنا چاہتا ہے جو بے ترتیب (شکل-1) شکل میں ہے۔ اُس نے اپنی زمین کو باقاعدہ اشکال جیسے مثلثات، متوازی الاضلاع اور مربع (شکل-2) میں تقسیم کیا۔ اُس نے سوچا کہ "ہر شکل کا رقبہ معلوم ہو تو میری زمین کا رقبہ معلوم ہوگا۔"

مشاہدہ کیجئے کہ شکل (i) بے قاعدہ شکل ہے لیکن شکل (ii) میں زمین کو 2 مثلثات، 2 متوازی الاضلاع، ایک مستطیل اور ایک مربع میں تقسیم کیا گیا ہے۔ اگر ہم ان 6 جیومٹری اشکال کا رقبہ معلوم کریں اور ان کے رقبوں کو جمع کریں تب ہمیں زمین کا رقبہ حاصل ہوگا۔ احاطہ، شکل کے اطراف کا طول اور رقبہ، شکل کے سطح کا حصہ ہے۔ احاطہ اور رقبہ، روزہ زندگی میں استعمال ہوتا ہے۔



(i) (ii)

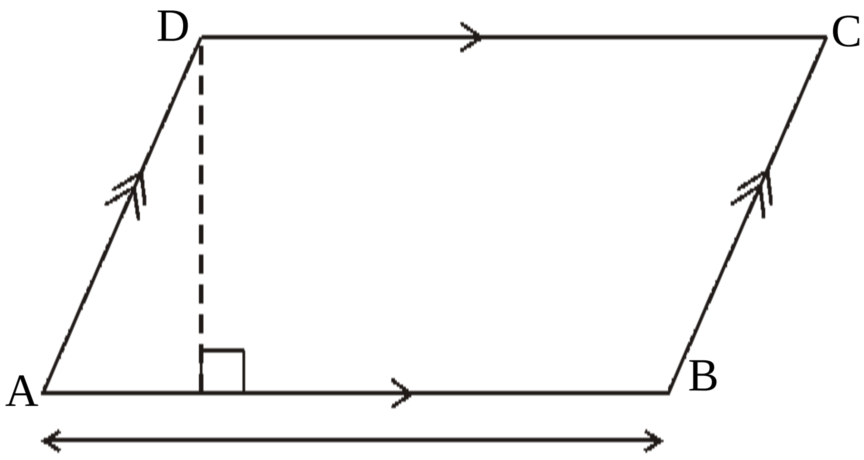


مثلث کا رقبہ اس کے قاعدہ (b) اور بلندی (b) کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

یعنی $A = \frac{1}{2}bh$

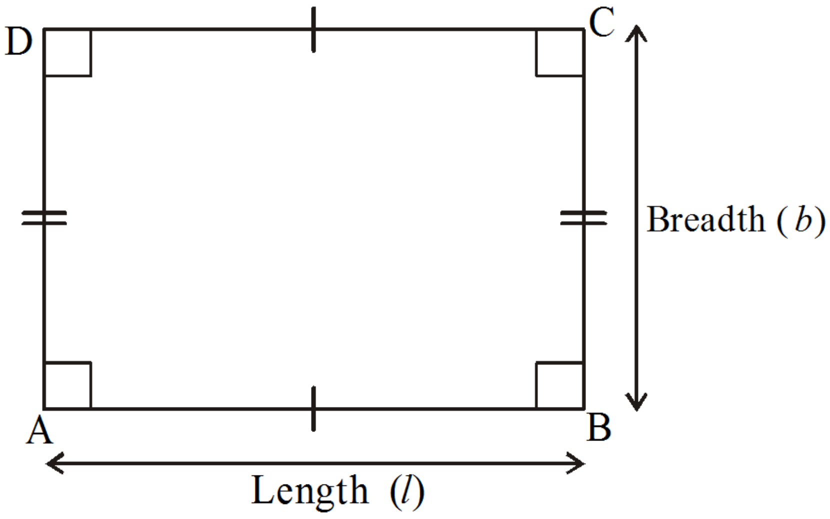
کسی بھی نقطہ سے مقابل کے ضلع پر گرائے جانے والا عمود، مثلث کا ارتفاع (بلندی) کہلاتا ہے۔

یہاں DABC میں $AD \perp BC$، مثلث ABC کی بلندی ہے۔



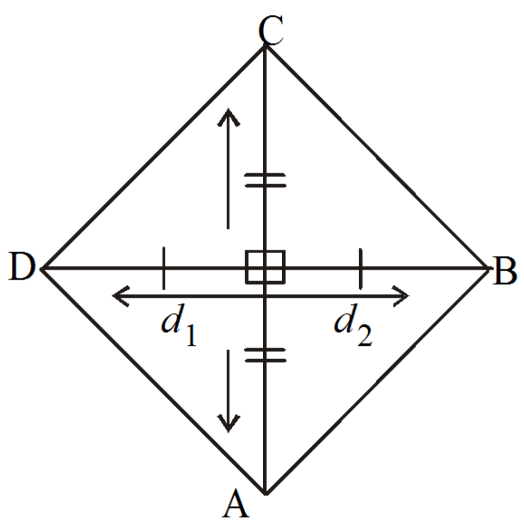
متوازی الاضلاع کا رقبہ، قاعدہ اور متصلہ ضلع کے (بلندی) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

$A = bh$



مستطیل کا رقبہ طول (l) اور عرض (b) کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

$A = lb$



معین کا رقبہ کے وتروں کے حاصل ضرب کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

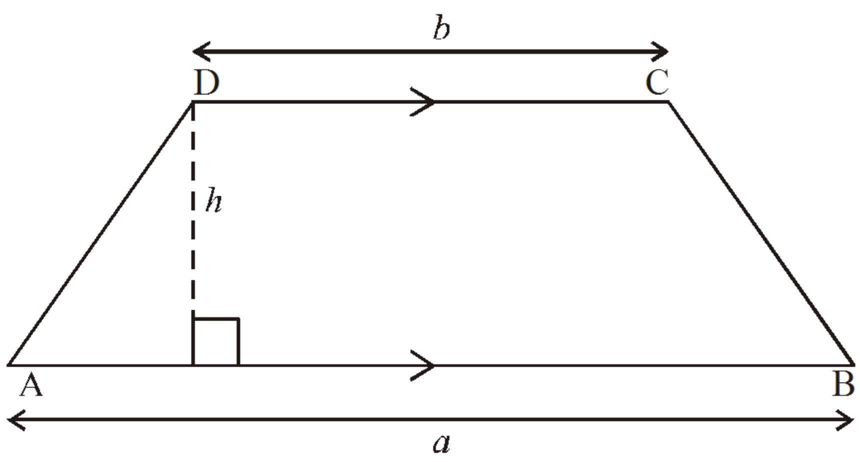
$A = \frac{1}{2}d_1d_2$

(جہاں d_1، d_2 وتر کی لمبائی ہے)

منحرف کا رقبہ، دو متوازی ضلع کا درمیانی فاصلہ اور دو متوازی ضلع کے مجموعہ کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

$A = \frac{1}{2} \times$ (دو ضلعوں کا درمیانی فاصلہ) x (دو ضلعوں کا حاصل جمع)

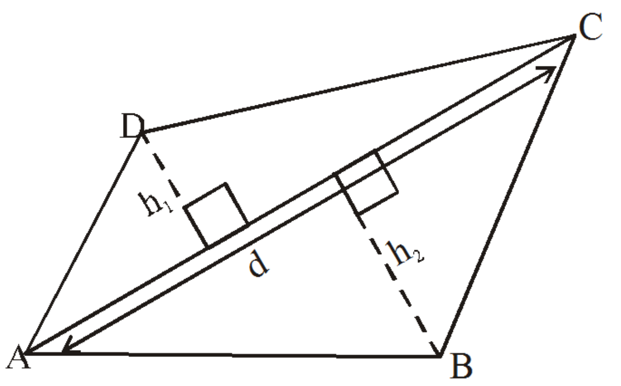
$A = \frac{1}{2} \times h(a+b)$ (جہاں a، b کو ضلعوں کے طول ہیں)



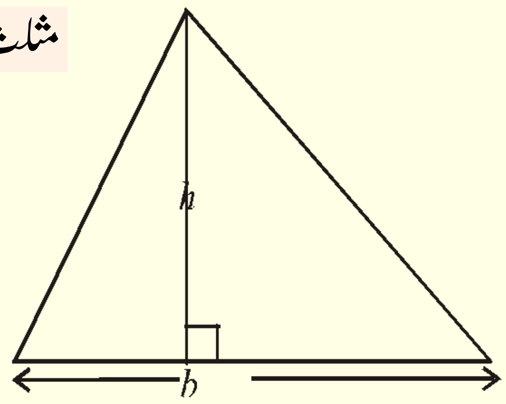
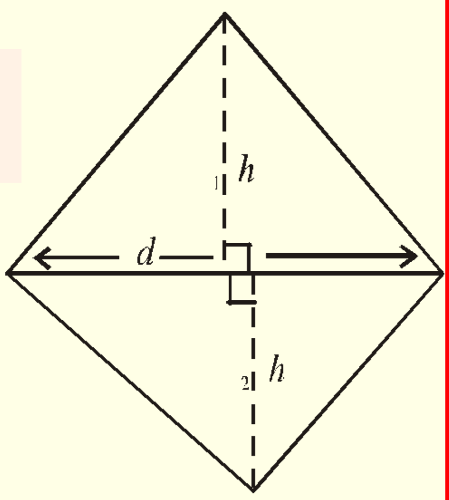
چار ضلعی کا رقبہ، وتر کے طول اور وتر کے عمودوں کے طول کا مجموعہ کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

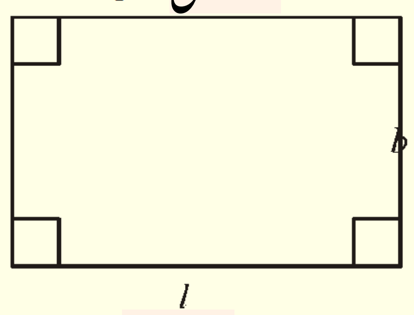
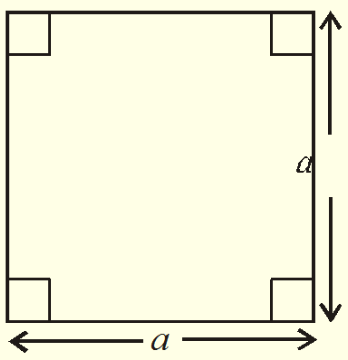
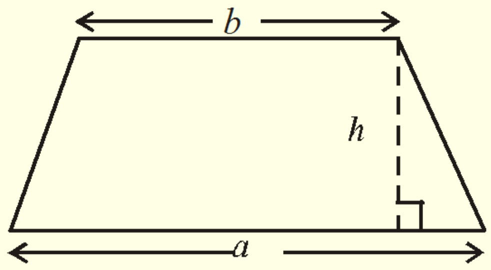
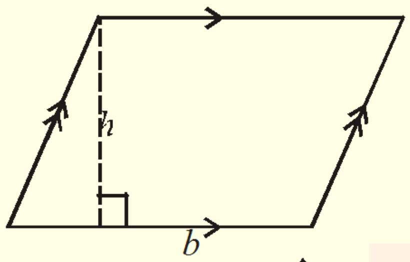
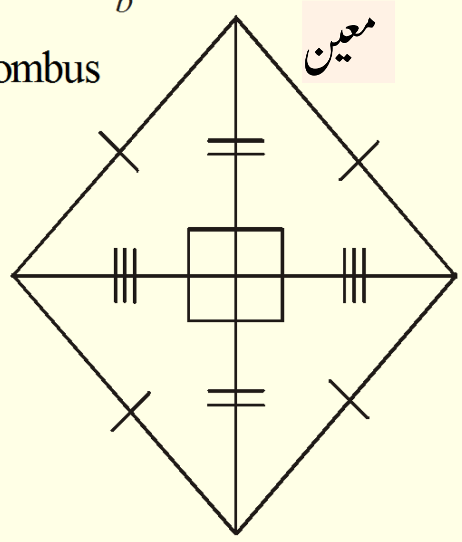
چار ضلعی کا رقبہ $= \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$

(جہاں 'd' وتر یعنی AC کا طول اور h_1، h_2 وتر AC پر گرائے گئے عمود کا طول)



ہم نے کیا گفتگو کی

شکل	رقبہ کا ضابطہ	وضاحت
1. مثلث 	$A = \frac{1}{2}bh$	h = بلندی b = قاعدہ
2. چار ضلعی 	$A \quad \frac{1}{2}b[h_1 \quad h_2]$	d = وتر کی لمبائی h_1 = وتر پر گرائے گئے عمود کا طول h_2 = وتر پر گرائے گئے عمود کا طول

3. Rectangle مستطیل 	$A = lb$	$l =$ طول $b =$ عرض $a =$ ضلع کا طول
4. Square مربع 	$A = a^2$	$a –$ ضلع کا طول
5. Trapezium منحرف 	$A \quad \frac{h}{2}[a \quad b]$	$a, b =$ متوازی ضلعوں کے طول $h,$ - (متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ)
6. Parallelogram متوازی الاضلاع 	$A = bh$	b - بلندی $h=$ متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ $a =$ ضلع کا طول
7. Rhombus معین 	$A \quad \frac{1}{2} d_1 d_2$	d_1 وتروں کا طول d_2

مثال-1: ایک مستطیل کا طول اور عرض بالترتیب 6 میٹر اور 4 میٹر ہے۔ مستطیل کا رقبہ اور احاطہ معلوم کیجیے۔

حل: مستطیل کا طول (l) = 6 میٹر

مستطیل کا عرض (b) = 4 میٹر

رقبہ (A) = طول × عرض

= 4 × 6 = 24 مربع میٹر

احاطہ (P) = $2(l + b)$

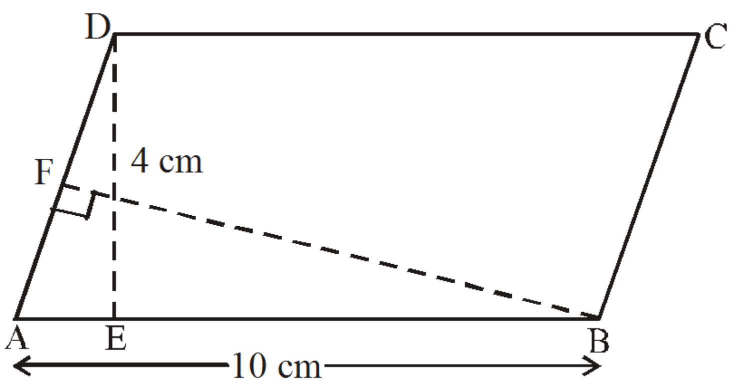
= $2(6 + 4)$

= 2×10

= 20 میٹر

مثال-2: متوازی الاضلاع ABCD میں AB = 10 سم اور DE = 4 سم معلوم کیجیے۔

(i) ABCD کا رقبہ (ii) BF کا طول معلوم کیجیے اگر AD = 5 سم ہو۔



حل: (i) قاعدہ (b) = 10 سم

بلندی (h) = 4 سم

ABCD کا رقبہ = bh

10 x 4 = 40 مربع سم

(ii) BF کا طول = ؟

فرض کیجیے کہ BF = h جب کہ AD = h = 4 سم دیا گیا ہے تب

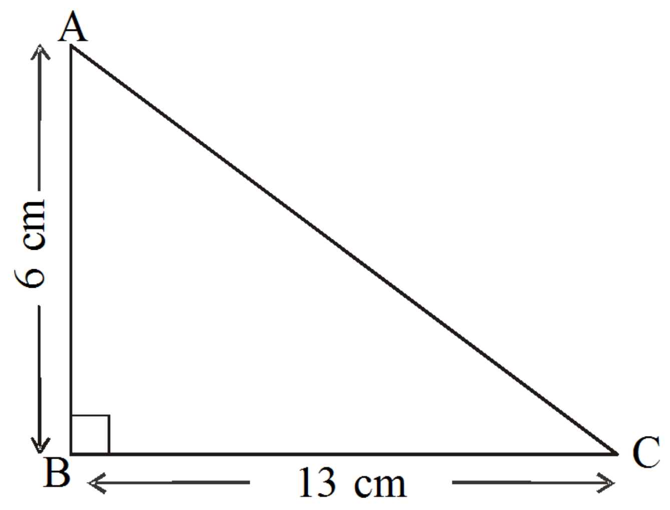
ABCD کا رقبہ یعنی رقبہ (A) = 40 مربع سم

$$A = bh$$

$$40 = 5 \times BF$$

$$\Rightarrow BF = \frac{40}{4} = 10 \text{ cm}$$

مثال-3: ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: مثلث کا قاعدہ (b) = 13 سم

مثلث کی بلندی (h) = 6 سم

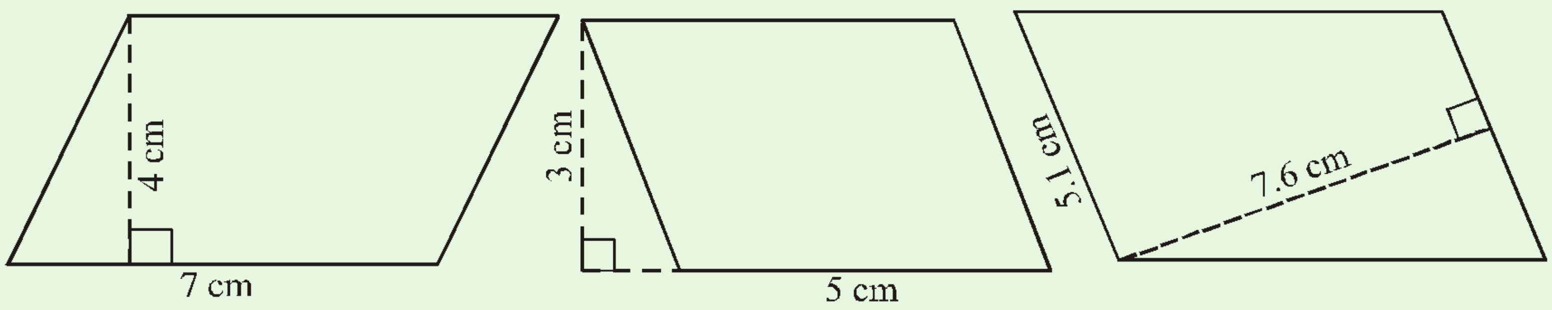
مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2} bh$

= $\frac{1}{2} \times 13 \times 6$

= 13 x 3 = 39 مربع سم

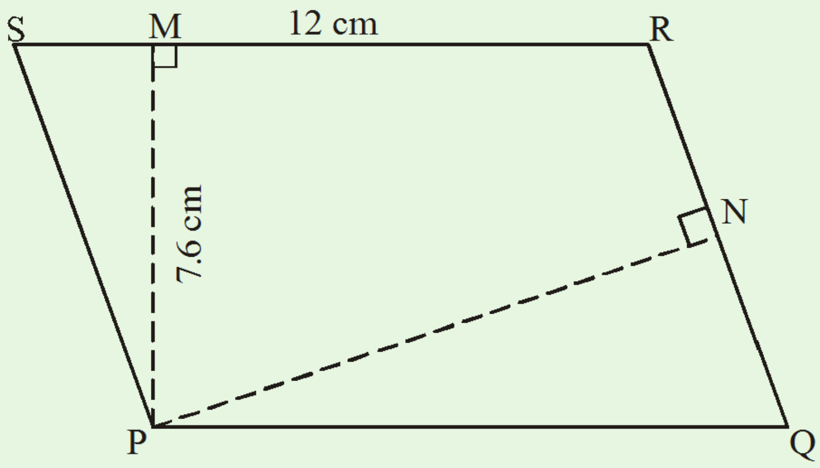
اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. ذیل کے متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔



2. ایک متوازی الاضلاع کی بلندی، اس کے قاعدہ کی تہائی ہے۔ اگر متوازی الاضلاع کا رقبہ 192 مربع سمر ہو تو بلندی اور قاعدہ معلوم کیجیے۔

3. ایک مربع اور متوازی الاضلاع کے رقبے مساوی ہیں۔ اگر مربع کا ضلع 40 میٹر اور متوازی الاضلاع کی بلندی 20 میٹر ہے تب متوازی الاضلاع کا قاعدہ معلوم کیجیے۔



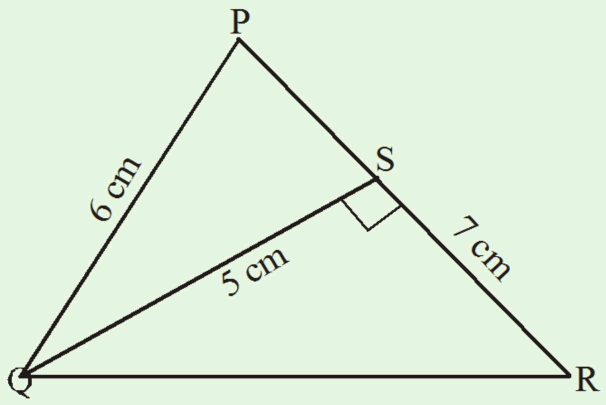
4. شکل میں PQRS ایک متوازی اضلاع ہے۔

نقطہ P سے QR پر گرائی گئی بلندی PM ہے۔

اگر SR = 12cm اور PM = 7cm

(i) PQRS متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(ii) PN معلوم کیجیے اگر QR = 8cm



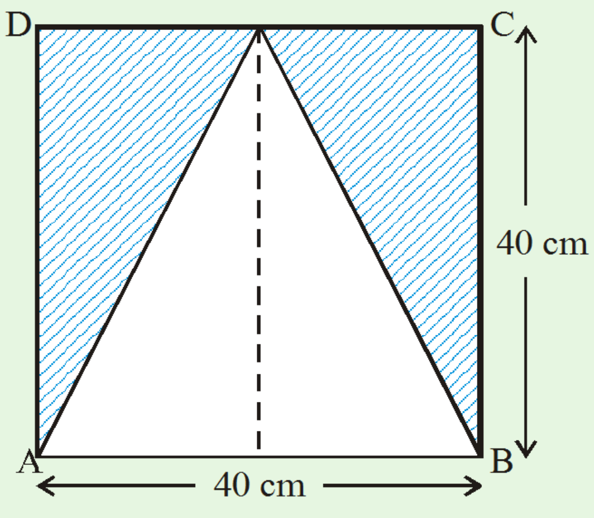
5. ایک متوازی الاضلاع کی بلندی 6 سمر ہے اور اس کا رقبہ، بلندی کا دگنا ہے تب متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔

6. رامو نے کہا کہ ΔPQR کا رقبہ

$A = \frac{1}{2} \times 7 \times 5$ مربع سمر

گوپی نے کہ $A = \frac{1}{2} \times 8 \times 5$ مربع سمر

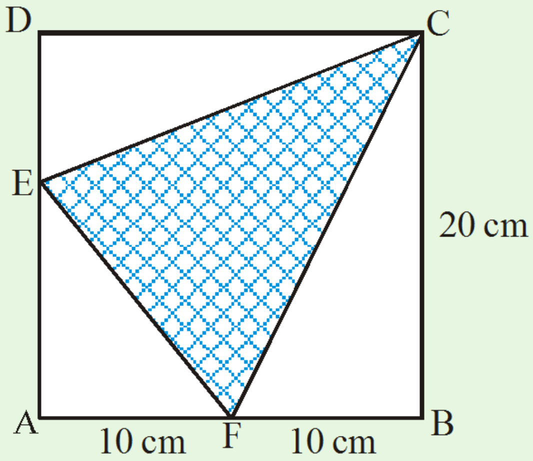
بتایئے دونوں میں کس کا بیان صحیح ہے۔



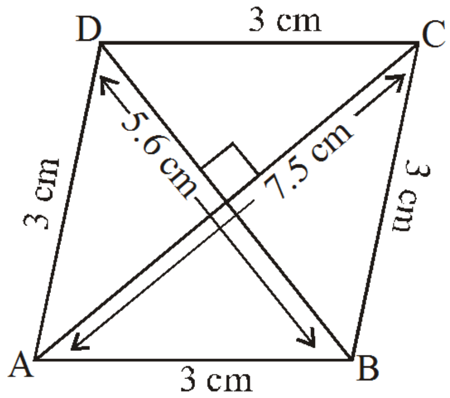
7. شکل ABCD میں سایہ دار شکل کا رقبہ معلوم کیجیے۔

اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. ذیل کے متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کیجیے۔



مثال-4: معین ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل: وتر d_1 کا طول = 7.5 سمر

وتر d_2 کا طول = 5.6 سمر

$\therefore$ معین کا رقبہ = $A = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 5.6$

= 21 مربع سمر

معین ABCD کا رقبہ = 21 مربع سمر

مثال-5: ایک منحرف کا رقبہ 480 مربع سمر ہے۔ ایک متوازی ضلع کا طول 24 سمر اور دو متوازی ضلعوں کا درمیانی فاصلہ 8 سمر ہے۔ دوسرا متوازی ضلع کا طول معلوم کیجیے۔

حل: ایک متوازی ضلع کا طول = 24 سمر

دوسرے متوازی ضلع کا طول = x سمر

رقبہ = 480 مربع سمر

دو متوازی ضلعوں درمیانی فاصلہ = 8 سمر

منحرف کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times (a + b) \times h$

$$480 = \frac{1}{2} \times (24 + x) \times 8$$

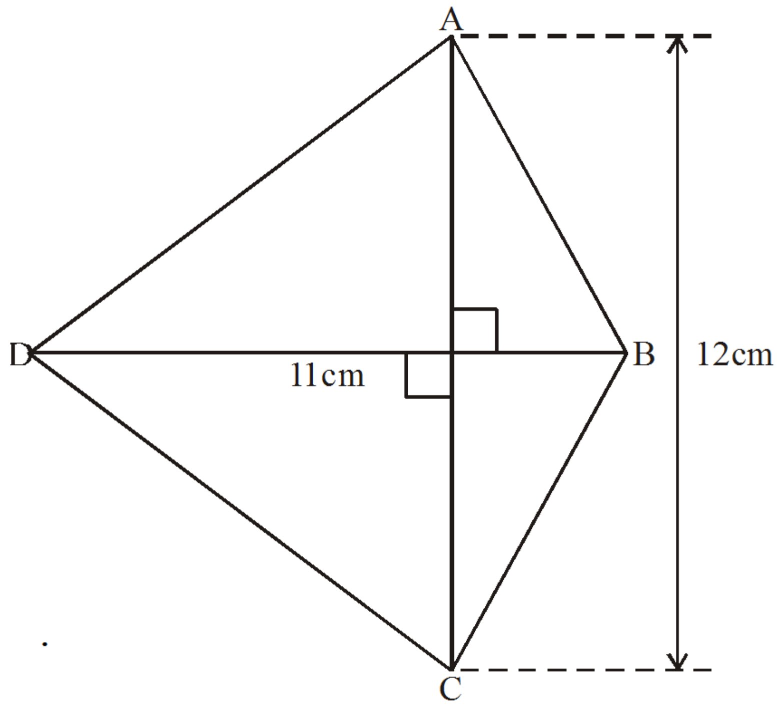
$$480 = 95 + 4x$$

$$4x = 480 - 96$$

$$x = \frac{384}{4} = 96$$

دوسرے متوازی ضلع کا طول = 96 سمر

مثال-6: چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجیے۔



حل:

$AC = h_1 + h_2 = 12$ cm

وتر کا طول (BD) $= 11$ cm

چار ضلعی کا رقبہ $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

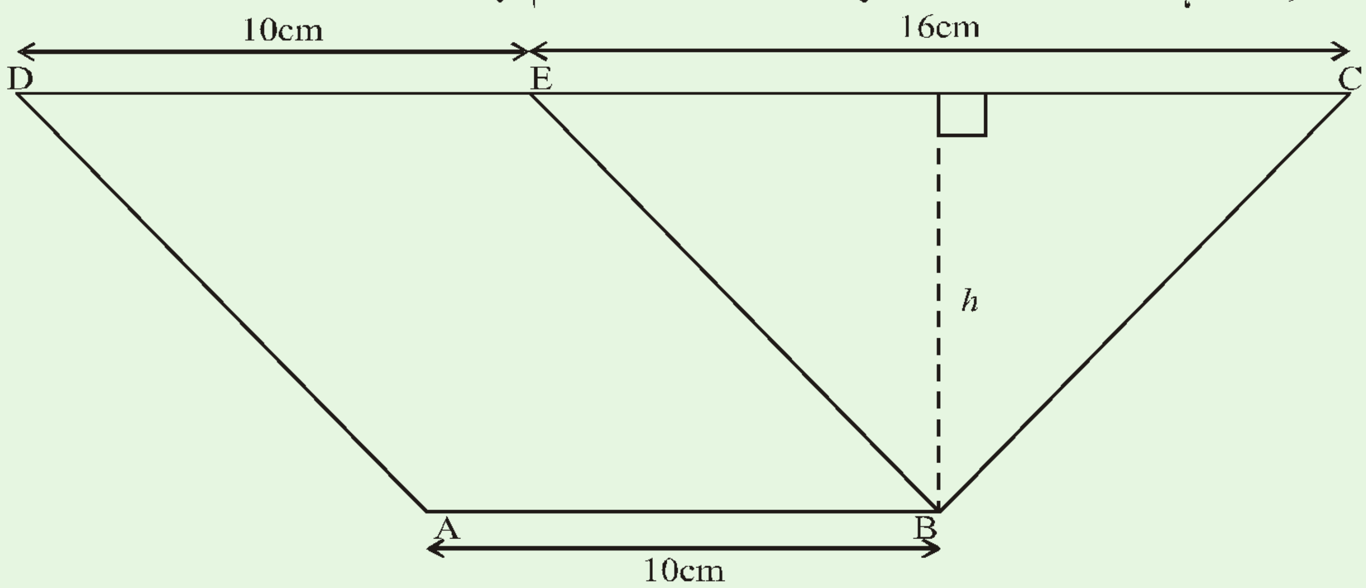
$= \frac{1}{2} \times 11 \times 12$

$= \frac{1}{2}$ 11 x 6 = 66 مربع سمر

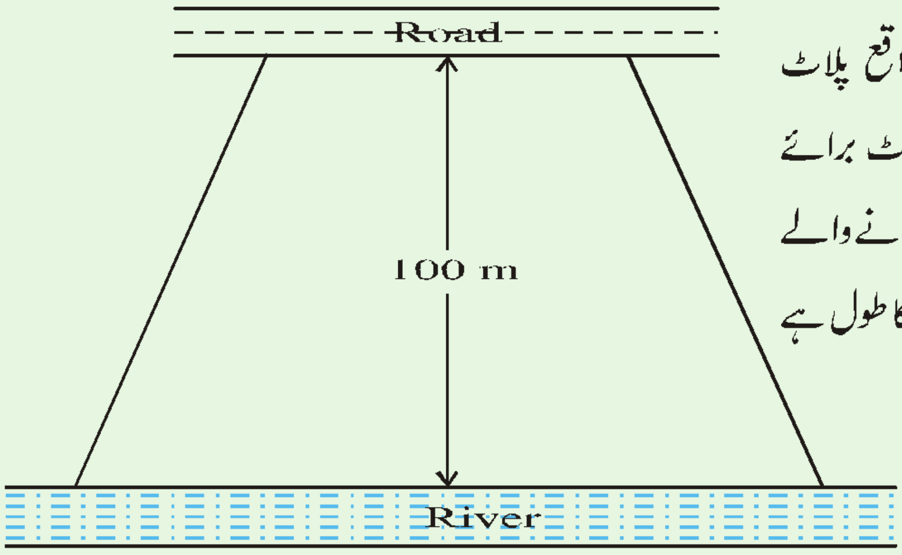
اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. ایک منحرف کے متوازی ضلعوں کے طول کی نسبت 4:1 ہے اور درمیانی فاصلہ 10 سمر ہے۔ اگر منحرف کا رقبہ 500 مربع سمر ہو تو متوازی ضلعوں کا طول معلوم کیجیے۔

2. دیئے گئے شکل میں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جہاں سمر AB = BD = 10 اور ABEC کا رقبہ 72 مربع سمر ہے۔ اگر سمر CE=16 تب منحرف ABCD معلوم کیجیے۔



3. موہن چاہتا ہے کہ ندی کے کنارے واقع پلاٹ خریدے۔ شکل میں بتائے ہوئے پلاٹ برائے فروخت موجود ہے۔ روڈ کی جانب پائے جانے والے ضلع کے طول کا دگنا ندی کے کنارے ضلع کا طول ہے اور متوازی ہے۔



4. رقبہ معلوم کیجئے جس کے وتر کے طول 10 سم اور 8.2 سم ہیں۔

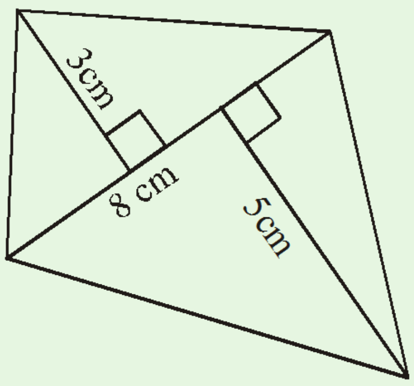
5. چار ضلعی ABCD کا رقبہ معلوم کیجئے جس کے وتر کا طول سم $AC = 10$ اور AC پر گرائے گئے عمودوں کا طول 5 سم اور 6 سم ہے۔

6. ایک منحرف کے متوازی ضلعوں میں نسبت 5:3 ہے اور ان کے درمیانی فاصلہ 16 سم ہے۔ اگر منحرف کا رقبہ 960 مربع سم ہو تو متوازی ضلعوں کے طول کیجئے۔

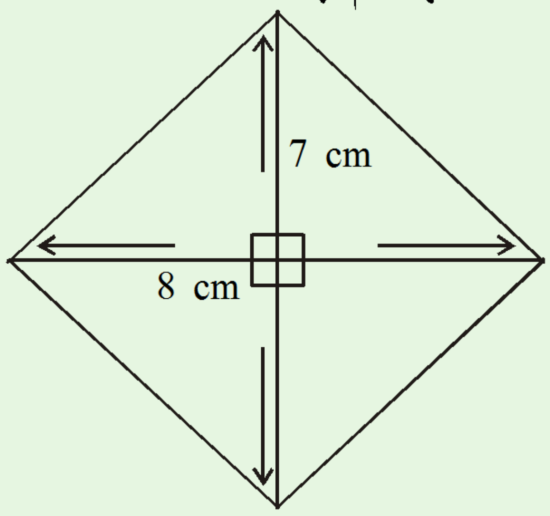
7. ایک منحرف کا رقبہ 16 مربع سم ہے۔ ایک متوازی ضلع کا طول 5 سم اور درمیانی فاصلہ 4 سم ہے۔ دوسرے متوازی ضلع کا طول معلوم کیجئے۔ ترسیمی کاغذ پر منحرف بنایئے اور رقبہ کو جانچیے۔

8. ایک مکان کے فرش کے لئے تقریباً 300 ٹائلس استعمال ہوئے جو معین شکل کے ہیں۔ جس کے وتر بالترتیب 45 سم اور 30 سم ہیں۔ فرش کے اخراجات معلوم کیجئے جب کہ ٹائل کی قیمت 20 روپئے مربع میٹر ہے۔

9. ذیل کے اشکال کے رقبے معلوم کیجئے۔

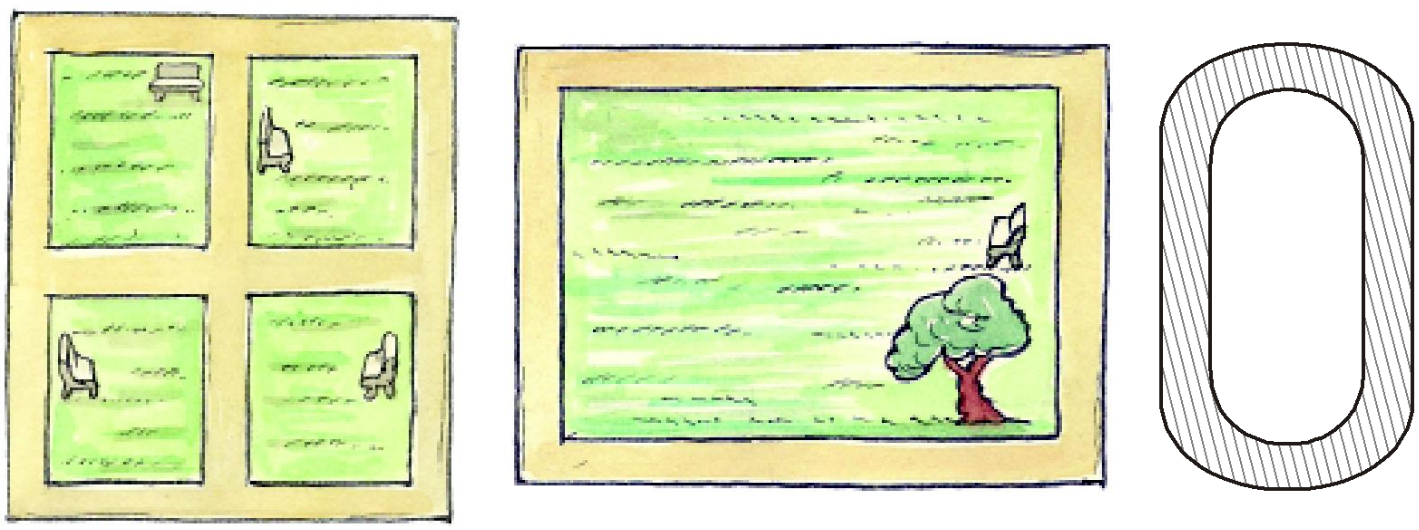


(i)

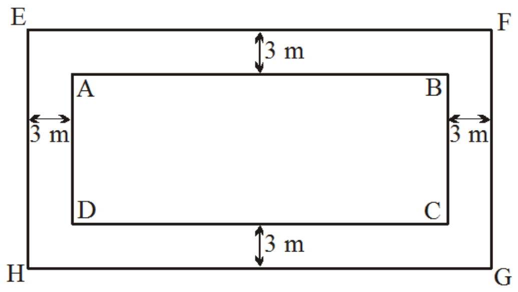


(ii)

5.1.2 مستطیلی راستے



ہم باغ میں چلتے وقت مستطیلی راستے دیکھتے ہیں۔ اب ہم مستطیلی راستوں کی پیمائش کس طرح کریں گے اور اسکو بنانے کے لئے کتنا خرچ آئے گا۔ سیکھیں گے۔



مثال-1: ایک پلاٹ 60 میٹر لمبا اور 40 میٹر چوڑا ہے۔ 3 میٹر چوڑائی سے ایک راستہ بنایا گیا۔ راستہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ ABCD دیا گیا پلاٹ ہے جہاں اطراف سے 3 میٹر چوڑا راستہ بنایا گیا۔

اس راستہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے ہم چھوٹے مستطیل ABCD کے رقبے کو بڑے EFGH کے رقبہ سے تفریق کریں گے۔

اندرونی مستطیل کا طول = 60 میٹر

عرض = 40 میٹر

ABCD مستطیل کا رقبہ = 40 x 40

= 2400 مربع میٹر

راستہ کی چوڑائی = 3 میٹر

بیرونی مستطیل کا طول = 60 + 3 + 3 = 66 میٹر

عرض = 40 + 3 + 3 = میٹر

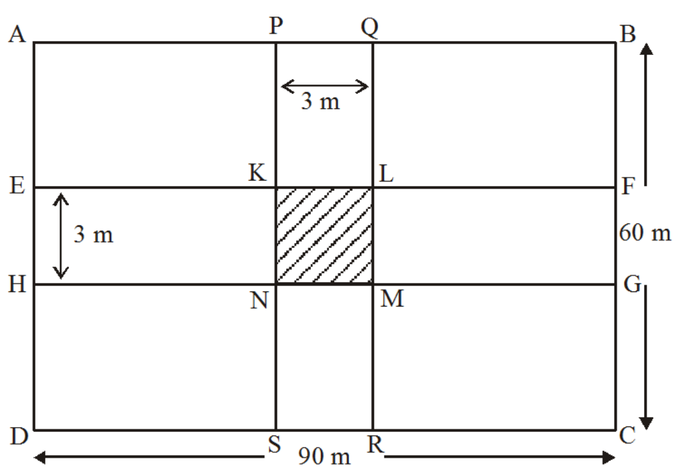
بیرونی مستطیل کا رقبہ = 66 x 46

= 3036 میٹر

راستہ کا رقبہ = اندرونی مستطیل کا رقبہ - بیرونی مستطیل کا رقبہ

3036 - 2400 = 636 مربع میٹر

مثال-2: ایک مستطیل پلاٹ کے ابعاد 90 میٹر اور 60 میٹر ہے۔ پلاٹ کے درمیان سے 3 میٹر چوڑی روڈ دونوں جانب سے بنائی گئی ہے معلوم کیجیے۔



(i) روڈ کا رقبہ

(ii) روڈ بنانے کا خرچ جب کہ 10 روپئے فی مربع میٹر ہے

حل: فرض کیجیے کہ ABCD مستطیلی پلاٹ ہے۔ PQRS اور EFGH روڈ میں جس کی چوڑائی 3 میٹر ہے۔

(i) روڈ کا رقبہ مستطیل PQRS اور مستطیل EFGH کا رقبہ

یہاں پر شکل میں ہم نے دیکھا کہ KLMN دونوں روڈ میں شامل ہے ایک مرتبہ رقبہ تفریق کرنا ہوگا۔
سوال کے لحاظ سے

$PS = 60\ m \quad PQ = 3\ m;$

$EF = 90\ m \quad EH = 3\ m;$

$KN = 3\ m \quad KL = 3\ m;$

روڈ کا رقبہ = مستطیل PQRS کا رقبہ + مستطیل EFGH کا رقبہ - KLMN کا رقبہ

$= (PS \times PQ) + (EF \times EH) - (KL \times KN)$

$= (60 \times 3) + (90 \times 3) - (3 \times 3)$

$= (180 + 270 - 9) = 441$ مربع میٹر

(ii) روڈ بنانے کا خرچ = 110 روپے فی میٹر

$= 110 \times 441$

$= 110 \times 441$

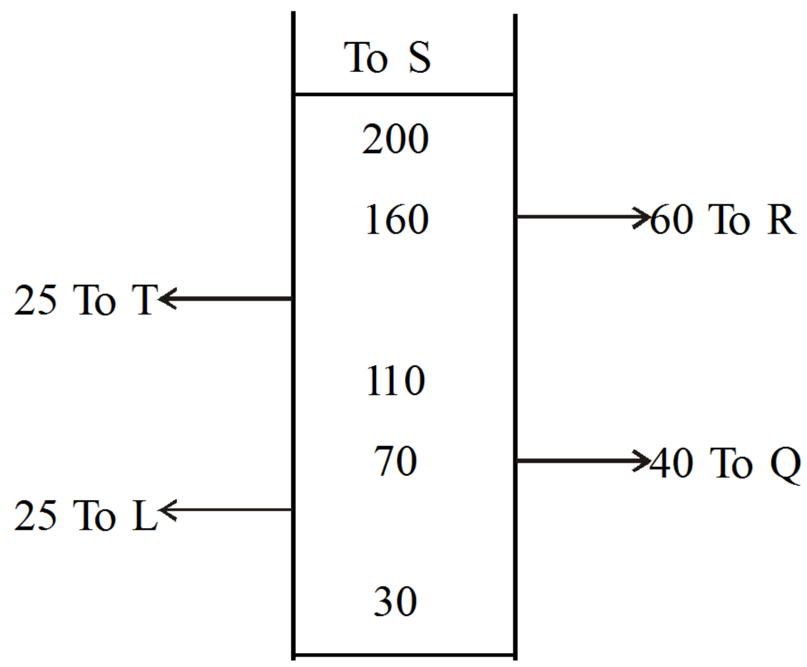
= 48, 510 روپے

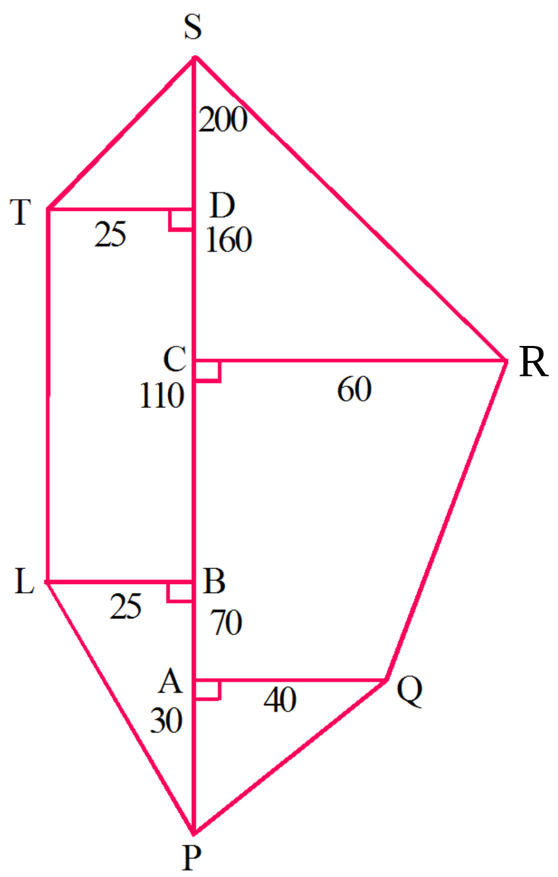
اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. ایک مربعی پلاٹ جس کا ضلع 45 میٹر ہے۔ اس کے اطراف 2.5 میٹر سے راستہ بنایا گیا ہے راستہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک مدرسہ کا مرکزی ہال 18 میٹر لمبا اور 12.5 میٹر چوڑا ہے۔ فرش پر کارپٹ شطرنجی ڈالی گئی ہے اور دیوار کے اطراف 50 سمر کے اسٹرپ لگائے گئے ہیں۔ شطرنجی کا رقبہ معلوم کیجیے اور اسٹرپ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

5.1.3 پلاٹ کا رقبہ

ایک سرویئر نے اپنے فلیڈ بک میں ایک پلاٹ کی پیائش اس طرح درج کی۔ پلاٹ کا رقبہ معلوم کیجیے۔





ذیل میں ڈاٹا دیا گیا ہے۔

1. ایک مسدسی شکل کے نقاط یا P, Q, R, S, T ہیں۔
2. PS وتر ہے۔
3. نقاط PQRS وتر کے ایک جانب اور L'T دوسری جانب ہے۔
4. نقطہ Q سے A پر عمود ہے۔ AQ = 40m
5. فیلڈ بک میں پیمائشات درج کئے گئے ہیں۔
6. فیلڈ کو دو مثلثات میں تقسیم کیا گیا۔
7. شکل سے حسب ذیل پیمائشات حاصل ہوتے ہیں۔

AC = PC - PA

= 110 - 30 = 80m

CS = PS - PC

= 200 - 110 = 90m

DS = PS - PD

= 200 - 160 = 40 m

BD = PD - PB

= 160 - 70 = 90 m

ΔAPQ کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 30 \times 40 = 60$ مربع میٹر

منحرف AQRS کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times AC(AQ + CR)$

$= \frac{1}{2} \times 80 \times (40+60)$

$= 80 \times 50$

$= 4000\ m^2.$

ΔCRS کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times CR \times CS$

$= \frac{1}{2} \times 60 \times 90$

$= 2700$ مربع میٹر

منحرف PLTS کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times h(a+b)$

$= \frac{1}{2} \times LB\ (TL+SP)$

$= \frac{1}{2} \times 25\ (90+200)$ $\qquad (\because TL = BD = 90)$

$= 3625$ مربع میٹر

فیلڈ کا رقبہ $= 600 + 400 + 2700 + 3625$

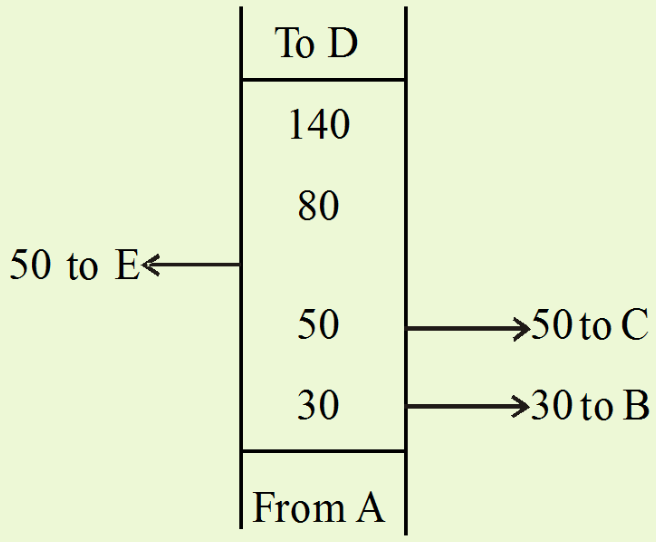
$= 10,925$ مربع میٹر

نوٹ: ہم لوگ PLTS کا رقبہ بھی معلوم کرسکتے ہیں $\Delta BPL + \Delta BLTD + \Delta TSD$

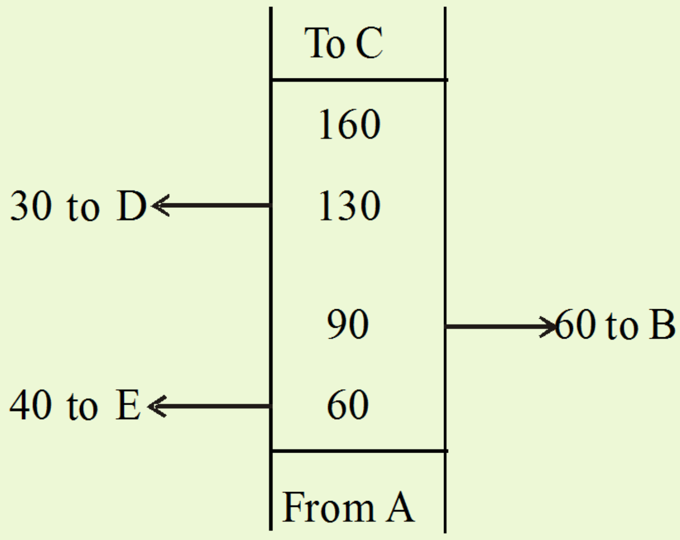
جانچ کیجیے

1. ایک سرویئر کے فیلڈ بک میں اس طرح پیمائشات ہیں، رقبہ معلوم کیجیے۔

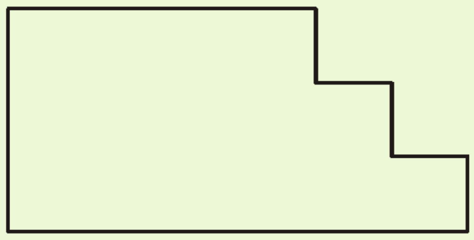
(i)



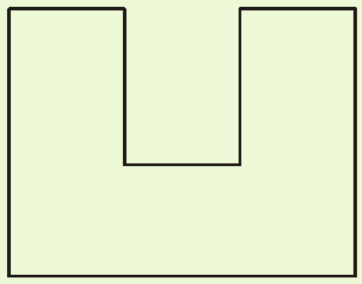
(ii)



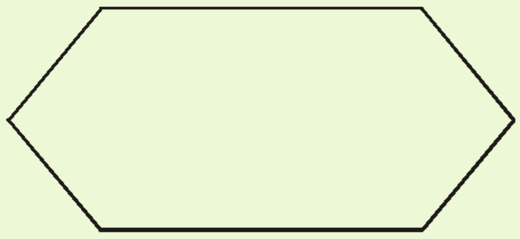
2. دی گئی ہدایات کے مطابق تقسیم کیجئے۔



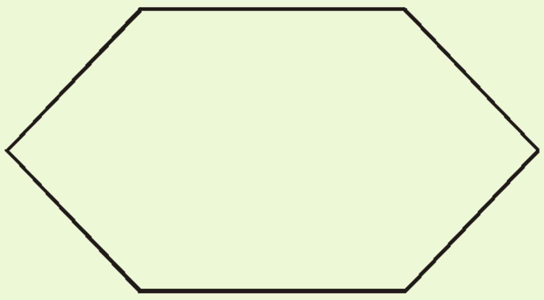
(i) 3 مستطیل



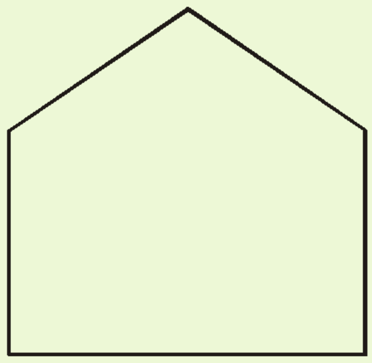
(ii) 3 مستطیل



(iii) 2 منحرف

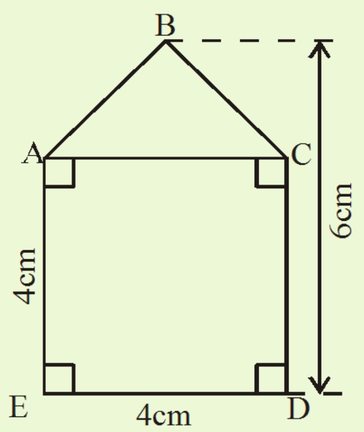


(iv) 2 مثلثات اور ایک مستطیل

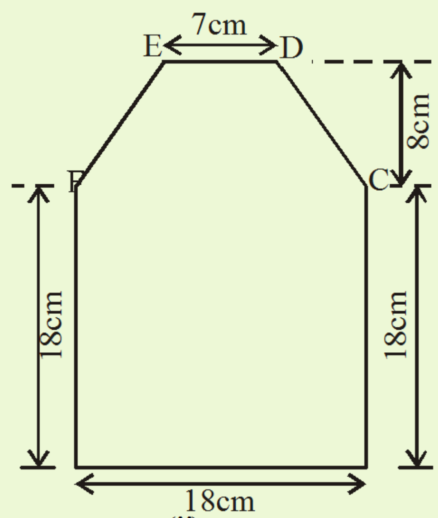


(v) 3 مثلثات

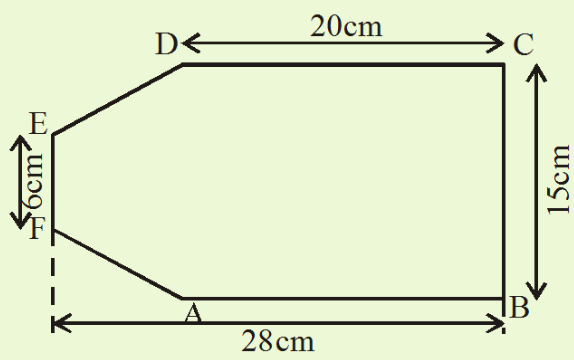
3. رقبہ معلوم کیجئے ____



(i)

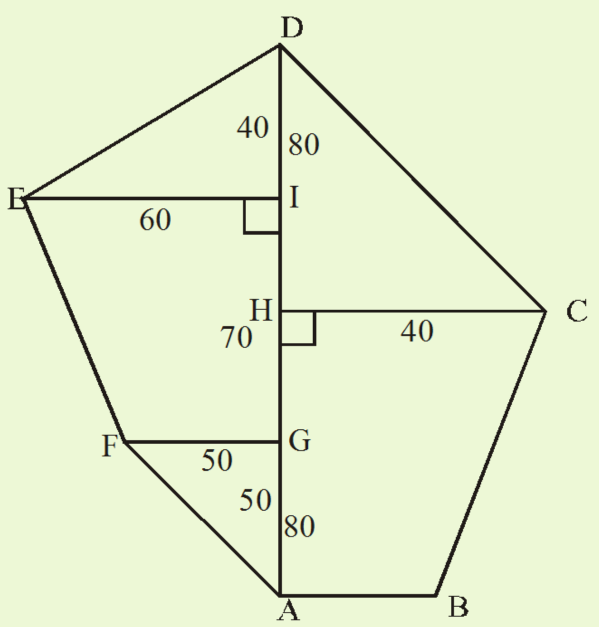


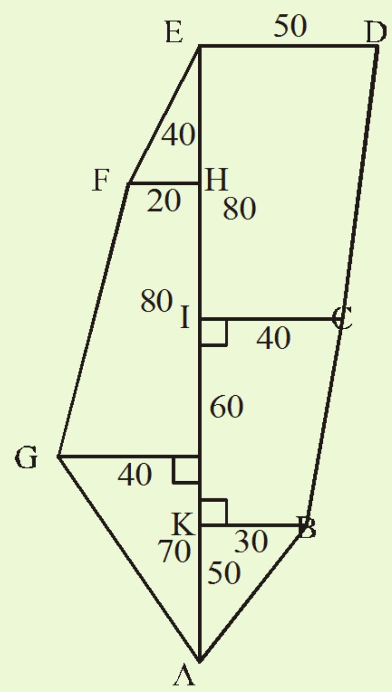
(ii)



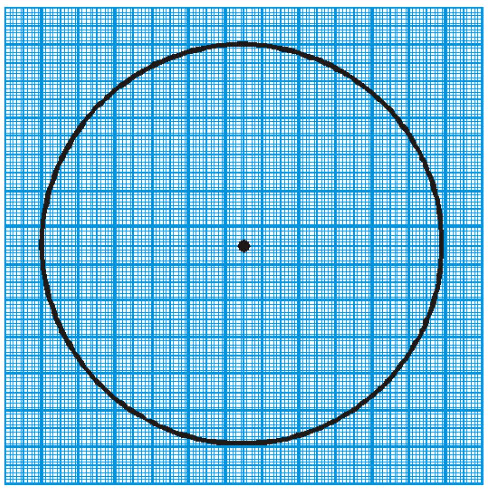
(iii)

4. پیمائشات دیئے گئے ہیں فیلڈ کا رقبہ معلوم کیجئے۔





5.1.4 دائرہ کا رقبہ



طریقہ-I : ترسیمی کاغذ سے دائرہ کا رقبہ معلوم کرنا۔ گراف پیپر پر 3 سمر نصف قطر سے ایک دائرہ بنائیے۔ پائے جانے والے مربعوں کی تعداد کو نوٹ کیجئے۔ مربع کو دو ہے سے زیادہ پائے جانے والے کو گنتے ہوئے دائرہ کا رقبہ معلوم کریں گے۔

طریقہ-II : دائرہ بنائیں۔ نصف دائرہ کو سیہ دار کیجئے (شکل 1) شکل کو آٹھ مساوی حصوں میں موڑیئے اور کاٹ دیجئے (شکل ii)۔ شکل نمبر iii کے مطابق تمام ٹکڑوں کو جمائیے۔

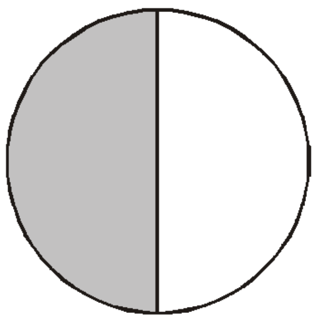


Fig. (i)

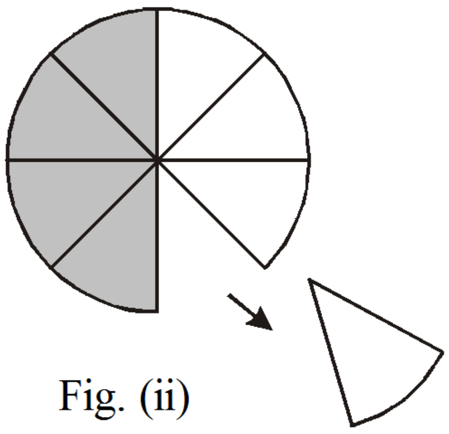


Fig. (ii)

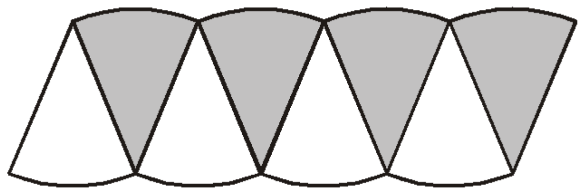
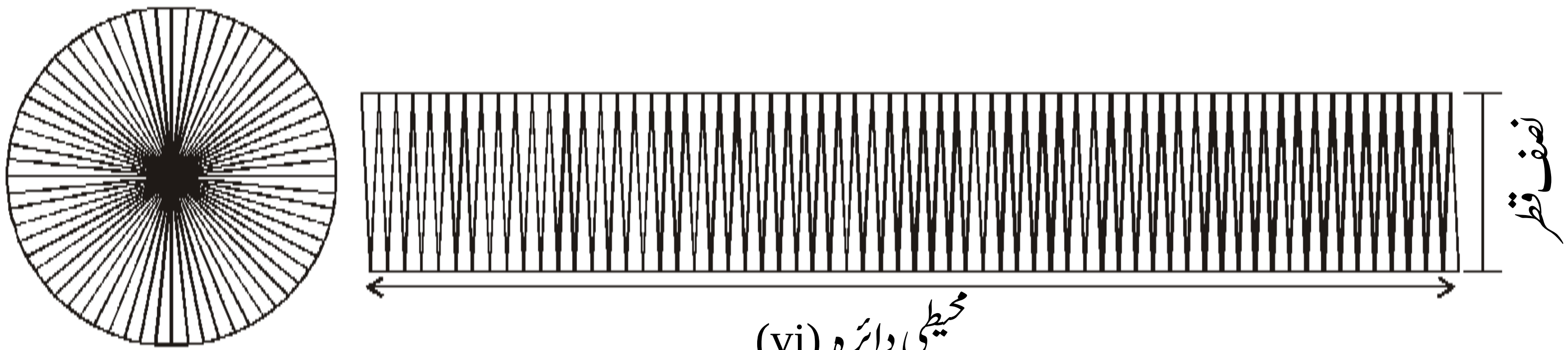


Fig. (iii)

ایک دائرہ کو 64 حصوں میں تقسیم کیجئے اور جمائیے۔ شکل iv میں بتایا گیا ایک مستطیل بنے گا۔



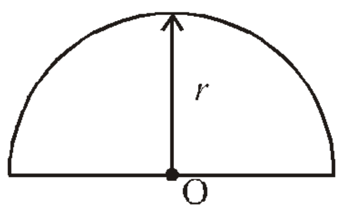
محیطی دائرہ (vi)

دائرے کو 64 قطعہ میں تقسیم کیا گیا۔ ہر طرف 32 قطعہ ہوں گے۔ مستطیل کا طول 32 قطعہ کا طول ہوگا جو محیط کہلاتا ہے جیسے شکل (iv)

دائرہ کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ $= l \times b$

= نصف قطر × محیط کا نصف

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$



$\therefore$ دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

- ایک دائرے کا محیط جس کا نصف قطر r ہو $= 2\pi r$
- نصف دائرے کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times \pi r^2$
- نصف دائرے کا محیط $= \frac{36}{7} r = \frac{22}{7} r + 2r = \pi r + 2r$ ($\because$ r نصف قطر ہے)

مثال : ایک دائرے کا محیط 22 سمر ہے۔ رقبہ معلوم کیجئے مزید نصف دائرے کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ دائرہ کا نصف قطر r سمر تب

دائرہ کا محیط $= 2\pi r$

$$2\pi r = 22$$

$$2\times\frac{22}{7}\times r = 22$$

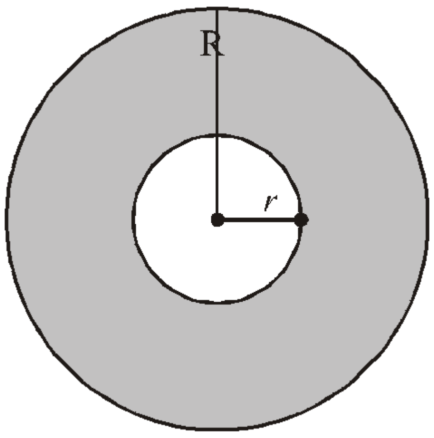
$$r = 22\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{22} = \frac{7}{2}\ \text{cm} = 3.5\ \text{cm}$$

دائرہ کا نصف قطر = 3.5 سمر

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2 = \left(\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\right)\text{cm}^2 = 38.5$ مربع سمر

نصف دائرہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\times 38.5 = 19.25$ مربع سمر

5.1.5 دائروی راستہ کا رقبہ یا حلقہ کا رقبہ



ایک پارک میں دائروی راستہ کا ہے جیسا کہ شکل میں بتایا گیا۔

جہاں اندرونی اور بیرونی نصف قطر ہیں۔

اس حلقہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

حلقہ کا رقبہ معلوم کرنے کے لئے بیرونی اور اندرونی دائرے کا فرق لیا جائے گا۔

بیرونی نصف قطر R اور اندرونی نصف قطر r لیں۔ تب

حلقہ کا رقبہ = بیرونی دائرہ کا رقبہ - اندرونی دائرہ کا حلقہ

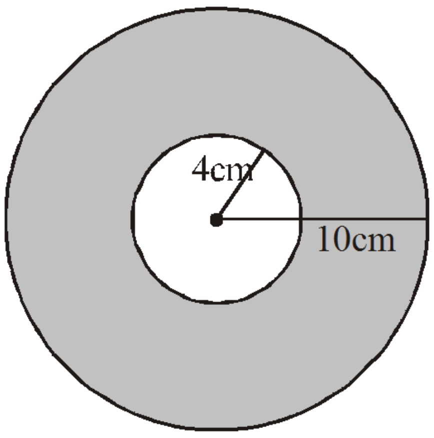
$= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

دائروی راستہ کا رقبہ $= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r))(R - r)$

مثال : متصلہ شکل میں دو ہم مرکز والے دائرے ہیں۔ بڑے دائرہ کا نصف قطر 10 سمر اور چھوٹے دائرہ کا نصف قطر 4 سمر ہے۔

معلوم کیجئے (i) بڑے دائرے کا رقبہ

(ii) دو دائروں کے درمیانی سایہ دار حصہ



حل: (i) بڑے دائرے کا نصف قطر = 10 سمر

بڑے دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2$

$= 3.14 \times 10 \times 10$

$= 314$ مربع سمر

(ii) چھوٹے دائرے کا نصف قطر = 4 سمر

رقبہ $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 10$

$= 3.14 \times 16$

$= 50.24$ مربع سمر

(iii) چھوٹے دائرے رقبہ − بڑے دائرے کا رقبہ = سایہ دار حصہ کا رقبہ

$= 314 - 50.24$

$= 263.76$ مربع سمر

(یا)

$= \pi (R + r)(R - r)$

$= \frac{22}{7} (10 + 4)(10 - 4)$

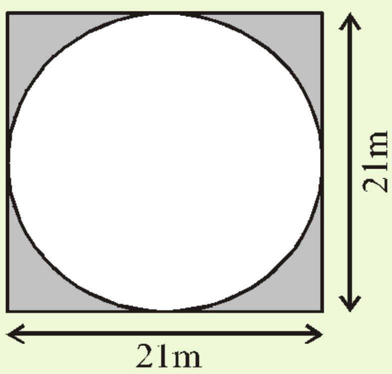
$= \frac{22}{7} \times 14 \times 6$

$= 263.76$ مربع سمر

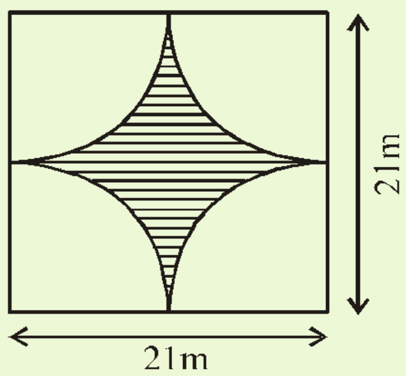
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

ہر ایک شکل میں سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجیے۔

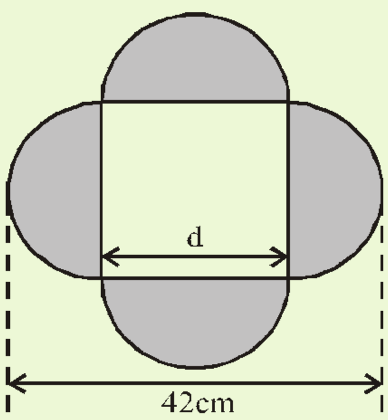
(i)



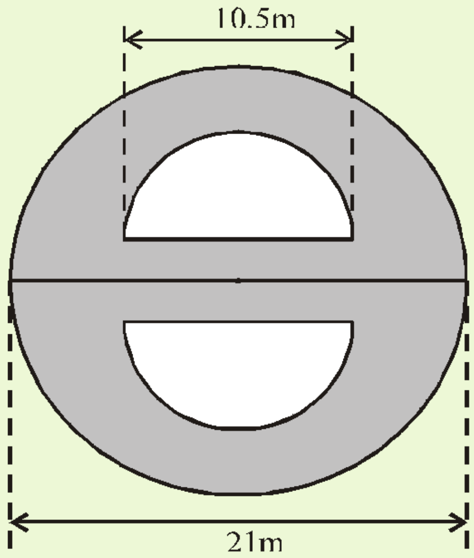
(ii)



(iii)

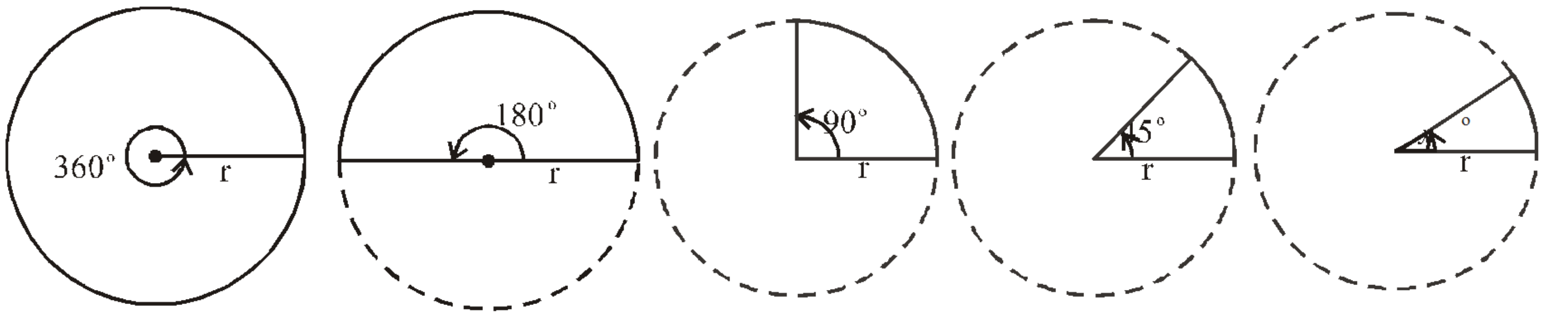


(iv)



قوس کا طول

ذیل کے اشکال کا مشاہدہ کیجئے اور زاویہ اور طول کے درمیان رشتہ کو سمجھئے۔

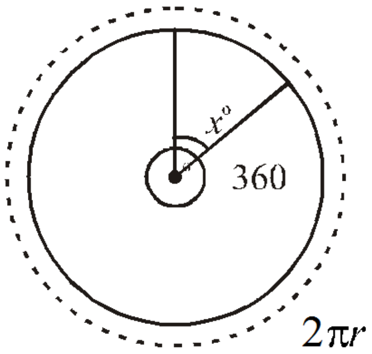


(i) (ii) (iii) (iv) (v)

شکل	زاویہ	قوس کا طول	قوس کے طول اور زاویہ میں رشتہ
(i)	360^0	$2\pi r$	$\frac{360^0}{360^0} \times 2\pi r = 2\pi r$
(ii)	180^0	πr	$\frac{180^0}{360^0} \times 2\pi r = \pi r$
(iii)	90^0	$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{90^0}{360} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$
(iv)	45^0	$\frac{\pi r}{4}$	$\frac{45^0}{360^0} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{4}$
(v)	x^0	l	$\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r l =$

مندرجہ بالا جدول سے مشاہدہ کرنے سے قطاع کے قوس کا طول (l) $\frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$ ہے۔

جہاں r نصف قطر اور x قوس سے بننے والا زاویہ ہے۔

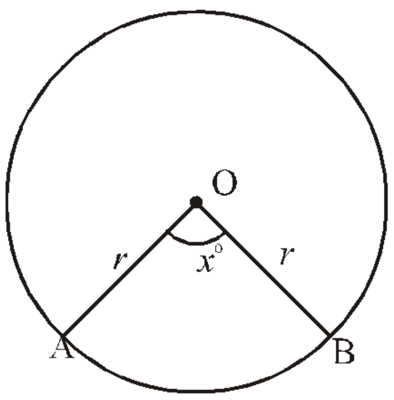


اگر قطاع دائرے کے قوس کا طول l ہے

$$\frac{2\pi r}{l} = \frac{360^0}{x^0}$$

تب $\boxed{l = \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r}$

5.1.6 قطاع کا رقبہ



ہم جانتے ہیں کہ دائرے میں دو نصف قطر اور قوس سے بننے والا حصہ قطاع کہلاتا ہے۔

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

قوس سے بننے والا زاویہ x^0 ہے۔

قطاع کا رقبہ اور زاویہ راست تناسب میں ہیں۔

$x^0 = 3600$ = دائرے کا رقبہ : قطاع کا رقبہ

$OAB = \frac{x^0}{360^0} \times$ دائرے کا رقبہ

$$\boxed{A = \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2}$$

مثال: قطعہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔ قوس سے بننے والا زاویہ 180^0 ہے اور نصف قطر 7 سمر ہے۔

حل: $r = 7$ سمر $\qquad x^0 = 18^0$

قطاع کا رقبہ $= \frac{x^0}{360^0} \times \pi r^2 = \frac{18^0}{360^0} \times \frac{22}{7} \times 7^2$

$= \frac{18 \times 22 \times 7}{360}$ $= 7.7$ مربع سمر

مشق

1. دائرے کا محیط 264 سمر ہو تب نصف قطر معلوم ہیں

(i) 3.5 سمر (ii) 4.2 سمر (iii) 15.4 سمر

2. اگر دائرے کا محیط 264 سمر ہو تب نصف قطر معلوم کیجئے (جہاں $\pi = \frac{22}{7}$)

3. دو دائروں کے قطروں کی نسبت 3 : 4 ہے۔ رولر کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

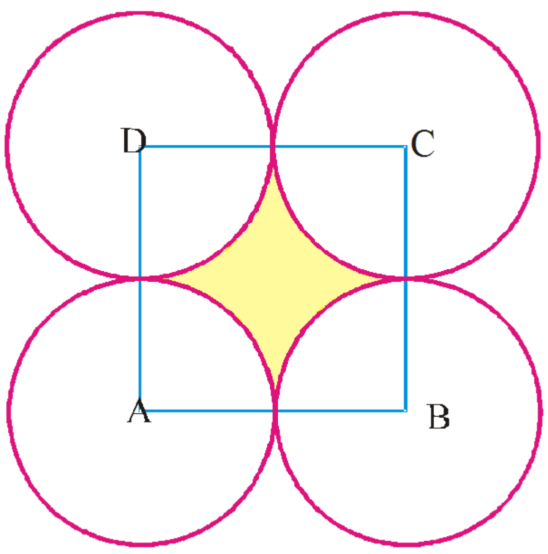
4. ایک روڈ رولر 200 پر گھومنے پر 2200 میٹر کا حصہ طے کرتا ہے۔ Roller کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

5. ایک تار دائروی شکل کا ہے جس کا نصف قطر 25 سمر ہے۔ جس کو پگھلا کر مربع بنایا گیا۔ مربع کا ضلع کیا ہوگا۔

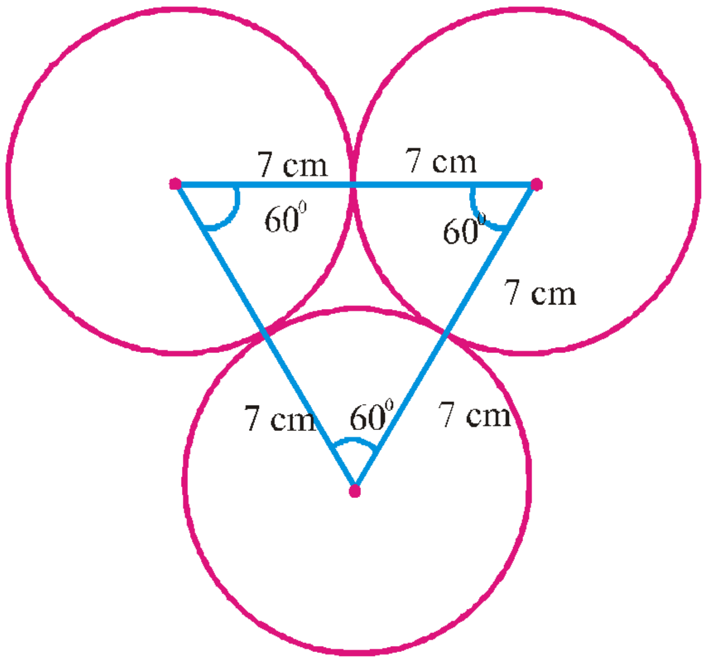
6. ایک دائرے کا محیط 264 سمر ہے۔ اس کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

7. ایک مربعی نما فیلڈ کے اطراف 2.5 میٹر چوڑا راستہ ہے جس کا ضلع 45 میٹر ہے۔ راستہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔

8. متصلہ شکل میں A, B, C, D دائرے ہیں جو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں جس سے ABCD مربع بنتا ہے جس کا ضلع 7 سمر سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کیجئے۔



9. مساوی الاضلاع میں قوس کا رقبہ $49\sqrt{3}$ مربع سمر ہے۔ دائرے کا نصف قطر مثلث کے ضلع کا نصف ہوتا ہے۔ شکل میں بتایا گیا ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جو دائرے میں نہ ہو



اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

- دائرے کا رقبہ جس کا نصف قطر r ہو $= \pi r^2$
- محیط کا رقبہ جس کا نصف قطر r ہو $= 2\pi r^2$
- نصف دائرے کا رقبہ $= \frac{1}{2}\pi r^2$
- نصف دائرے کا محیط جس کا نصف قطر r ہے $= \pi r + 2r$
  $= \frac{36}{7} r$
- دائروی راستہ کا رقبہ $= \pi(R^2 - r^2)$
  (یا)
  $= \pi(R + r)(R - r)$ (جہاں R بیرونی دائرے کا نصف قطر اور r اندرونی دائرے کا نصف قطر)
- قوس کا طول $= \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r$
- قطاع کا رقبہ $= \frac{x^0}{360^0} \times 2\pi r^2$
- قطاع کا رقبہ جس کا قوس l اور نصف قطر r ہو $= \frac{lr}{2}$

سبق 5.2

سطحی رقبہ اور حجم

Surface Area and Volumes

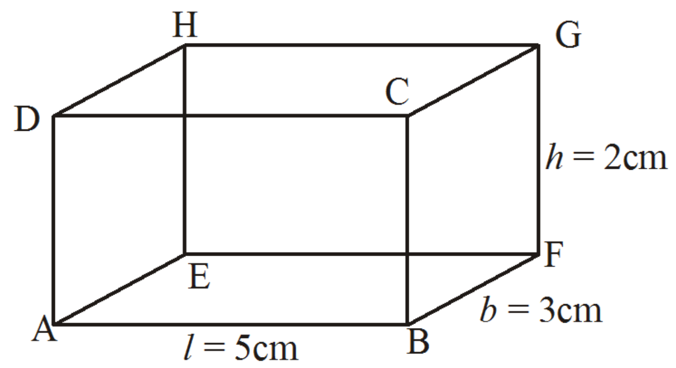
5.2.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- ٹھوس اجسام کے سطحی رقبہ اور حجم معلوم کرنے کے سوالات حل کریں گے۔
- چھوٹے ٹھوس اجسام کے رقبہ اور حجم
- مختلف ٹھوس اجسام کے رقبے اور حجم کے ضابطے اور ارکان کو سمجھ پائیں گے۔
- سادہ ٹھوس اجسام کے اشکال بنائیں گے۔

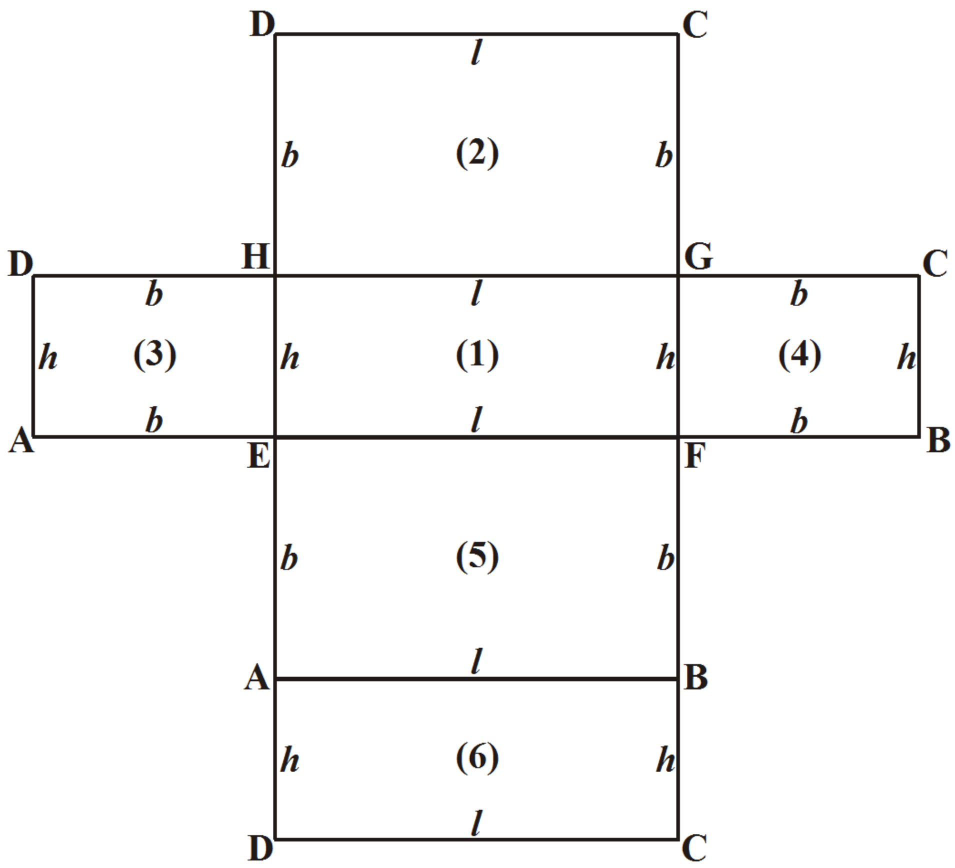
5.2.1 تعارف

5.2.1 مکعب کا سطحی رقبہ



مکعب نما کا مشاہدہ کیجئے اور کتنے طرف (رخ) پائے جاتے ہیں؟ کتنے کونے اور کتنے سطح ہیں۔ کونسے طرف مساوی ہیں؟ آپ کو مکعب نما کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کا کچھ اندازہ ہے۔

آیئے ہم مکعب کا سطحی رقبہ معلوم کریں گے۔



شکل میں طول (l) 5 سمر، عرض (b) 3 سمر اور بلندی $(h) = 2$ سمر۔ اگر مکعب کو کاٹ کر کھول دیا جائے تب ADHE اور BCGF کی شکل اس طرح ہوگی۔

شکل بتاتی ہے کہ مکعب میں 6 مستطیل بنتے ہیں ۔ مکعب کا سطحی رقبہ معلوم کرنے کے لئے 6 مستطیل کے رقبوں کو جمع کیا جاتا ہے۔ اس طرح 6 مستطیل کے رقبوں کا مجموعہ سے مکعب نما کا سطحی رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

مکعب نما کا کل سطحی رقبہ =

= رقبہ (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)

$= lh + lb + bh + bh + lb + bh$

$= 2\,lb + 2\,lh + 2\,bh$

$= 2(lb + lh + bh)$

(1)، (3)، (4)، (6) مکعب نما کے منحنی سطح کا رقبہ ہے

مکعب نما کے منحنی سطح کا رقبہ = رقبہ (1) + (3) + (4) + (6)

$= lh + bh + bh + lh$

$= 2\,h\,(l + b)$

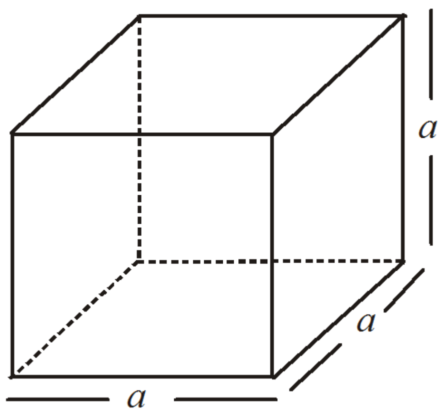
دی ہوئی شکل میں $l = 5$ ، $b = 3$ ، $h = 2$

کل سطحی رقبہ $= 2(5 \times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 2)$

$= 2 \times 31$

= 62 مربع سمر

مکعب میں $l = b = h = a$



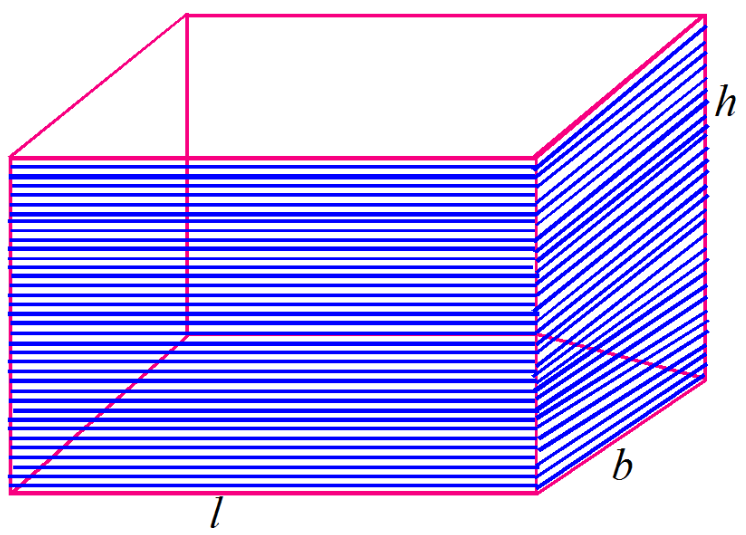
مکعب کا کل سطحی رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

$= 2(a^2 + a^2 + a^2)$

$= 2(3a^2)$

$= 6a^2$ مربع اکائیاں

5.2.2 مکعب نما کا حجم



کارڈبورڈ سے مستطیل ایک جیسے پیمائش والے کاٹئے اور ایک دوسرے پر رکھے۔ حاصل ہونے والی شکل کونسی ہے۔

شکل مکعب ہے۔

مکعب کا حجم معلوم کریں گے۔

جس کا طول مستطیل کے طول کے مساوی ہوگا اور عرض مستطیل کے عرض کے مساوی۔

مستطیلوں سے بننے والا مکعب کی بلندی 'l' ہے۔

بلندی × مستوی سطح کا رقبہ = مکعب

مکعب کا حجم = $lb \times h$

حجم، جہاں l، b، h بالترتیب طول، عرض، بلندی ہے = lbh

اگر مکعب کا کنارہ 'a' ہے تب

مکعب کا حجم = a^3 مکعب اکائیاں

مثال-1: ایک مکعب کا کل سطحی رقبہ 1350 مربع سم ہے۔ حجم معلوم کیجئے۔

حل: مکعب کا کل سطحی رقبہ = $6a^2$

$$\Rightarrow \quad 6a^2 = 1350$$

$$\Rightarrow \quad 6a^2 = \frac{1350}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 6a^2 = 225$$

$$\Rightarrow \quad a = 15$$

مکعب کا کنارہ = 15 میٹر

مکعب کا حجم (جہاں کنارہ 15 سم ہے) = a^3 = $(15)^3 = 3375$ مربع سم

مثال-2: ایک مکعب نما کے کل سطح اور منحنی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجیے جس کے ابعاد 8 سم، 6 سم، 5 سم ہیں

حل: منحنی سطح کا رقبہ $= 2h(l + b)$

$= 2 \times 5(8+6)$

$= 10(14)$

$=140$ مربع سم

کل سطحی رقبہ = $2(lb + bh + lh)$

$= 2(8 \times 6 + 6 \times 5 + 8 \times 5)$

$= 2(48 + 30 + 40)$

$= 2(118)$

= 236 مربع سمر

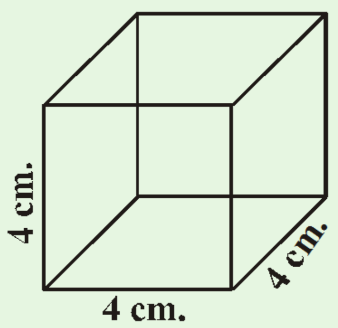
حجم = lbh

$= 8 \times 6 \times 5 = 240$ مربع

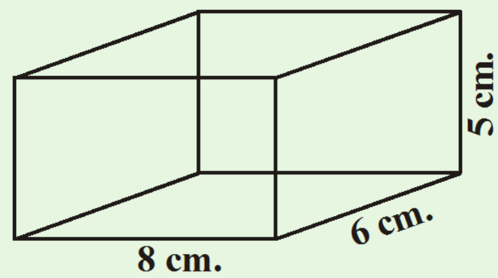
اکتساب کی جانچ کیجئے

1. مکعب کا حجم معلوم کیجئے اگر $l =$ 12 سمر ، $b =$ 10 سمر اور $h =$ 8 سمر
2. مکعب نما کا حجم معلوم کیجئے۔ اگر اس کا کنارہ 10 سمر ہو۔
3. مکعب کا ضلع (کنارہ) 50% کا اضافہ ہو۔ تب مکعب کا سطحی رقبہ میں اضافہ کا فیصد معلوم کیجئے۔
4. ایک مکعب کا حجم 1000 مکعب سمر ہے۔ کنارہ معلوم کیجئے۔
5. ذیل کے ٹھوس اجسام کے منحنی سطح کا رقبہ اور کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

(i)



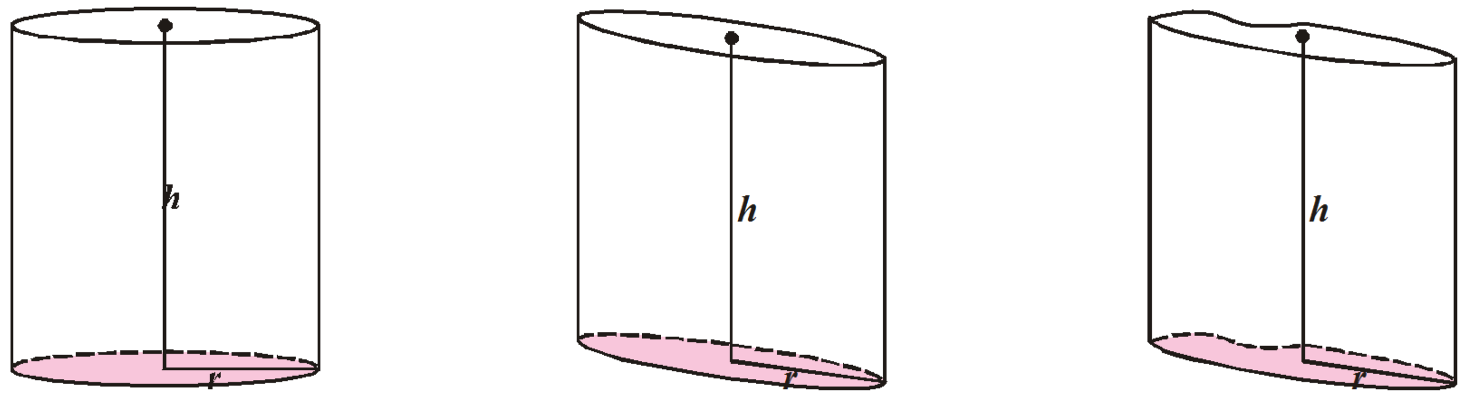
(ii)



6. ایک باکس کا کل سطحی رقبہ کس طرح تبدیل ہوتا ہے۔
   (i) ہر پیمائش دگنا ہو۔
   (ii) ہر پیمائش تین گنا ہو۔
7. ایک کمرے کے چار دیواری (دروازے اور کھڑکی نہیں ہیں) کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا طول 12 میٹر، عرض 10 میٹر بلندی 75 میٹر ہے۔
8. ایک مکعب نما کا حجم 1200 مربع سمر ہے۔ جس کا طول 15 سمر، عرض 10 سمر ہے۔ بلندی معلوم کیجئے۔
9. ایک مکعب نما کا کل سطحی رقبہ، منحنی سطحی رقبہ اور حجم معلوم کیجئے جس کا طول 5 سمر، عرض 4 سمر اور بلندی 3 سمر ہے۔
10. ایک مکعب کا حجم 1728 مکعب سمر ہے کل سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔

5.2.3 قائم دائروی استوانہ

ذیل کے استوانوں پر غور کیجئے۔



(i) (ii) (iii)

(i) اشکال (i)، (ii)، (iii) میں کیا ایک جیسے ہیں۔

(ii) اشکال (i)، (ii)، (iii) کے درمیان کیا فرق ہے۔

(iii) کس شکل میں قاعدہ پر خط عمود وار ہے۔

ہر استوانہ میں ایک منحنی سطح ہوتی ہے اور دو مشابہہ دائرے ہوتے ہیں۔ خطی خط، قاعدہ پر عمود وار ہو تو وہ استوانہ ''قائم دائروی استوانہ'' کہلاتا ہے۔

مندرجہ بالا اشکال میں کونسے ''قائم دائروی استوانہ'' ہیں کونسے نہیں وجہ بتائیے۔

استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ

ایک کارڈ بورڈ سے ''قائم دائروی استوانہ بنائیے۔ منحنی سطح کو کاٹئے۔ سیدھا جمائیے۔ ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ بلندی اور قاعدہ، سیدھا جمائے ہوئے شکل کونسی ہوگی؟

وہ شکل ایک مستطیل ہوگی۔ مستطیل کا رقبہ، استوانہ کے منحنی سطح کے رقبہ کے مساوی ہوگا۔ استوانہ کی بلندی مستطیل کا عرض اور محیطی قاعدہ، مستطیل کا طول ہوگا۔

$(h = b)$ مستطیل کا عرض = استوانہ کی بلندی

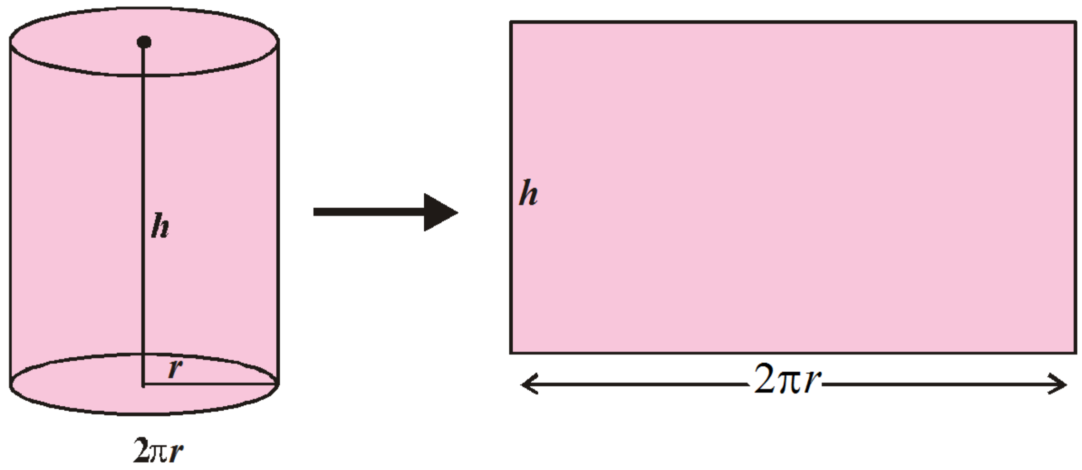
$(2\pi\, r = l)$ مستطیل کا طول = استوانہ کا محیطی قاعدہ جس کا نصف قطر r ہو

مستطیل کا رقبہ = استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ

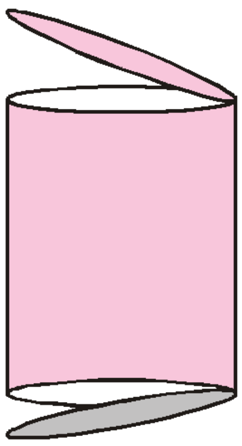
= عرض × طول

$= 2\pi r \times h$

$= 2\pi rh$



∴ **استوانہ کی منحنی سطح کا رقبہ = $2\pi rh$**



استوانہ کی کل سطح کا رقبہ :

متصلہ شکل کا مشاہدہ کیجیے۔

کیا یہ ’’قائم دائروی استوانہ ہے‘‘؟ کل سطحی رقبہ معلوم کرنے کے لئے کونسی سطح کو جمع کرنا ہوگا؟ یہاں پر منحنی سطح اور دائروی رخ ہیں۔ تب

اوپر کا رقبہ + قاعدہ کا رقبہ + منحنی سطح کا رقبہ = کل سطح رقبہ

$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

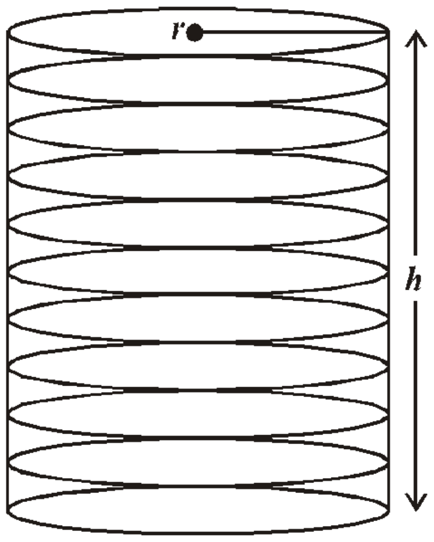
$= 2\pi r\,(h + r)$

جہاں r نصف قطر اور h بلندی ہے $2\pi r\,(h + r)$ = کل سطح رقبہ

استوانہ کا حجم

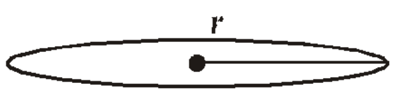
ایک ہی نصف قطر کے دائرے لیجئے اور اس کو جمائیے۔

اس مشغلے سے ہم کو کیا حاصل ہوتا ہے استوانہ یا نہیں۔



شکل میں r دائرے کا نصف قطر ہے اور h بلندی جو دائروں کو جمع پر حاصل ہوتا ہے۔

بلندی × πr^2 = استوانہ کا حجم



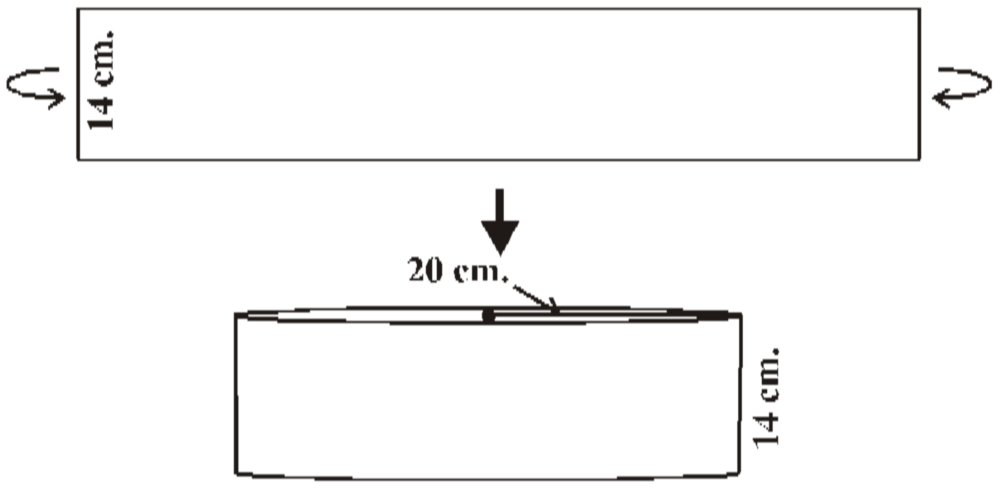
$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$

∴ استوانہ کا حجم $= \pi r^2 h$

جہاں r نصف قطر اور h بلندی ہے۔

مثال-1: ایک مستطیلی کاغذ جس کی چوڑائی 14 سمر ہے کو موڑا گیا۔ جس سے 20 نصف قطر والا استوانہ بنا۔ استوانہ کا حجم معلوم کیجئے۔ $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ لیجئے$\left.\right)$



حل: مستطیلی کاغذ کو چوڑائی سے موڑنے پر

استوانہ حاصل ہوا۔

کاغذ کی چوڑائی، استوانہ کی بلندی ہے اور

نصف قطر 20 سمر ہے۔

استوانہ کی بلندی $= h = 14\ \text{cm}$

نصف قطر $= r = 20\ \text{cm}$

استوانہ کا حجم $= V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 14$$

$= 17600$ مکعب سمر

$\therefore$ استوانہ کا حجم $= 17600$ مکعب سمر

مثال-2: ایک مستطیلی کاغذ کے ٹکڑے سے جس کے ابعاد 11 سمر × 4 سمر میں موڑ کر استوانہ بنایا گیا جس کی بلندی 4 سمر ہے۔ استوانہ کا حجم معلوم کیجئے۔

حل: کاغذ کا طول، استوانہ کے محیطی قاعدہ کی بلندی ہوگی۔

استوانہ کا نصف قطر $= r$

بلندی $= h$

استوانہ کے قاعدے کا محیط $= 2\pi r = 11$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$r = \frac{7}{4}\ \text{cm}$$

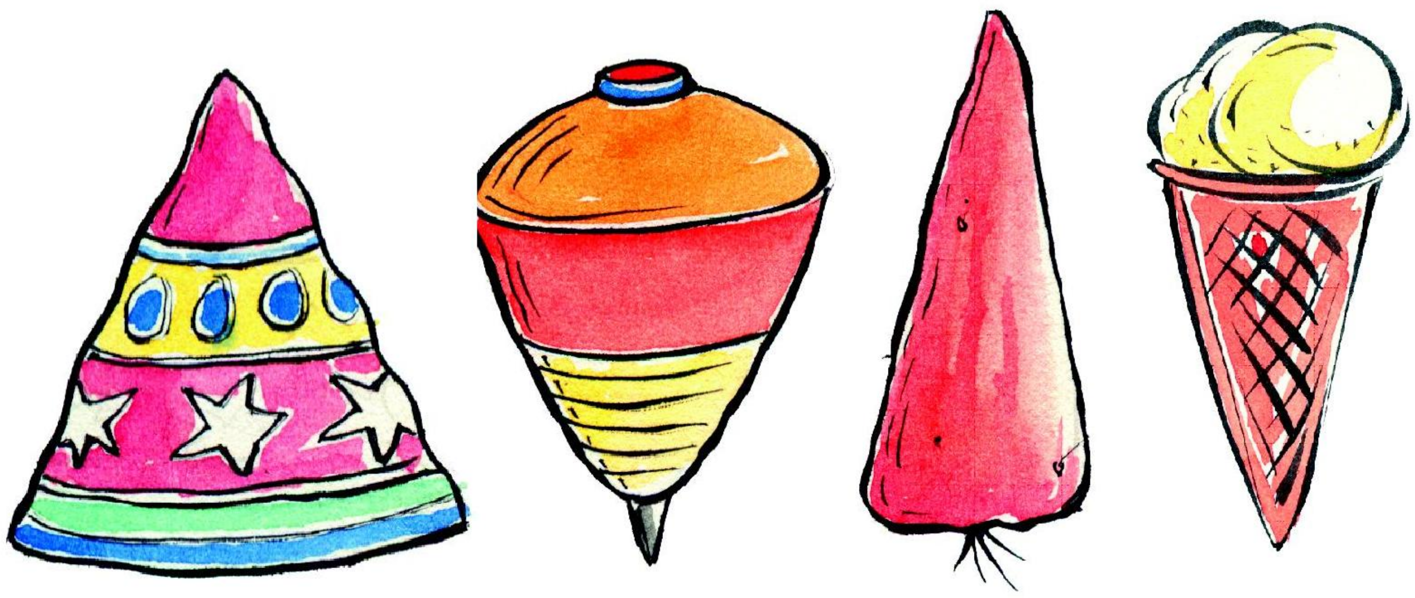
$$h = 4\text{cm}$$

استوانہ کا حجم $V = \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{4} \times \frac{7}{4}$$

$= 38.5$ مکعب سمر

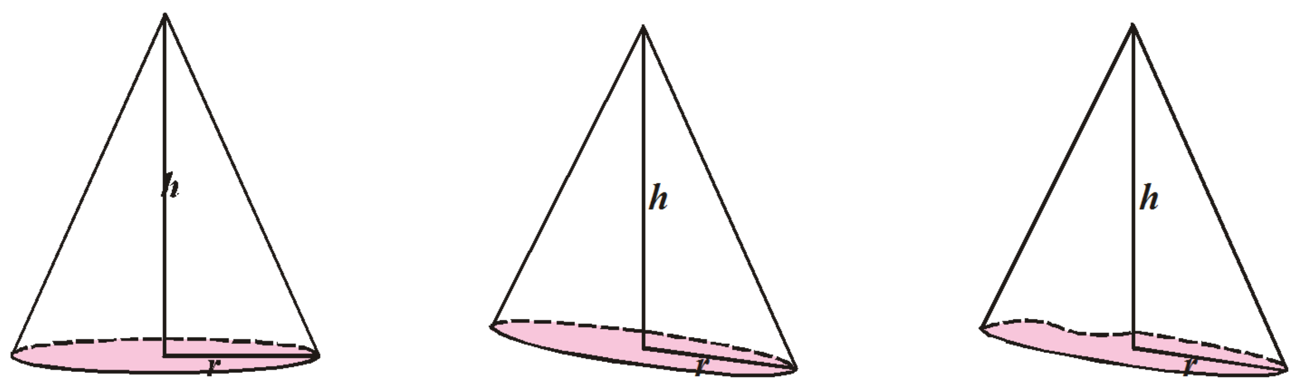
5.2.4 قائم دائروی مخروط



اوپر کے اشکال کا مشاہدہ کیجئے۔ کونسے ٹھوس اجسام ہیں۔

تمام مخروط کی شکل کے ہیں۔

ذیل کے مخروط کا مشاہدہ کیجئے۔



(i) مخروط میں کونسے مشترکہ خاصیت ہیں؟

(ii) ان کے درمیان کیا فرق محسوس کئے؟

شکل (i) میں منحنی سطح کا قاعدہ ''دائرہ'' ہے۔ خطی خط قاعدہ کے مرکز پر عمودوار ہے جو نصف قطر ہوگا۔ اس قسم کے مخروط کو ''قائم دائروی مخروط'' کہتے ہیں۔

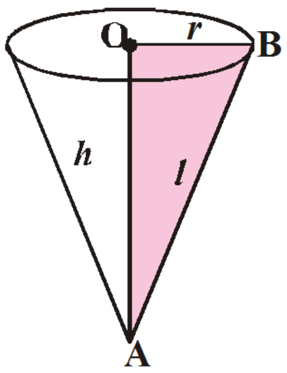
شکل (ii) اس کا قاعدہ دائروی ہے لیکن خطی خط عمودوار نہیں ہے۔

اس قسم کے مخروط ''قائم دائروی مخروط'' نہیں کہلاتے۔

شکل (iii) میں خطی خط' قاعدہ پر عمودوار ہے لیکن قاعدہ دائروی شکل کا نہیں ہے۔

∴ یہ مخروط ''قائم دائروی مخروط'' نہیں ہے۔

مخروط کی مائل بلندی :



متصل مخروط میں $\overline{OB} \perp \overline{AO}$

ΔAOB قائم مثلث ہے۔

$\overline{AO}$ مخروط کی بلندی (h) ہے اور

$\overline{OB}$ مخروط کا نصف قطر (r) ہے ΔAOB سے

$AB^2 = AO^2 + OB^2$

$AB^2 = h^2 + r^2$ (جہاں AB مائل بلندی l)

$l^2 = h^2 + r^2$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

مشغلہ :

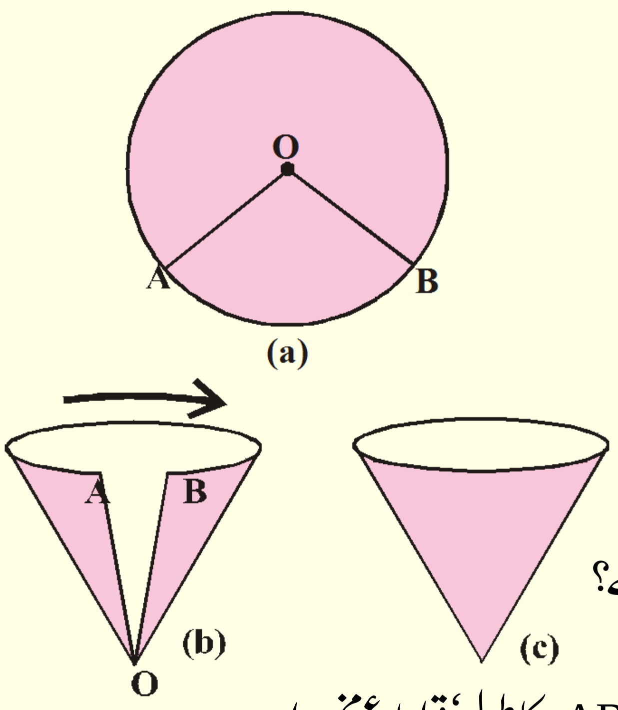
قطاع سے مخروط بنانا

(i) موٹے کاغذ پر ایک دائرہ بنایئے۔ شکل (a)

(ii) قطاع AOB کو کاٹئے۔ شکل (b)

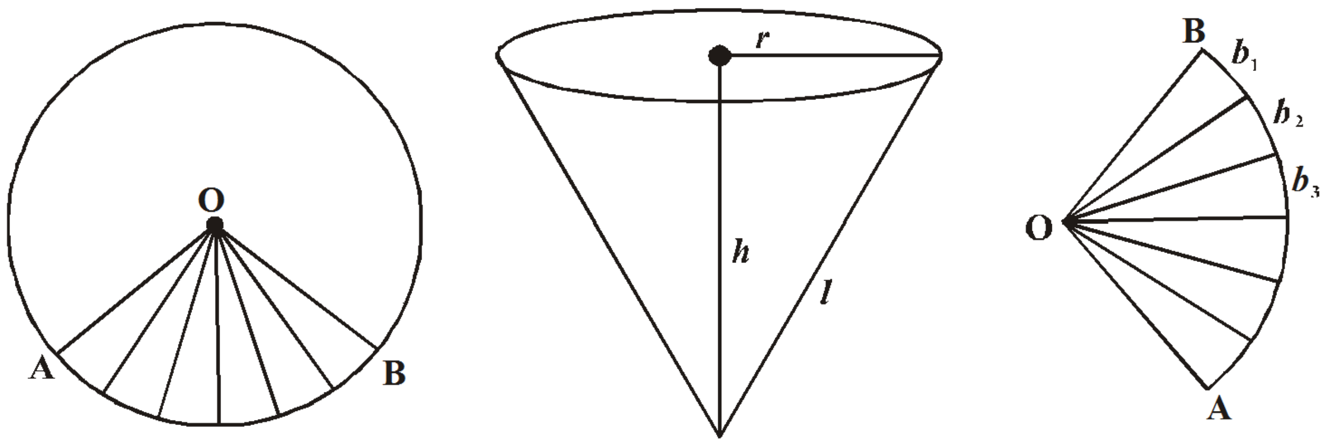
(iii) A، B کو موڑیئے AB کو ملاتے ہوئے Cello Type سے جوڑیئے۔ شکل (c)

(iv) کونسی شکل حاصل ہوگی۔ کیا یہ ''قائم مخروط'' ہے؟



مخروط بناتے وقت غور کیجیے کہ OA اور OB اور قوس AB کا طول، قطعاع مخروط

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ



مشغلہ میں بتائے گئے کاغذ سے قائم مخروط منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرنا۔

قطاع دائرے کے موڑنے پر ہم نے محسوس کیا OA، OB جو مخروط کی مائل بلندی کہلاتی ہے۔ مخروط کا طول $\overset{\frown}{AB}$ محیطی قاعدہ کہلاتا ہے۔

شکل میں بتائے گئے قطاع AOB کی طرح کئی قطاع دائرے کاٹ سکتے ہیں جو مثلثی شکل ہوں گے جس کا قاعدہ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ اور بلندی h، مائل بلندی کے مساوی ہوگا۔

اگر ان مثلثات کے رقبوں کو معلوم کریں اور ان کو جمع کریں تب وہ قطاع کا رقبہ ہوگا۔ ہم جانتے ہیں کہ قطاع دائرے سے مخروط بنتا ہے۔

مثلثات کے رقبوں کا مجموعہ = مخروط کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}l\ (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

$$= \frac{1}{2}l\ (\text{منحنی A‘B کا طول})$$

$$= \frac{1}{2}l(2\pi r)$$

$$= \pi rl.$$

مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ $= \pi rl$

مخروط کا کل سطحی رقبہ

اگر مخروط کا قاعدہ مکمل احاطہ کیا ہوا ہے دائرے کی نصف قطر جو مخروط کے نصف قطر کے مساوی ہو۔

کل سطحی رقبہ کس طرح معلوم کریں گے۔ کتنے رخ آپ جمع کریں گے۔

دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2.$

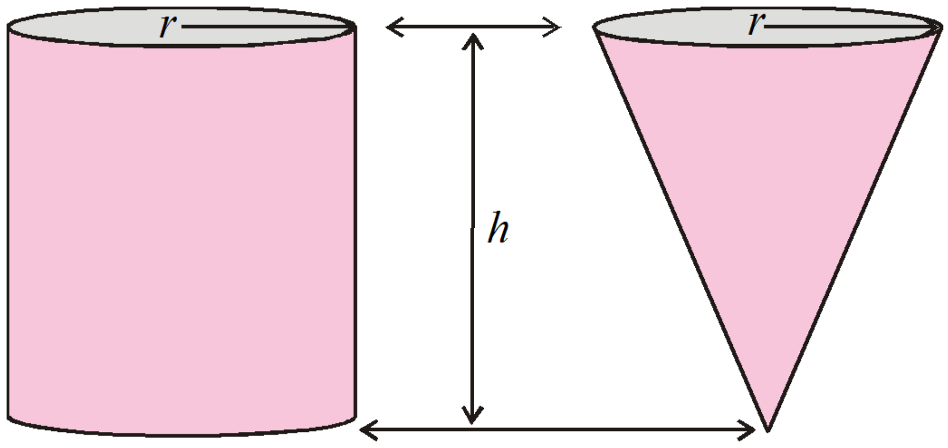
قاعدہ کا رقبہ + منحی سطح کا رقبہ = مخروط کا کل سطحی رقبہ

$$= \pi rl + \pi r^2$$

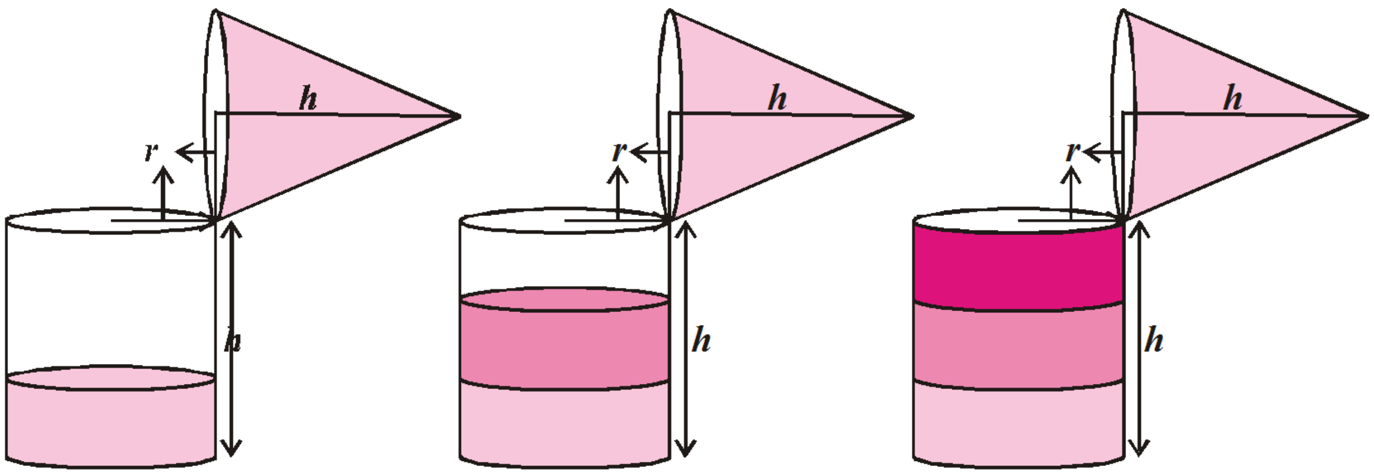
$$= \pi r\ (l + r)$$

کل سطحی رقبہ $= \pi r\ (l + r)$

قائم مخروط کا حجم



مساوی نصف قطر اور بلندی والے استوانہ اور مخروط لیں۔ ذیل کا تجربہ کریں۔ آپ کو مخروط کا حجم معلوم کرنے میں سہولت ہوگی۔



(i) مخروط میں کنارے تک پانی بھریئے اور اس کو کھوکھلے استوانہ میں انڈیل دیجیئے کچھ حصہ بھرے گا۔

(ii) دوبارہ مخروط میں کنارے تک پانی بھریئے اور اس کو کھوکھلے استوانہ میں انڈیل دیجیئے۔ مکمل نہیں بھرے گا۔

(iii) تیسری مرتبہ مخروط میں کنارے تک پانی بھریئے اور اس کو کھوکھلے استوانہ میں انڈیل دیجیئے۔ تب دیکھیں پانی سے کھوکھلا استوانہ بھرے گا یا نہیں۔

اوپر کے مشاہدہ سے ہم نے مخروط اور استوانہ کے درمیان پائے جانے والے رشتہ کو محسوس کیا۔

ہم کہہ سکتے ہیں تین مرتبہ مخروط کا حجم سے ایک استوانہ ہوگا جہاں نصف قطر اور بلندی مساوی ہو۔

تب مخروط کا حجم استوانہ کے حجم کا ایک تہائی ہوگا۔

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$

جہاں r نصف قطر اور h بلندی ہے۔

مثال-1: مخروط کی بلندی معلوم کیجئے جس کا نصف قطر 5.6 سمر اور منحنی سطح کا رقبہ 158.4 سمر ہے۔

حل: نصف قطر = 5.6 سمر، بلندی = h ، مائل بلندی = l

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ = $\pi rl = 158.4$ مربع سمر

$$\Rightarrow \frac{22}{7}\times 5.6\times l = 158.4$$

$$\Rightarrow \qquad l = \frac{158.4\times 7}{22\times 5.6}$$

$$= \frac{18}{2} = 9\,\text{cm.}$$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$h^2 = r^2 - l^2$$

$$= 92 - (5.6)^2$$

$$= 81 - 31.36$$

$$h^2 = 49.64.$$

$$h = \sqrt{49.64}$$

$h = 7.05\text{cm}$ تقریباً

مثال-2: ایک مخروط ٹینٹ ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کی بلندی 3 میٹر اور قاعدہ کا قطر 8 میٹر ہے معلوم کیجئے

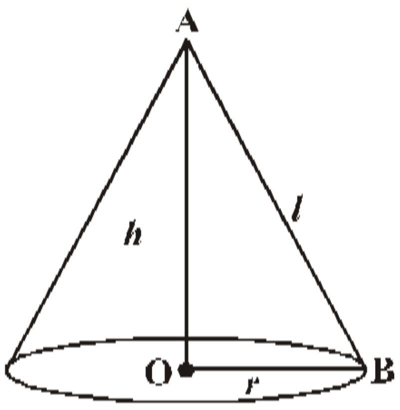
(i) ٹینٹ بنانے کے لئے کتنا کنویس درکار ہے جب کہ کنویس کی قیمت 70 روپے فی مربع میٹر ہے

(ii) ایک آدمی کو بیٹھنے کے لئے 3.5 مکعب میٹر جگہ درکار ہے۔ٹینٹ tent میں کتنے آدمی بیٹھ سکتے ہیں۔

حل: ٹینٹ کا قطر = 8 میٹر

$r = \frac{8}{2}$ 4 میٹر

بلندی $h = 3\text{m}$



مائل بلندی = $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{25} = 5\text{m}$$

$\pi lr =$ مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ

$= \frac{22}{7} \times 4 \times 5$

$\frac{440}{7}$ مربع میٹر

$\frac{1}{3}\pi r^2 h =$ مخروط کا حجم

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \times 3$

$= \frac{352}{7}$ مربع میٹر

(ii) ٹینٹ کے لئے کنویس کا خرچہ

= ٹینٹ کی منحنی سطح کا رقبہ × خرچہ

$= \frac{440}{7} \times 70$

= 4400 روپئے

(ii) ٹینٹ میں بیٹھنے والوں کی تعداد

$=$ ٹینٹ کا حجم / ہوا کی مقدار فی آدمی

$= \frac{352}{7} \div 3.5$

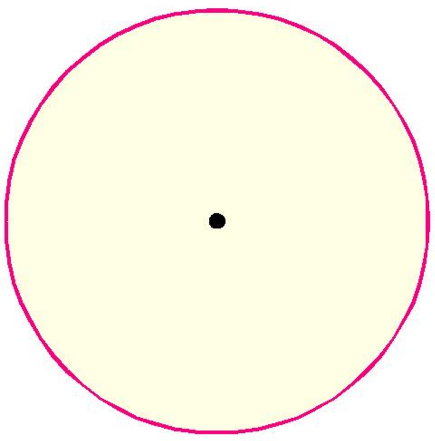
= 14.36 = 14 آدمی

اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

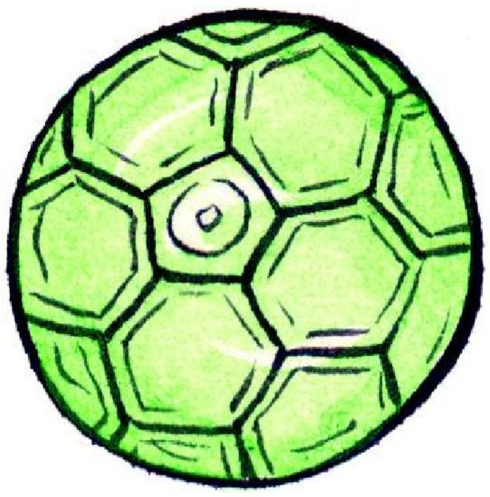
1. استوانہ کا حجم 308 مکعب سمر ہے اس کی بلندی 8 سمر ہے تب منحنی سطح کا رقبہ، کل سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔
2. اگر استوانہ کا نصف قطر کو دگنا کریں تب منحنی سطح کا رقبہ مساوی ہوگا۔ بلندی معلوم کیجئے۔
3. ایک دھاتی مکعب کے ابعاد 22 سمر × 15 سمر × 7.5 سمر ہیں کو پگھلا کر استوانہ بنایا گیا جس کی بلندی 14 سمر ہے اس کا نصف قطر معلوم کیجئے۔

4. ایک دائروی باؤلی کا اندرونی نصف قطر 3.5 میٹر ہے اور یہ 10 میٹر گہری ہے۔ معلوم کیجئے
(i) اندرونی منحنی سطح کا رقبہ
(ii) اس کو پلاسٹرنگ کروانے کا خرچ کیا ہوگا جب کہ خرچ 40 روپئے فی مربع میٹر ہو۔
5. ایک مخروط کا قاعدہ 38.5 مربع سمر ہے اس کا حجم 77 مکعب سمر بلندی معلوم کیجئے۔
6. ایک مخروط کا حجم 462 مکعب میٹر ہے۔ اس کے قاعدہ کا نصف قطر 7 میٹر ہے بلندی معلوم کیجئے۔
7. ایک مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ 308 مربع سمر ہے اور مائل بلندی 14 سمر ہے۔ معلوم کیجئے
(i) قاعدہ کا نصف قطر
(ii) مخروط کا کل سطحی رقبہ
8. ایک 15 سمر نصف قطر دائرے سے ایک قطاع دائرہ کاٹا گیا جس کا زاویہ 2160 ہے اس کو ملانے پر ایک مخروط حاصل ہوگا اس کا حجم معلوم کیجئے۔
9. ایک مخروط کا منحنی سطرح کا رقبہ $1159\frac{5}{7}$ مربع سمر ہے قاعدہ کا رقبہ $254\frac{4}{7}$ مربع سمر ہے حجم معلوم کیجئے۔

5.2.5 کرّہ


(i)


(ii)


(iii)

اوپر بتائے گئے اشکال سے آپ واقف ہیں۔ آپ بتا سکتے ہیں ان میں کیا فرق ہے۔

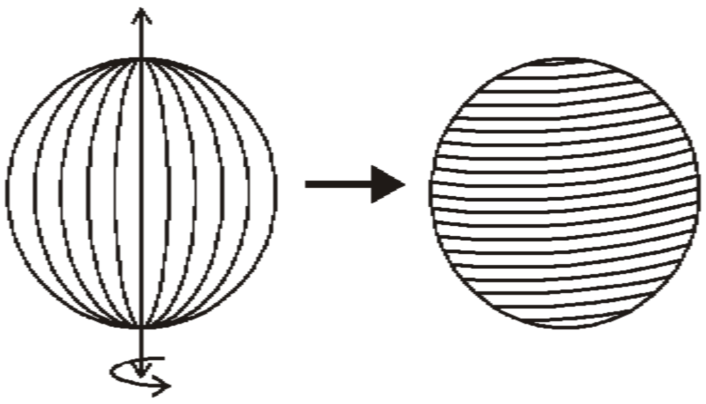
شکل (i) دائرہ' اس کو ہم آسانی سے اُتار سکتے ہیں چونکہ یہ مستوی شکل ہے۔ دائرہ ایک مستوی بند شکل ہے جو مرکز سے مساوی فاصلوں سے نقاط سے بنتی ہے اور اس کو نصف قطر کہتے ہیں۔

باقی ٹھوس اجسام ہیں۔ یہا شکال دیکھنے میں دائرہ نما ہیں اس کو ''کرّہ'' کہتے ہیں۔

کرّہ تین پیمائشی 3D شکل ہے جو فضا میں نقاط سے بنتی ہے ایک نقطہ سے مساوی فاصلہ پر ہوتی ہے اس کو کرّہ کا مرکز کہتے ہیں۔ مرکز سے منحنی سطح کا فاصلہ کرہ کا نصف قطر کہلاتا ہے۔

کرہ کا سطحی رقبہ

ذیل کے مشغلہ سے کرہ کا سطحی رقبہ معلوم کریں گے۔



tennis بال لیجئے اور اس کے اطراف تار کو ٹیپ کی مدد سے لگائیے۔ تار کا پہلا اور آخری نقطہ نوٹ کیجئے آہستہ سے تار کو نکال دیجئے۔

کرہ کا نصف قطر سے چار دائرے بنائیے جس کے نصف قطر مساوی ہو۔ بال کے اطراف تار لگائیے۔

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

تار، جو کرہ (بال) کے اطراف مکمل طور پر لگایا گیا ہو وہ چار دائروں کو مکمل کرنے کے لئے کافی ہے۔ کرہ کے نصف قطر کے مساوی ہے۔

اس سے یہ سمجھ سکتے ہیں کہ کرہ کا سطحی رقبہ، دائرہ کے چار گنا کے مساوی ہوتا ہے۔ جب کہ نصف قطر مساوی وی ہو۔

کرہ کا سطحی رقبہ = $4\times$ دائرہ کا رقبہ

$= 4\pi r^2$

کرہ کا سطحی رقبہ $= 4\pi r^2$ (جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے)

کرّہ کا حجم

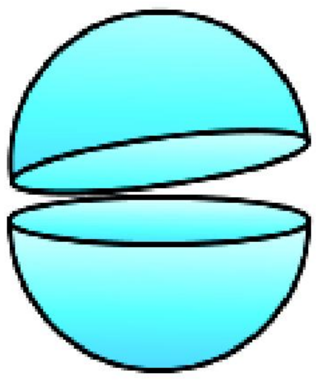
کرہ کا حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (جہاں r کرہ کا نصف قطر ہے)

نصف کرّہ

ایک ٹھوس کرّہ لیجئے اس کو درمیان سے کاٹئے جو مرکز سے گزرے۔

تب یہ دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوگا شکل میں بتایا گیا ہے

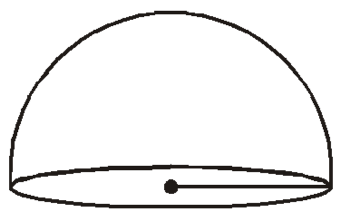
ہر مساوی حصہ ''نصف کرّہ'' کہلاتا ہے۔



کرہ میں صرف ایک منحنی سطح ہوتی ہے جس کو کاٹنے پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتی ہے منحنی سطح بھی دو حصوں میں تقسیم ہوگا۔

نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ کے متعلق آپ کیا سوچتے ہیں۔

نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ، کرہ کے منحنی سطح کے رقبہ کا نصف ہوگا۔



نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times$ کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$$

$$= 2\pi r^2$$

$\therefore$ نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi r^2$

نصف کرہ کا قاعدہ دائروی شکل کا ہے۔

جس کا رقبہ $= \pi r^2$

اب ہم منحنی سطح کا رقبہ اور قاعدہ کا رقبہ جمع کریں تب ہم کو کل سطحی رقبہ حاصل ہوگا۔

نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $=$ منحنی سطح کا رقبہ $+$ قاعدہ کا رقبہ

$$= 2\pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 3\pi r^2$$

نصف کرہ کا کل سطحی رقبہ $= 3\pi r^2$

نصف کرہ کا حجم $= \frac{1}{2} \times$ کرہ کا حجم

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3.$$

مثال-1: ایک کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ 154 مربع سمر ہے نصف قطر معلوم کیجئے۔

حل: منحنی سطح کا رقبہ $= 4\pi r^2$

$$4\pi r^2 = 154$$

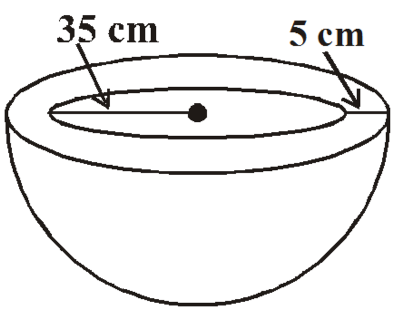
$$4\times\frac{22}{7}\times r^2 = 154$$

$$r^2 = \frac{154\times 7}{4\times 22} = \frac{7^2}{2^2}$$

$$r = \frac{7}{2}$$

$r = 3.5$ سم

مثال-2: ایک نصف کرہ کا کٹورا بنایا گیا جس کی موٹائی 5 سم ہے۔ اگر اندرونی نصف قطر 35 سم ہے تب کٹورے کا سطحی رقبہ معلوم کیجئے۔



حل: فرض کیجئے کہ R بیرونی نصف قطر ہے اور r اندرونی نصف قطر ہے

حلقہ کی موٹائی = 5 سم

$\therefore\ R = (r + 5)$ cm

$= (35 + 5)$ cm

$= 40$ cm.

کل سطحی رقبہ = اندرونی نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ + بیرونی نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ + حلقہ کا رقبہ

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= \pi\,(2R^2 + 2r^2 + R^2 - r^2)$

$= \pi(3R^2 + r^2)$

$= \frac{22}{7}(3\times 40^2 + 35^2)$ مربع سم

$= \frac{6025\times 22}{7}$ مربع سم

$= 18935.71$ مربع سم (تقریباً)

مثال-3: ایک نصف کرہ نما کٹورہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے اس کے اندر پانی کا حجم کیا ہوگا؟

حل: کٹورے کے اندر کی مقدار = نصف کرہ کا حجم

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{22}{7}\times 3.5\times 3.5\times .35 \text{ cm}^3$$

= 89.8 مکعب سمر (تقریباً)

مشق

1. کرہ کا نصف قطر 3.5 سمر ہے منحنی سطح کا رقبہ اور حجم معلوم کیجئے۔

2. ایک کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ $108\frac{2}{7}$ مربع سمر ہے اس کا حجم معلوم کیجئے۔

3. ایک گلوب میں euator (خط استواء) کا طول 44 سمر ہے۔ منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے۔

4. ایک کروی بال کا قطر 21 سمر ہے۔ اس طرح 5 بال بنانے کے لئے کتنا چمڑا درکار ہوگا۔

5. دو کرّوں کے نصف قطر میں 2:3 کی نسبت ہے۔اس کے منحنی سطح کا رقبہ اور حجم کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔

6. کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجئے جس کا نصف قطر 10 سمر ہے $(\pi = 3.14)$

7. کروی شکل کا غبارہ کا قطر 14 سمر سے 28 سمر ہوتا ہے (ہوا بھرنے پر) منحنی سطح کا رقبہ کے درمیان نسبت معلوم کیجئے۔
(دونوں صورتوں میں ہوا بھرنے سے پہلے اور بعد میں)

8. ایک دھاتی کرہ کی موٹائی 0.25 سمر ہے۔کرہ کا اندرونی نصف قطر 5 سمر ہے بیرونی اور اندرونی سطحی رقبہ میں نسبت معلوم کیجئے۔

9. ایک بال کا قطر 2.1 سمر ہے۔استعمال ہونے والی دھات کی کثافت 11.34 گرام فی مکعب سمر ہے۔بال کا وزن کیا ہوگا؟

10. ایک دھاتی استوانہ کا قطر 5 سمر اور بلندی $3\frac{1}{3}$ سمر ہے کو پگھلا کر کرہ بنایا گیا۔کرہ کا قطر معلوم کیجئے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

- مکعب اور مکعب نما کے 6 رخ ہوتے ہیں جس میں 4 طرفی رخ، ایک اوپر کا رخ اور ایک قاعدے کا رخ
- مکعب کا طول l، عرض b اور بلندی h ہو تو

کل سطحی رقبہ $= 2(lb + bh + lh)$

منحنی سطحی رقبہ $= 2h(l + b)$

حجم $= lbh$

- مکعب نما کے ایک کنارہ کا طول l ہو تب

کل سطحی رقبہ $= 6l^2$

منحنی سطح کا رقبہ $= 4l^2$

حجم $= l^3$

- ایک استوانہ، دو دائروی اور ایک منحنی سطح پر مشتمل ہوتا ہے۔ اگر خطی خط قاعدہ کے مرکز سے اوپر تک عمودوار ہو تو وہ ''قائم دائروی استوانہ'' کہلاتا ہے۔
- اگر قائم دائروی استوانہ کا نصف قطر r اور بلندی h ہو تب

کل سطحی رقبہ $= 2\pi rh$

منحنی سطح کا رقبہ $= 2\pi r (r + h)$

حجم $= \pi r^2 h$

- مخروط ایک جیومٹری شکل ہے جس کا قاعدہ دائرہ ہے۔ اوپر ایک نقطہ ہوگا۔ اگر قاعدہ کے مرکز پر عمودوار ہو تو ''قائم دائروی مخروط'' کہلاتا ہے۔
- نقطہ سے قاعدہ کے کسی بھی حصہ پر قطع کرے وہ ''مائل بلندی'' کہلاتا ہے۔

$$l^2 = h^2 + r^2$$

جہاں h بلندی اور r نصف قطر ہے۔

- اگر نصف قطر r، بلندی h اور مائل بلندی l ہو تب

$$\text{کل سطحی رقبہ} = \pi r l$$

$$\text{منحنی سطح کا رقبہ} = \pi r (l + r)$$

$$\text{حجم} = \frac{\ }{\ } \pi r^2 h$$

- ایک مخروط کا حجم، استوانے کے حجم کا تہائی ہوتا ہے جب کہ نصف قطر اور بلندی مساوی ہو۔
- ایک کرہ جیومٹری شکل ہے۔ ایک نقطہ سے مساوی فاصلہ پر فضا میں پایا جاتا ہے نقطہ مرکز کہلاتا ہے اور فاصلہ نصف قطر کہلاتا ہے۔
- اگر کرہ کا نصف قطر r ہو تب

$$\text{کل سطحی رقبہ} = 4\pi r^2$$

$$\text{کرّہ کا حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

- ایک کرہ کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ ہر حصہ نصف کرہ کہلاتا ہے۔
- نصف کرہ کا نصف قطر r ہو تب

$$\text{منحنی سطح کا رقبہ} = 2\pi r^2$$

$$\text{کل سطحی رقبہ} = 3\pi r^2$$

$$\text{حجم} = \frac{4}{3} \pi r^2$$

سبق 5.3

ٹھوس اجسام کا مرکب

Combination of Solids

5.3.0 اکتسابی مقاصد

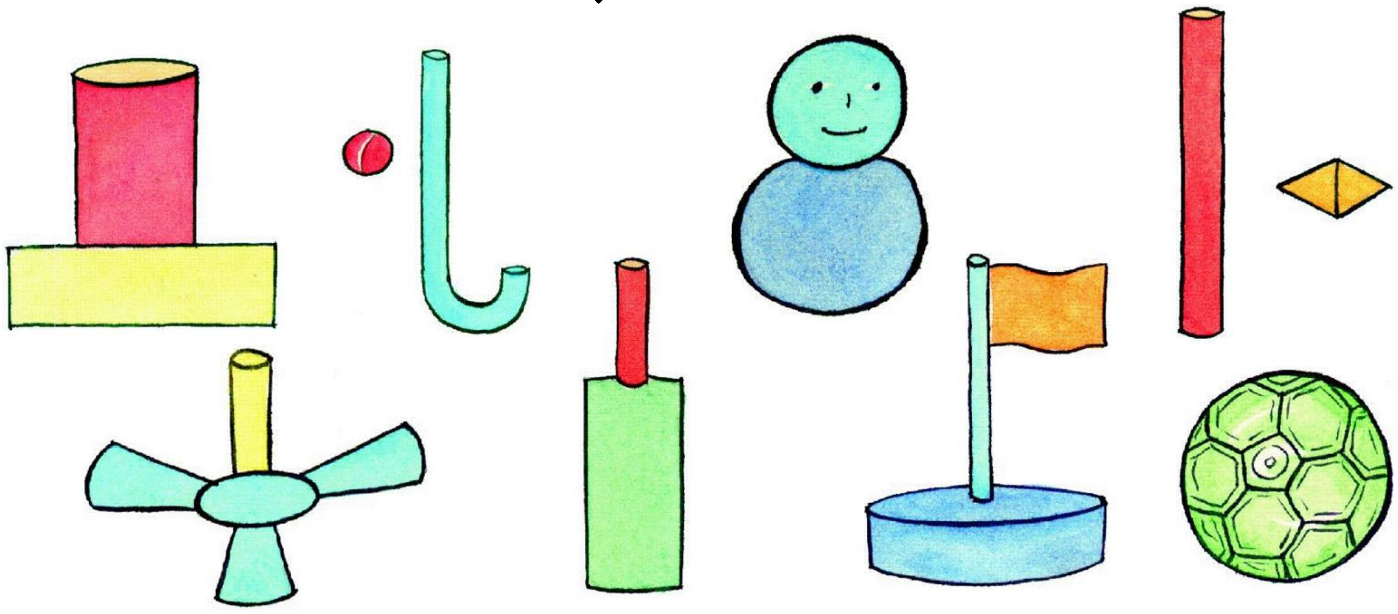
اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- دیئے گئے دو ٹھوس اجسام کا سطحی رقبہ، حجم معلوم کریں گے اور حل کریں گے۔
- سادہ ٹھوس اجسام کا حجم، رقبہ معلوم کریں گے۔ دو ٹھوس اجسام کا مرکب معلوم کریں گے اور تقابل کریں گے، وجہ بتائیں گے۔
- ٹھوس اجسام کے ضابطہ میں استعمال ہونے والے ارکان کو سمجھ پائیں گے۔
- ٹھوس اجسام کے سوالات کو مختلف طریقوں سے جیومٹری، الجبرا، حسابی تصور کے ذریعہ حل کریں گے۔

5.3.1 تعارف

مرکب ٹھوس اجسام کا منحنی سطح کا رقبہ

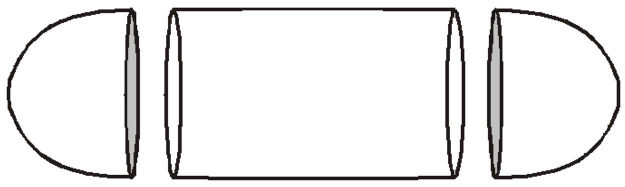
ہم دیکھتے ہیں کہ مختلف اشکال (دو یا دو زائد مرکب اشکال جو ہمارے اطراف پائے جاتے ہیں۔ گھر کے پلر، پانی کے حوض، استوائی و مکعبی، کرکٹ بیاٹ کی ہینڈل استوانی شکل کی اور مختلف اشکال جو پائے جاتے ہیں۔ چند ذیل میں درج ہیں۔



مشغلہ:

تصاویر میں چند اشکال ہم جانتے ہیں۔مزید 5 مرکب ٹھوس اجسام کو دیکھئے۔اس کے منحنی سطح اور حجم معلوم کریں گے۔

ہم ٹھوس اجسام جیسے کرہ، استوانہ، مخروط کا روزمرہ زندگی میں مشاہدہ کرتے ہیں۔لکڑی کے اشیا، گھر کے اشیا، دوائی کے کیپسل، بوتلیں، تیل کے ڈبے وغیرہ۔ ہم روزمرہ زندگی میں آئسکریم کھاتے ہیں۔ ان میں کتنے ٹھوس اشکال ہیں؟ عام طور پر مخروط اور کرہ بنتے ہیں۔



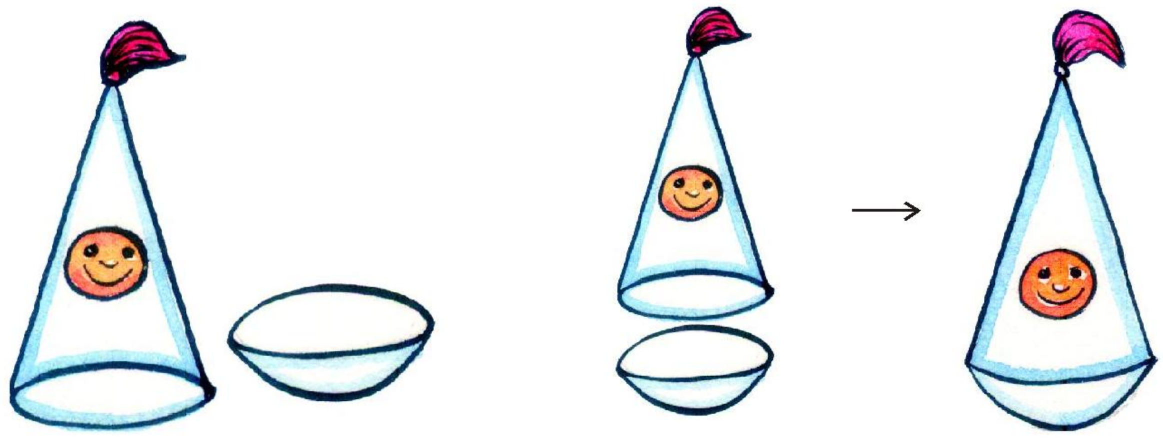
دوسرے مثال لیجئے۔ تیل کا ٹینکر، پانی کا ٹینکر۔ یہ ایک سادہ شکل شئے ہے؟ استوانی شکل جس کے دونوں طرف نصف کرہ سے بنا ہوا ہے۔

اگر ہم نئے شئے کے منحنی سطح کا رقبہ معلوم کرنا ہوتو، ہم نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ اور استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ، نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ + استوانہ کا منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ = نئے ٹھوس پر کل سطح رقبہ

دوسری مثال دیکھئے

ہم ایک کھلونا بنانا چاہتے ہیں۔نصف کرہ پر مخروط رکھ کر۔اس کے مرحلے دیکھئے۔

سب سے پہلے ہم مخروط اور نصف کرہ جس کے نصف قطر مساوی ہوتا ہے۔کھلونے کا منحنی مرحلے ذیل میں درج ہیں۔



آخری شکل مکمل کھولنے کی ہے۔ اس کو کتنا رنگ لگے گا؟ کھلونے کے منحنی سطح پر رنگ کرنے کے لئے کتنا رنگ ہوگا۔

اس کے لئے ہم کو کل سطح رقبہ درکار رہے۔اس کے لئے نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ اور مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ پر مشتمل ہوگا۔

مخروط کا منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرہ کا منحنی سطح رقبہ = کھلونے کا کل سطحی رقبہ

بالا ضابطہ تمام مرکب ٹھوس اجسام کے لئے مناسب ہے؟ بحث کیجئے۔

مثال-1: یوم پیدائش موقع پر سُریش کو کھیلنے کا لٹو ملا۔ Crayons سے اس کو رنگ کرنا چاہتا ہے۔ لٹو کی شکل مخروط پر نصف کرہ ہے۔لٹو کی بلندی 5 سمر اور قطر 3.5 سمر ہے۔ رنگ کرنے کا رقبہ معلوم کیجئے۔ $\left(\pi = \dfrac{22}{7}\right)$

حل: کھلونا لٹو مخروط اور نصف کرہ پر مشتمل ہے جس کا نصف قطر مساوی ہے۔

کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ + نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ = لٹو کا کل سطحی رقبہ

$$= 2\pi r^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2$$

نصف کرہ کی بلندی (نصف قطر) = لٹو کی بلندی = مخروط کی بلندی

نصف کرہ کا منحنی سطح کا رقبہ $= \left(5 - \dfrac{3.5}{2}\right) = 3.25 \text{ cm}$

مائل بلندی $= \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2} = 3.7$ سمر (تقریباً)

مخروط کی منحنی سطح کا رقبہ $= \pi r l$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7 \text{ cm}^2$$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ cm}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.5 + 3.7)\ \text{cm}^2$$

$$= 11 \times 0.5 = 7.2\ \text{cm}^2$$

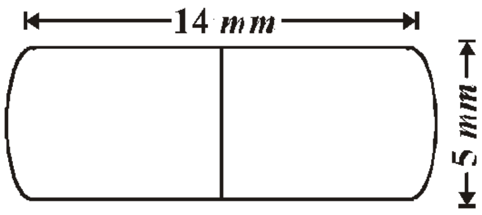
= 39.6 مربع سمر (تقریباً)

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ایک کھلونا مخروط پر نصف کرہ ہے جس کا قطر اور بلندی بالترتیب 6 سمر اور 14 سمر ہے۔ کھلونے کا منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$
2. ایک ٹھوس شکل قائم دائروی استوان ہے جس کے اوپر نصف کرہ اور دوسری طرف مخروط ہے۔ قاعدہ کا نصف قطر 8 سمر ہے اور بلندی استوانہ اور نصف کرہ، مخروط بالترتیب 10 سمر اور 6 سمر ہے۔ شکل کا کل سطح رقبہ معلوم کیجیے۔
3. 64 مکعب سمر والے دو مکعب جو ایک دوسرے سے جوڑے ہوئے ہیں۔ ان کا منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔

مشق

1. دو مکعب 64 مکعب سمر والے ایک دوسرے سے جوڑے ہوئے ہیں ان کا منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔
2. ایک ٹینک استوانہ پر نصف کرہ ہے۔ استوانہ کا بیرونی قطر 1.4 میٹر اور بلندی 8 میٹر ہے تب بیرونی سطح پر رنگ کرنے کا خرچ معلوم کیجیے جب کہ قیمت 20 روپے فی مربع میٹر ہے۔
3. ایک کرہ، ایک استوانہ اور ایک مخروط مساوی نصف قطر اور مساوی بلندی ہے ان کے حجم میں نسبت معلوم کیجیے۔
4. ایک دوائی کیپسل استوانہ، دو نصف کرہ پر مشتمل ہے۔ کیپسل کی لمبائی 14 ملی میٹر اور موٹائی 5 ملی میٹر ہے۔ منحنی سطح کا رقبہ معلوم کیجیے۔



اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

- مرکب ٹھوس کا حجم، ٹھوس کے اجسام کے اشکال کے حجم کا مجموعہ ہوتا ہے۔
- مرکب ٹھوس اجسام کا منحنی سطح کا رقبہ، ٹھوس اجسام کے اشکال کے منحنی سطح کے رقبہ کا مجموعہ ہوتا ہے۔

سبق
6.0

علم مثلث — اکائی 6

علم مثلث۔ اس کا اطلاق
Trigonometry - Its Applications

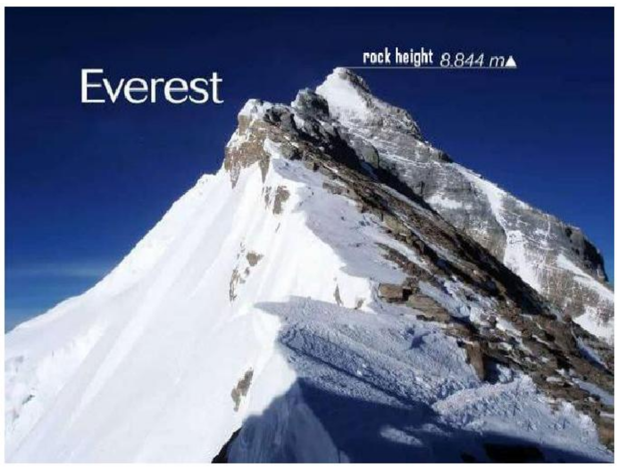
6.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- علم مثلث کی نسبتیں لکھ پائیں گے۔ حادہ مثلث اور قائم مثلث سے واقف ہوں گے۔
- قائم الزاویہ مثلث کے اضلاع اور زاویئے، نسبتیں سے واقف ہوں گے۔
- زاویئے $0^{o}, 30^{o}, 45^{o}, 60^{o}, 90^{o}$ کی قدریں معلوم کرنے کے قابل ہوں گے۔
- بلندی اور فاصلہ پر مشتمل سوالات حل کریں گے۔

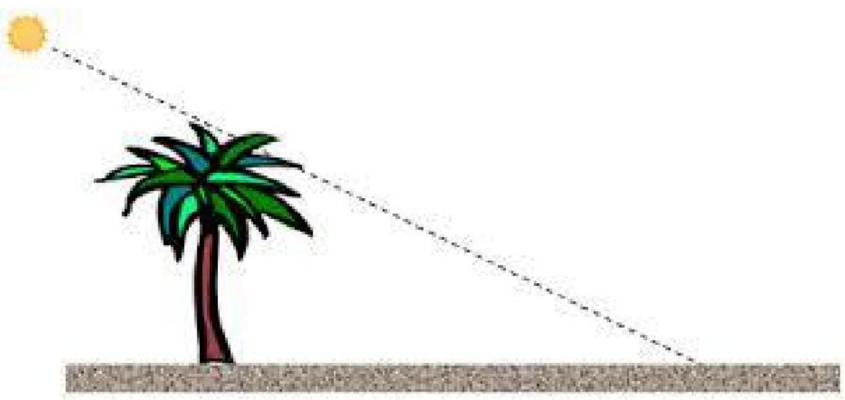
6.1 تعریف

آپ نے سنا ہوگا کہ سب سے بڑی ہمالیہ پہاڑ کی چوٹی کی بلندی 8.848 میٹر یا 29,029 فیٹ ہے۔



سب سے بلند آبشار کی بلندی جو عادل آباد میں کوٹلہ آبشار سے مشہور ہے کی بلندی 45 یا 150 فٹ ہے۔

یہ ممکن ہے کہ اس کی بلندی ہم ٹیپ سے پیائش کریں؟ نہیں ہم خیالی طور پر حاصل کریں گے؟



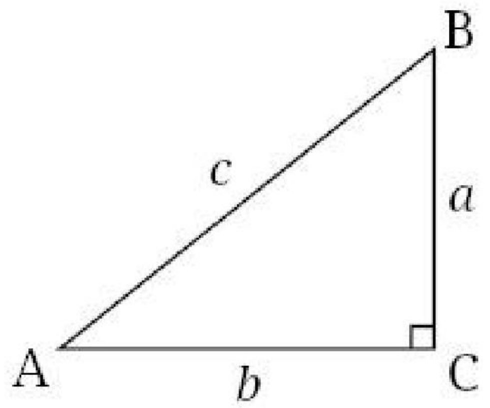
اسی طرح ہم ناریل کو جھاڑ کی دیکھتے ہیں ۔ اس کی بلندی کیا ہوگی۔

تمام صورتوں میں بحث کرنے سے اور بھی صورتوں میں بلندی اور فاصلہ ریاضی کے مثلثات سے معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ ریاضی کی ایک شاخ ''علم مثلث'' Trignometry ہے۔

Trignometry کا لفظ گریک سے لیا گیا 'Gonan' 'Three' کا مطلب ضلع اور 'Metron' کا معنی ''پیائش''

اس طرح Trignometry کا مطلب زاویہ اور ضلعوں کی پیائش مثلثات کی۔ یہاں پر ہم قائم الزاویہ مثلث پر مطالعہ کریں گے۔

6.2 علم مثلث کی نسبتیں ۔معنٰی



فیثا غورث کا مسئلہ (لدھیانہ اصول):

قائم الزاویہ مثلث: ایسا مثلث جس کا ایک زاویہ 900 ہو' قائم الزاویہ مثلث کہلاتا ہے ۔ متصلہ شکل میں DABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جو نقطہ C پر قائمہ ہے۔ یعنی

$\angle C = 90^0$

ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں قائم الزاویہ مثلث میں قائم زاویہ کے مقابل ضلع سب سے بڑا ضلع ہوتا ہے جو ''وتر'' کہلاتا ہے۔ ضلع AB وتر ہوگا۔

فیثا غورث مسئلہ کے مطابق ''قائم الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع' باقی دو ضلعوں کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔''

فیثا غورث کے مطابق $AB^2 = BC^2 + AC^2$

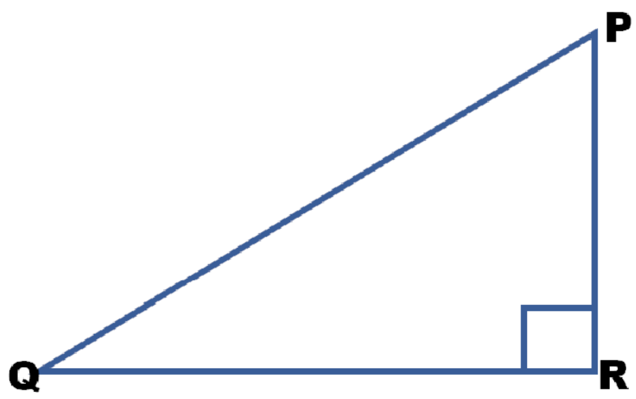
اگر $AB = c$ ' $BC = a$ اور $AC = b$ تب

$$c^2 = a^2 + b^2$$

اس مسئلہ کی مدد سے دو ضلع دیئے جائیں تیسرا ضلع معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال-1: ΔPQR میں نقطہ R پر قائم ہے۔ اگر PR =7سمر اور QR = 24سمر تب PQ کا طول معلوم کیجئے۔

ایک سیڑھی دیوار سے 7فٹ رکھی ہے۔24 میٹر کے فاصلہ پر ٹکی ہوئی ہے۔سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجئے۔



ΔPQR ایک قائم الزاویہ مثلث ہے

جہاں $\angle R = 90^0$ PQ وتر ہے

PR = 7سمر   QR = 24سمر

فیثا غورث کے مسئلہ کے مطابق $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$= 72 + 242$

$= 49 + 576 = 625 = 25^2$

اگر $PQ^2 = 25^2$ تب $PQ = 25$

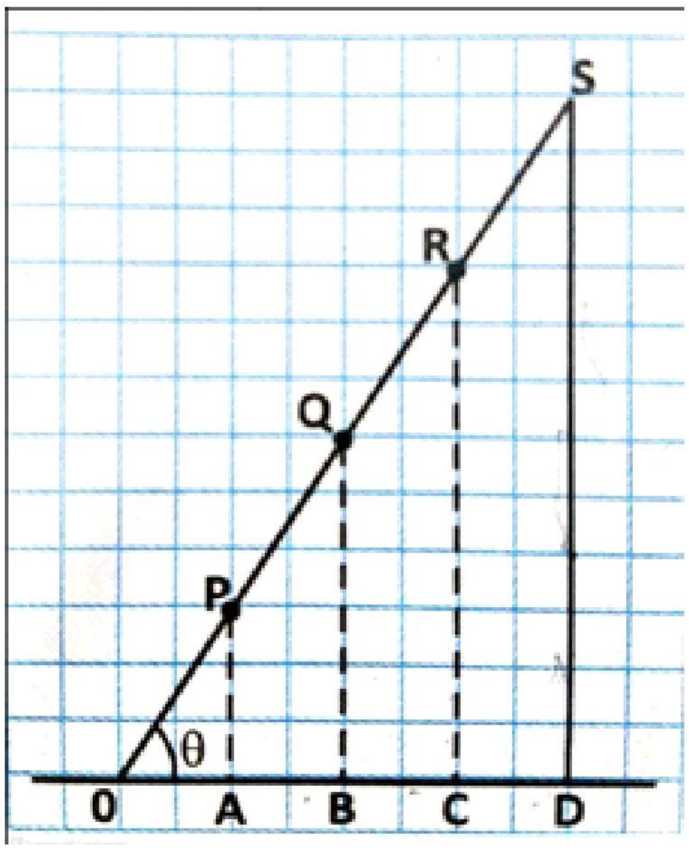
مثلث کے ضلع اور زاویے میں رشتہ

مشغلہ:

ہم جانتے ہیں قائم الزاویہ

مثلث میں OA ایک قاعدہ

PA عمودوار اور OP وتر ہے۔

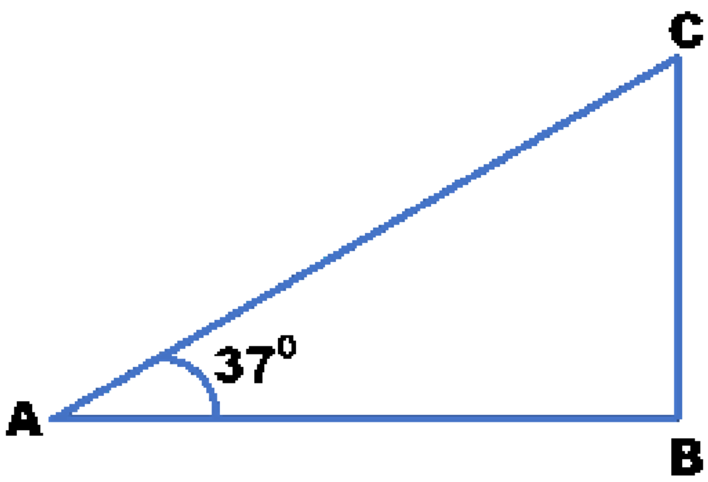


نسبت	بلندی(سمر)	قاعدہ(سمر)	نشان سلسلہ
$\frac{2}{3}$	3	2	1.
$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	6	4	2.
$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	9	6	3.
$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$	12	8	4.

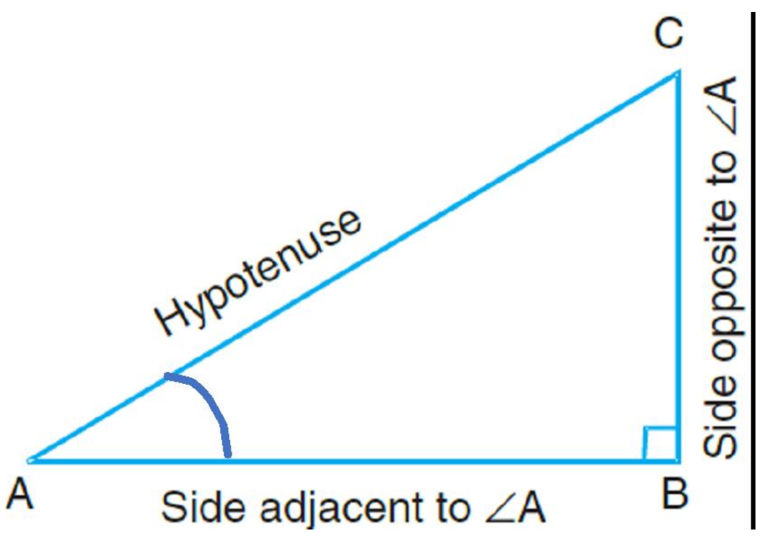
اسی طرح حادہ زاویوں میں رشتہ ہم اخذ کرسکتے ہیں۔

وتر 7 سمر 10 سمر سے 15 سمر سے 37^0 زاویے لے کر مشغلہ دہرایئے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ زاویہ 37^0 سے ضلعوں میں مستقل نسبت یہ ہوگی۔

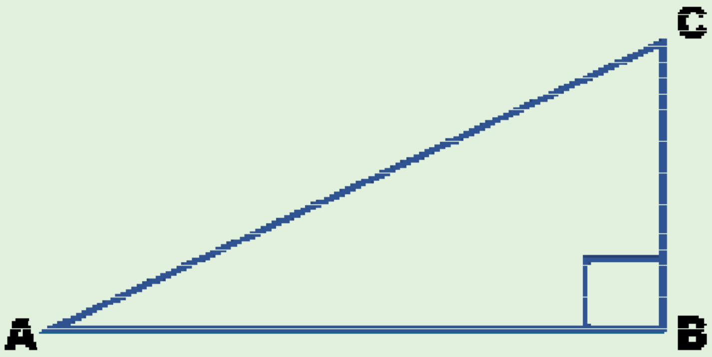


Length of AC hypotenuse	Length of BC height
5cm	3cm
10cm	6cm
15cm	9cm
20cm	12cm
25cm	15cm

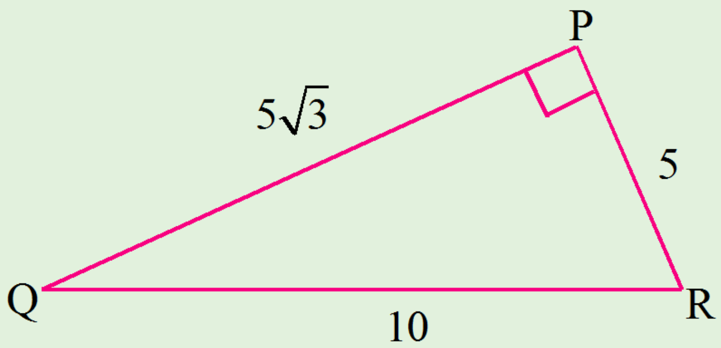


$\angle C$ پر حادہ زاویہ ' AB قابل کا ضلع $\angle C$ کا ضلع BC کا متصلہ ضلع $\angle C$ AC وتر ہے۔

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے



1. متصلہ شکل میں وتر، $\angle C$ کا مقابل کا ضلع، $\angle A$ کا متصلہ ضلع لکھیے۔
2. متصلہ شکل میں دیکھ کر پیمائشات لکھیے۔



(i) $\angle Q$ کا مقابل کا ضلع اور $\angle Q$ کا متصلہ زاویہ، وتر لکھیے۔

(i) $\angle R$ کے مقابل کا ضلع $\angle R$ کا متصلہ ضلع اور وتر۔

3. ΔPQR دیا گیا ہے جہاں $\angle P = 90^0$ $\angle Q = Q$ $PQ = 17$ سمر، $QR = 8$ سمر، Q کے مقابل کا ضلع، متصلہ ضلع اور وتر لکھیے۔

ہم جانتے ہیں کہ ''قائم الزاویہ مثلث میں حادہ زاویہ کے ساتھ مستقل نسبت رکھتے ہیں۔

علم مثلث کی نسبت

ΔABC ایک قائم زاویہ مثلث ہے $\angle A$ قائمہ ہے تب علم مثلث کی نسبت اس طرح ہوگی۔

$\angle A$ اور وتر متصلہ شکل میں مستقل نسبت میں ہیں نسبت کا sin A ہے۔

$$\sin A \quad \frac{\angle A \text{ کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

اس طرح $\angle A$ کا متصلہ ضلع اور وتر سے دوسری نسبت حاصل ہوگی

$$\text{cosine } A \quad \frac{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

ΔABC میں $\angle A$ کا مقابل کا ضلع اور $\angle A$ کا متصلہ ضلع سے ایک اور نسبت حاصل ہوگی جس کا نام Tangent A ہے

$$\text{tangent } A \quad \frac{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}} = \frac{BC}{AB}$$

اوپر کے بیان کردہ علم مثلث کے نسبتیں sin A، cosine A، Tangent A کو مختصراً اس طرح لکھ سکتے ہیں

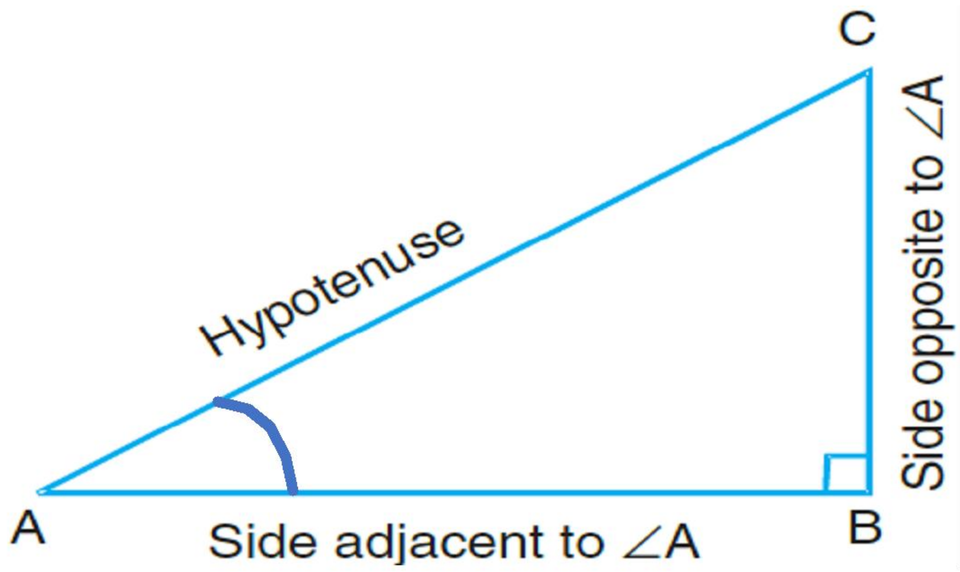
sin P ، cos A ، Tan A

اس طرح $\angle A = \theta$ تب نسبتیں اس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

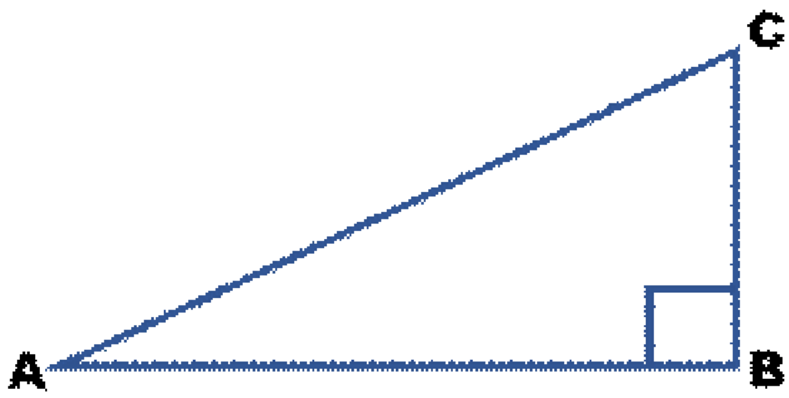


علم مثلث کی نسبتیں زاویہ پر منحصر ہوتی ہیں۔ زاویے پر مختلف ہوں تو نسبتیں بھی مختلف ہوں گی۔ مثال کے طور پر $\sin 30^0$ کی قدر $\sin 60^0$ سے کم ہوگی۔ یہاں پر علم مثلث کے نسبتیں مختلف ہوں گی جب کہ زاویے مختلف ہوں۔

زاویہ 30^0 ہو تو نسبتیں دیکھئے۔

ہم جانتے ہیں کہ" 30^0 کے مقابل کا ضلع "وتر کا نصف ہوتا ہے"

مثال-2: فرض کیجئے $\Delta\ A\ B\ C$ میں $\angle B = 90^0$ ، $\angle A = 30^0$ اور وتر 2 سمر لینے پر مقابل کا ضلع $BC = 1$ ہوگا

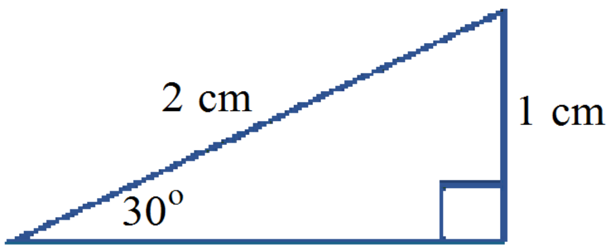


حل: تب $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= 2^2 - 1^2$

$= 4 - 1 = 3$

اگر $AB^2 = 3$ تب $AB = \sqrt{3}$ cm



آخرکار $AB = \sqrt{3}$ cm ، $BC = 1$ cm اور $AC = 2$cm

30^0 کے لئے علم مثلث کی نسبتیں اس طرح ہوں گی

$$\sin 30^o = \frac{\text{کے مقابل کا ضلع } 30^0}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\text{کے متصلہ ضلع } 30^0}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{\text{کے مقابل کا ضلع } 30^0}{\text{کے متصلہ ضلع } 30^0} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال-3: اگر 5 سمر = XZ اور 4 سمر = XY تب $\sin x$ ‘ $\cos x$ اور $\tan x$ معلوم کیجیے۔

ΔXYZ میں $\angle Y = 90^0$ ‘ $\angle X = x^0$

حل: سوال میں دیئے گئے پیائش کو متصلہ شکل میں بنایا گیا ہے۔

یہاں $\angle X = x^0$ ‘ 5 سمر = XZ اور 4 سمر = XY

ہم کو ضلع YZ معلوم کرنا ہے۔فیثا غورث کے مسئلہ کے مطابق

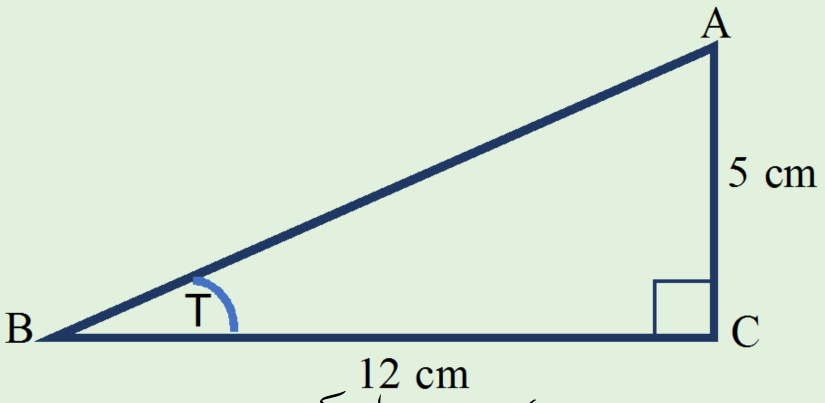
$$YZ^2 = XZ^2 - XY^2 = 5^2 - 4^2$$

$$= 25 - 16 = 9 = 3^2.$$

$$YZ^2 = 3^2 \Rightarrow YZ = 3\text{ سمر}$$

$$\sin x = \cos x = \frac{YZ}{XZ} = \frac{3}{5};\; \cos x = \frac{XY}{XZ} = \frac{4}{5} \text{ اور } \tan x = \frac{YZ}{XY} = \frac{3}{4}$$

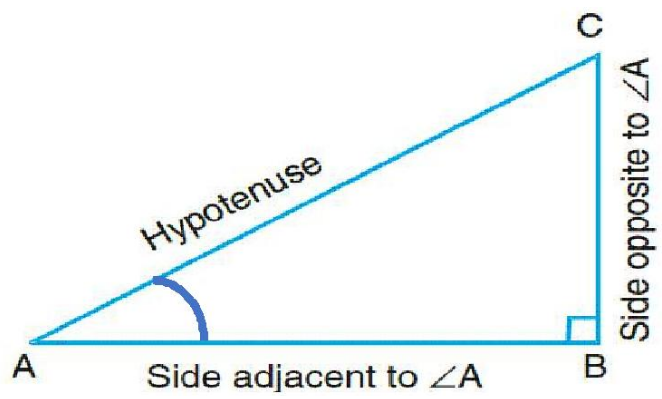
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے



1. متصلہ شکل سے قدریں معلوم کیجیے۔
   (i) sin A, cos A, tan A
   (ii) sin C, cos C, tan C
2. مثلث PQR میں R قائمہ ہے
   اور $\angle P = Q$ اگر 5 سمر = PR اور 12 سمر = QR تب $\sin\theta$ ‘ $\tan\theta$ معلوم کیجیے۔
3. مثلث ABC میں B قائمہ ہے۔ 10 سمر = AC اور 6 سمر = AB تب sin C ‘ cos C ‘ tan C کی قدریں معلوم کیجیے۔
4. ΔPQR میں π قائمہ ہے۔ 5 سمر = PQ اور 7 سمر = PR تب sin P ‘ cos P ‘ sin R ‘ cos R کی قدریں معلوم کیجیے اور sin P - cos R کی قدر بھی معلوم کیجیے۔

علم مثلث کے نسبتوں کے مقلوب

اوپر کے بیان کردہ نسبتوں کے مقلوب معلوم کریں گے۔ علم مثلث کے نسبتیں $\angle A$ قائمہ اس طرح ہے



$$\sin A = \frac{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}} = \frac{BC}{AB}$$

sin A، cos n، tan A کے مقلوب بالترتیب cosec A، Secant A، Contangent A ہے۔

مقلوب نسبتیں	بنیادی نسبتیں
cosecant A = وتر / ∠A کا مقابل کا ضلع = $\frac{AC}{BC}$	sin A = ∠A کا مقابل کا ضلع / وتر = $\frac{BC}{AC}$
secant A = وتر / ∠A کا متصلہ ضلع = $\frac{BC}{AB}$	cos A = ∠A کا متصلہ ضلع / وتر = $\frac{AB}{AC}$
cotangent A = ∠A کا متصلہ ضلع / ∠A کا مقابل کا ضلع = $\frac{BC}{AB}$	tan A = ∠A کا مقابل کا ضلع / ∠A کا متصلہ ضلع = $\frac{BC}{AB}$

نسبتیں Cosecart A، Secant A، Contangent A کو مختصراً cosec A، sec A، tan A لکھتے ہیں۔

اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ تب $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$

$\cos x = \frac{4}{5}$ تب $\sec x = \frac{5}{4}$

اور $\tan x = \frac{3}{4}$ تب $\cot x = \frac{4}{3}$

1. sin A یا sin ایک علامت ہے اس کو A یا θ سے علیحدہ نہیں کرسکتے ہیں۔
2. sin مساوی نہیں ہوگا θ sin x کے۔ اس طرح دوسرے نسبتوں میں عمل ہوگا۔
3. ہم علم مثلث کی نسبتیں، حقیقی اعداد ہوں گے۔

ہم جانتے ہیں کہ $(a \text{ عدد}) \times (a \text{ مقلوب عدد}) = 1$

اسی طرح $\sin x \times \operatorname{cosec} x = 1$

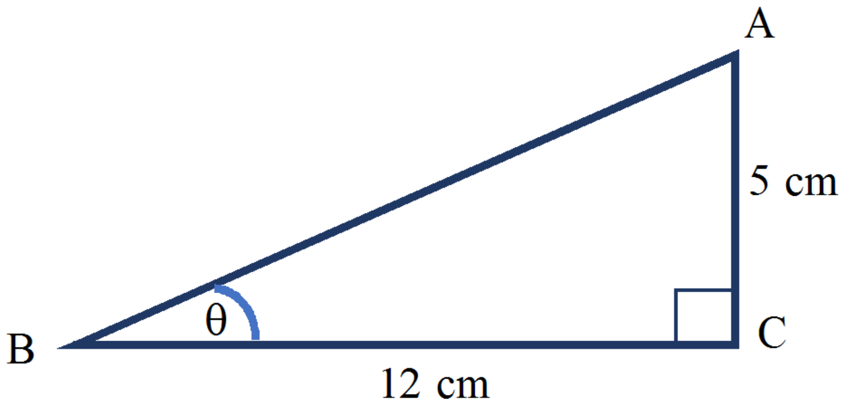
$\cos x \times \sec x = 1$

$\tan x \times \cot x = 1$

علم مثلث کے نسبتوں پر چند سوالات حل کریں گے۔

مثال-4: مثلث ABC میں ∠C قائمہ ہے۔ پیمائش ∠P، θ ۔ اگر AC = 5 سمر، BC = 12 سمر تب چھ نسبتیں لکھئے۔

حل: سوال میں دیئے گئے پیمائشات کو متصلہ شکل میں درج کریں گے۔



∠B = θ، AC = 5 سمر اور BC = 12 سمر ہم کو باقی ضلع AB (وتر) معلوم کرنا ہے۔

فیثاغورث کی مدد سے

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$$

$\therefore \quad AB = 13$ cm

$\tan\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{12}$ اور $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$ ، $\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$;

اگر $\sin\theta = \frac{5}{13}$ تب $\text{cosec}\ \theta = \frac{13}{5}$

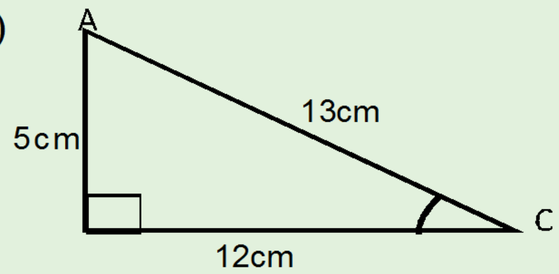
$$\cos\theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \sec\theta = \frac{13}{12}$$

$$\tan\theta = \frac{5}{12} \Rightarrow \cot\theta = \frac{12}{5}$$

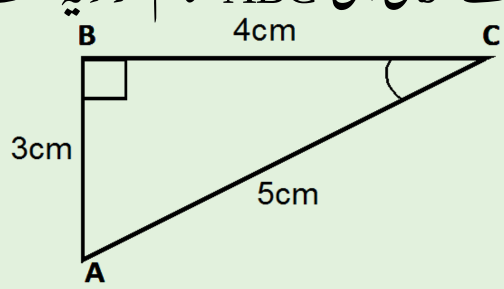
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ذیل کے اشکال میں ABC قائم الزاویہ مثلث میں $\angle B = 90^0$ تمام نسبتیں لکھیں۔

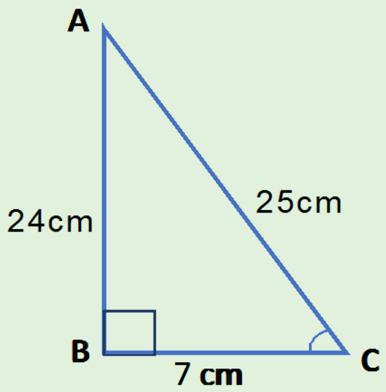
(i)



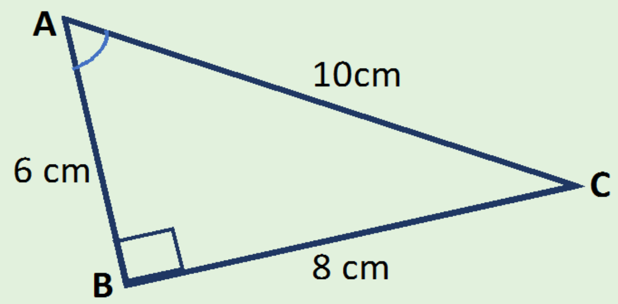
(ii)



(iii)



(iv)



2. اگر $\sin\theta = x/y$ ، $\cos\theta = z/y$ اور $\tan\theta = x/z$ تب $\text{cosec}\ \theta$ اور $\sec\theta$ اور $\tan\theta$ کی قدر لکھئے۔

3. ΔPQR میں R قائمہ ہے۔ $\angle Q = Z$ اگر PR = 15 سمر اور QR = 8 سمر تمام نسبتیں لکھئے۔

4. ΔABC میں $\angle B = 90^0$ ، BC = 5 سمر اور AB = 4 سمر اور AC = 41 تب sin A ، cos A ، tan A کی قدریں لکھئے۔

5. ΔABC میں $\angle B = 90^0$ اگر AB = 40 سمر ، BC = 9 سمر اور AC 41 سمر تب sin C ، cot C ، cos A ، cots A کی قدریں معلوم کیجئے۔

6. ΔABC میں $\angle B = 90^0$ اگر AB = BC = 2 سمر اور AC = 2 2 تب sec C ، cosec C اور cot C کی قدریں معلوم کیجئے۔

6.3 علم مثلث کے خصوصی زاویے

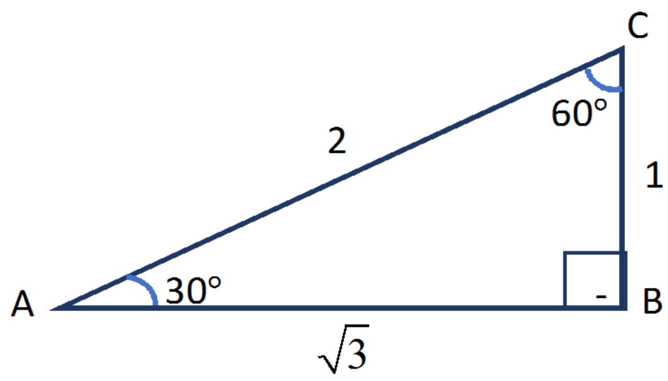
$(0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 70^0)$

ہم نے $\sin 30^0$ سے علم مثلث کے نسبتیں لکھیں۔

علم مثلث کے نسبتیں $\sin 30^0$ کے لئے

زاویے 30^0، 60^0، 90^0 کے مقابل کے ضلع کی نسبت مثلث میں $1 : \sqrt{3} : 2$

قائم زاویہ مثلث ABC میں $\angle B = 90^0$ ، $\angle A = 30^0$ ، $\angle C = 60^0$ ، اگر $\sin 300$ کے مقابل کا ضلع یعنی $BC = i$ ہوتو $AB = \sqrt{3}$ اور $AC = 2$ ہوگا۔



$$\sin 30^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \text{ تب } \operatorname{cosec} 30^0 = 2$$

$$\cos 30^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تب } \sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 30^0 = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ تب } \cot 30^0 = \sqrt{3}$$

60^0 سے بننے والے مثلثی نسبتیں

سب سے ہم زاویہ 60^0 کے قدریں لکھیں

ΔABC میں 60^0 زاویے کے لئے

مقابل کا ضلع $= \sqrt{3}$

متصلہ ضلع $= 1$

وتر $= 2$

$$\sin 60^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

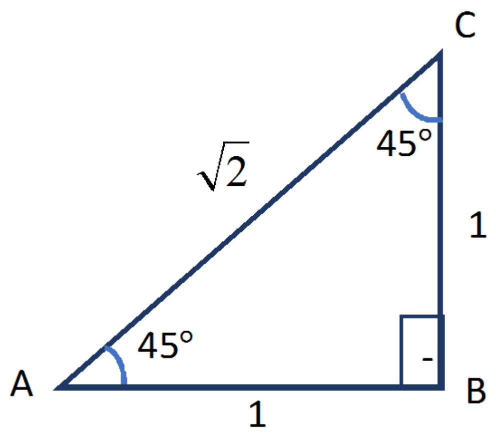
$$\cos 60^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec 60^0 = 2$$

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

45^0 سے بننے والے مثلثی نسبتیں

اس طرح زاویہ 450 سے بننے والے قدریں لکھیں

ایک مساوی الساقین قائم الزاویہ مثلث بنایئے جہاں زاویہ 45^0، 45^0 اور 90^0 ہو۔



فرض کیجئے کہ AB = اکائیاں اور AB = BC تب

BC = 1 تب وتر

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 1^2 + 1^2 = 1 + 1$$

$$AC^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

$\angle A$ کے لحاظ سے مقابل کا ضلع، BC = 1

متصلہ ضلع، AB = 1

وتر، $AC = \sqrt{2}$

$$\sin 45^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{cosec} 45^0 = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 45^0 = \sqrt{2}$$

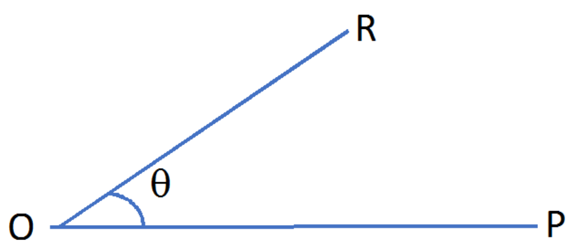
$$\tan 45^0 = \frac{BC}{AB} = 1 \qquad \cot 45^0 = 1$$

زاویے 0^0 اور 90^0 کے مثلثی نسبتیں

زاویہ 0^0 کے مثلثی نسبتیں

ایک OP خط کھینچیے جو اکائیاں سے زائد ہو۔

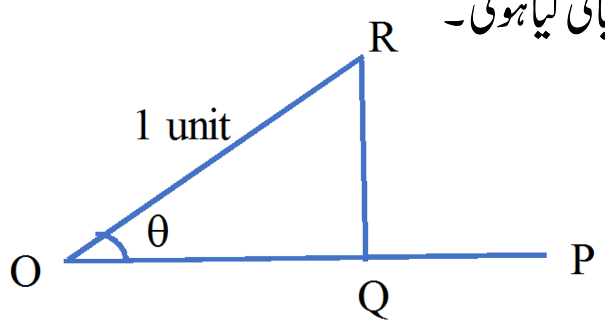
OR = 1 کھینچیے، Q زاویہ بناتے ہوئے

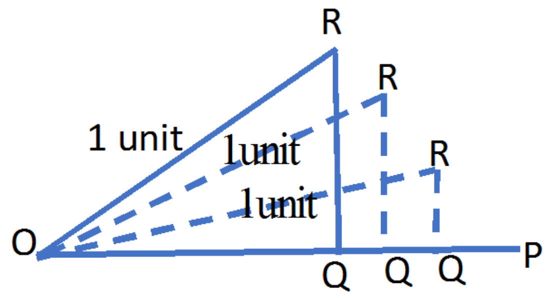


،زاویہ کے مقابل کا ضلع RQ کی بلندی

اگر OR، OP ('Q') کم ہوتا جائے تو مقابل کے ضلع RQ کی لمبائی کیا ہوگی۔

ہم نے صحیح کہا





زاویہ 0^0 کم ہوتا جائے تو مقابل کا ضلع RQ بھی کم ہوتا جائے گا۔

اور مقابل کا ضلع RQ صفر ہوگا۔ آہستہ آہستہ QR اور OQ ایک ہوں گے۔

$\theta = 0^0$ تب

RQ = 0 مقابل کا ضلع

OQ = OR = 1 اکائی متصلہ ضلع

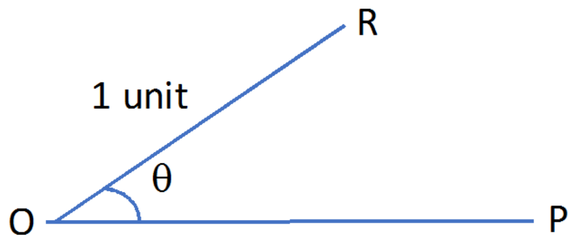
$$\sin 0^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \operatorname{cosec} 0^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{0} = \text{(not defined)}$$

$$\cos 0^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 0^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^0 = \frac{RQ}{OQ} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot 0^0 = \frac{OQ}{RQ} = \frac{1}{0} = \text{(not defined)}$$

اسی طرح زاویہ 90^0 کا نسبتیں معلوم کرنا

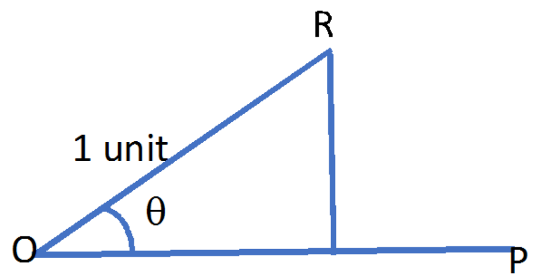
خط OP کھینچیے جو '1' اکائی سے زائد ہو



زاویہ θ، OP سے مل کر بنتے ہیں۔ '1' اکائی = OR

θ کے مقابل کے ضلع RQ کی بلندی

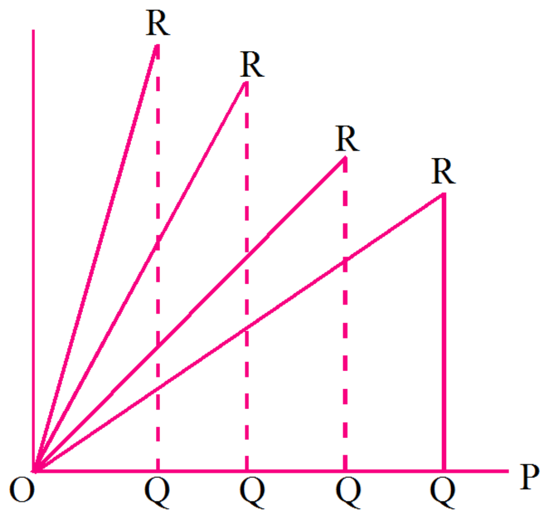
زاویہ θ کو بڑھانے پر



('θ') OP، OR سے بننے والا زاویہ بڑھتا ہو تو

مقابل کا ضلع RQ بھی بڑھ جائے گا۔

آپ کا جواب صحیح ہے۔



زاویہ θ بڑھنے سے مقابل کا ضلع بھی بڑھے گا

اضافہ ہوگا OR، OQ میں برابر ہونے تک OR = OQ

اور $\theta = 90^0$

آہستہ آہستہ متصلہ ضلع صفر ہوگا

$\theta = 90^0$

متصلہ ضلع، $RQ = 0$، مقابل کا ضلع $OQ = OR = 1$

$$\sin 90^0 = \frac{RQ}{OR} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \operatorname{cosec} 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90^0 = \frac{OQ}{OR} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 90^0 = \frac{OR}{OQ} = \frac{1}{0} = \text{(not defined)}$$

$$\tan 90^0 = \frac{RQ}{OQ} = \frac{1}{0} = \text{(not defined)} \qquad \cot 90^0 = \frac{OR}{RQ} = \frac{0}{1} = 0$$

ذیل کے جدول میں 0، 30^0، 45^0، 60^0، 90^0 زاویوں کی قدریں دی گئی ہیں۔

ratio \ angle θ	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	not defined
cosec θ	not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	not defined
cot θ	not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

یاد رکھئے کہ $\sin 30^0$ کی قدر ہمیشہ $\frac{1}{2}$ ہوگی۔ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ اوپر دیئے گئے جدول میں قدریں مستقل ہیں۔

نوٹ: ہماری سہولت کے لئے ہم $(\sin\theta)^2$، $(\cos\theta)^2$ اور $(\tan\theta)^2$ کی جگہ $\sin^2\theta$، $\cos^2\theta$ اور $\tan^2\theta$ استعمال کریں۔

مثال-5: $\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\tan 45^0$ اور $\cos 60^0 = \frac{1}{2}, \tan 45^0 = \frac{1}{2}$

$$\cos 60^0 + \sin 30^0 - \tan 45^0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

مثال-6: $\cot^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \operatorname{cosec}^2 45^0 \ \cos 60^0$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\cot 30^0 = \sqrt{3}$ ، $\sec 45^0 = \sqrt{2}$ اور $\operatorname{cosec} 45^0 = \sqrt{2}$ اور $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 30^0 + \sec^2 45^0 + \operatorname{cosec}^2 45^0 \ \cos 60^0$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3 + 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 5 + 1 = 6$$

مثال-7: $\frac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$ کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\tan 45^0 = 1$ ، $\operatorname{cosec} 30^0 = 2$ ، $\sec 60^0 = 2$ ، $\cot 45^0 = 1$ ، $\sin 90^0 = 1$

$$\frac{\tan 45^0}{\operatorname{cosec} 30^0} + \frac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \frac{5 \sin 90^0}{2 \cos 0^0}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{1} - \frac{5 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0.$$

مثال-8: تصدیق کیجئے کہ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ ، جہاں $A = 30^0$

حل: دیا گیا ہے کہ $A = 30^0$ اور ہم جانتے ہیں کہ $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ اور $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$$\text{LHS} = \tan 2A = \tan (2 \times 30^0) = \tan 60^0 = \sqrt{3}$$

$$\text{RHS} = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan 30^0}{1-\tan^2 30^0} = \frac{2\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$\therefore$ LHS = RHS.

مثال-9: اگر $\sin(A+B) = 1$ اور $\cos(A-B) = 1$، $0^0 < A+B \leq 90^0$ ، $A < B$ تب A اور B معلوم کیجیے۔

حل: $\sin(A+B) = 1$ Since, اور $\sin 90^0 = 1$

$$\sin(A+B) = \sin 90^0$$

$$\therefore A + B = 90^0 \quad \text{...(i)}$$

اسی طرح $\cos(A-B) = 1$ اور $\cos 0^0 = 1$

$$A - B = 0^0 \quad \text{......(ii)}$$

مساوات (i) اور (ii) کو جمع کرنے پر

$$A + B + A - B = 90^0 + 0$$

$$2A = 90^0 \Rightarrow A = 45^0$$

مساوات (ii) سے $B = A = 45^0$

$\therefore A = 45^0$ اور $B = 45^0$

مثال-10: اگر $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$ تب x معلوم کیجیے۔

حل: $\cos(20^0 + x) = \sin 30^0$

ہم جانتے ہیں کہ $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ $\quad \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

تب $\cos(20^0 + x) = \cos 60^0$

$$\therefore (20^0 + x) = 60^0$$

یا $x = 60^0 - 20^0 = 40^0$

Hence, $x = 40^0$.

مثال-11: x کی قدر معلوم کیجیے۔ اگر $\tan 2x - \sqrt{3} = 0$

حل: دیا گیا ہے کہ

$$\tan 2x - \sqrt{3} = 0$$

یا $\tan 2x = \sqrt{3} = \tan 60^0$

$2x = 60^0$ تب $x = 30^0$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ذیل کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) $\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0$

(ii) $2\sin^2 30^0 - 2\cos^2 45^0 + \tan 2\ 60^0$

(iii) $4\sin^2 60^0 + 3\tan^2 30^0 - 8\sin^2 45^0 \cos 45^0$

(iv) $4(\sin^4 30^0 + \cos^4 60^0) - 3(\cos^2 45^0 - 2\sin^2 45^0)$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^0 - 4\sec^2 30^0 - \tan^2 45^0}{\sin^2 30^0 - \cos^2 30^0}$

2. ذیل کو جانچیے $\angle A = 30^0$ پر

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

3. اگر $\sin(A-B) = \dfrac{1}{2}$ ، $\cos(A+B) = \dfrac{1}{2}$ ، $0^0 < A + B < 90^0$ ، $A > B$

4. اگر $\sin(A+2B) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ اور $\cos(A+4B) = 0$ تب A اور B معلوم کیجیے۔

5. اگر $\cos(40^0 + 2x) = \sin 30^0$ تب x معلوم کیجیے۔

مثلثی نسبتوں کی قدریں درج کرنے پر

ہم مثلثی نسبتیں معلوم کرنا سیکھ چکے ہیں جب کہ 0^0 ، 30^0 ، 45^0 ، 60^0 ، 90^0 ہو۔

ان زاویوں کا روزمرہ زندگی میں کیا استعمال ہے؟

ہم تمام نسبتیں کیوں سیکھیں۔

مثال-12: ABC میں B قائمہ ہے۔ اگر BC = 5cm ، $BAC = 30^0$ تب AB اور AC کے طول معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $\angle ABC = 30^0$ ، $\angle A = 30^0$ اور سمر $BC = 5$

$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 30^0 = \frac{5}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 2 \times 5 = 10 \text{ سمر}$$

فیثاغورث کے مسئلہ سے

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 \quad (\text{یا}) \quad AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$AB = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ سمر}$$

$$AC = 10 \text{ سمر} \quad \text{اور} \quad AB = 5\sqrt{3} \text{ سمر}$$

مثال-13: مثلث ABC میں زاویہ C قائمہ ہے۔ $AC = 4$ سمر اور $AB = 8$ سمر تب $\angle A$ ، $\angle B$ معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $AC = 4$ سمر اور $AB = 8$ سمر

$$\therefore \sin B = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin 30^0$$

$$B = 30^0 \quad \text{اور} \quad \angle B = 30^0$$

مثلث ABC میں

$$\angle A = 90^0 - \angle B = 90^0 - 30^0 = 60^0$$

$$\therefore \quad B = 60^0 \quad \text{اور} \quad \angle B = 30^0$$

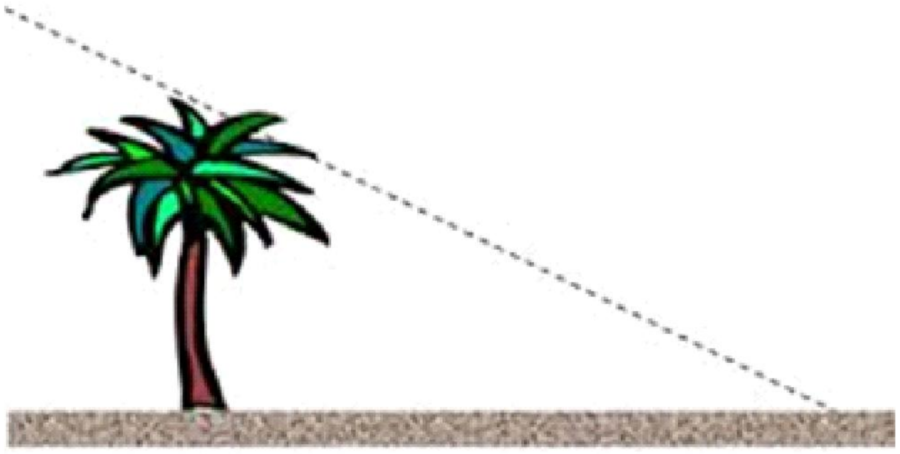
اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ΔXYZ میں نقطہ Z قائمہ ہے $XY = 50$ سمر اور $\angle A = 45^0$ تب YZ اور XZ معلوم کیجیے۔
2. مثلث ΔPQR میں Q پر قائمہ ہے، $PQ = 5$ سمر اور $\angle R = 30^0$ تب QR اور PR معلوم کیجیے۔
3. ΔABC میں $\angle B = -90^0$ $AB = 600$ سمر اور $AC = 1200$ تب $\angle A$ اور $\angle C$ معلوم کیجیے۔
4. ΔMPC میں $\angle M = 90^0$ ، $MP = 50\sqrt{2}$ سمر اور $PC = 50$ سمر تب CP اور $\angle C$ معلوم کیجیے۔
5. ΔGOD میں '0' پر قائمہ ہے۔ $OD = 30$ سمر اور $\angle G = 36.87^0$ تب GO اور GD معلوم کیجیے۔

   دیا گیا ہے کہ ($(\tan(36.87^0)\frac{3}{4}$)

6.4 مثلثی نسبتیں۔بلندی اور فاصلہ پر اس کا اطلاق

آپ نے سنا ہوگا کہ سب سے زیادہ بلند پہاڑ مونٹ ایورسٹ ہے جس کی بلندی 8.848 میٹر یا 20.029 ہے اور سب سے بلندی قدرتی آبشار تلنگانہ کے ضلع عادل آباد میں ''کنٹلا واٹر فالس'' ہے جس کی بلندی 45 میٹر یا 150 فیٹ ہے۔

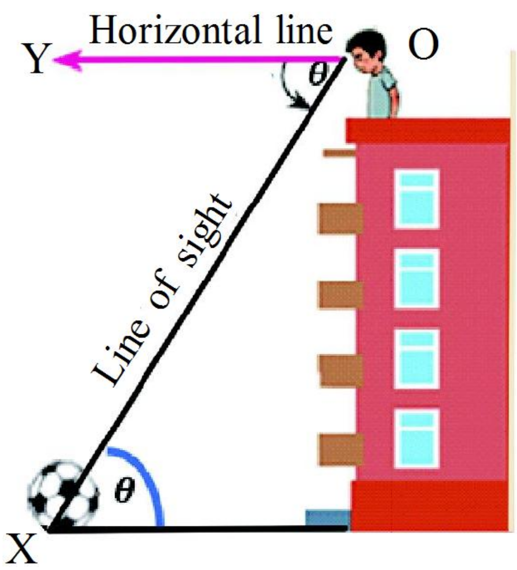


اوپر بیان کردہ بلندی معلوم کرنا ناممکن ہے صرف اندازہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔
ناریل کا جھاڑ دیکھنے پر ذہن میں اُس کی بلندی آتی ہے۔
آپ بغیر حساب کے ناریل کے جھاڑ کی پیائش کر سکتے ہیں۔

زاویہ فراز

فرض کیجیے ہم شئے (P) کا مشاہدہ کرتے ہیں جو نقطہ 'C' سے زیادہ ہے۔ آنکھ سے جھاڑ کر دیکھنے پر بننے والا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔ مشاہدہ کا مقام 'O' اور متوازی خط سے بننے والا زاویہ ہے۔
جب متصلہ شکل میں 'O' مشاہدہ مقام P ایک شئے OP ایک خط ہے۔ OQ متوازی خط ہے تب OB زاویہ فراز ہے۔

زاویہ نشیب



یہاں پر مشاہدہ کا مقام اوپر 'O' ہے نیچے طرف دیکھنے پر خط اور آنکھ سے بننے والا زاویہ زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔ متصلہ شکل میں OX خط ہے اور OY متوازی خط ہے۔ ہم زاویہ نشیب محسوس کرتے ہیں۔

$$\angle O = \angle X = \theta$$

روزمرہ زندگی میں اس کا استعمال

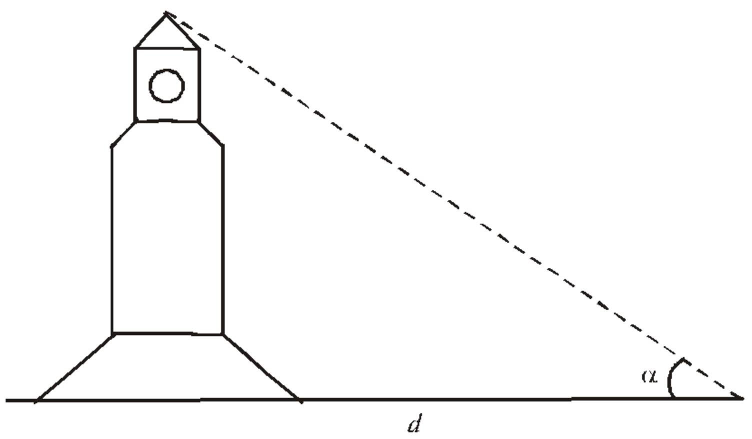
بلندی اور فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم سب سے پہلے جیومٹری شکل بنائیں اور اس کی مدد سے سوال کو حل کریں۔ بلندی اور فاصلے معلوم کرنے کے لئے ہم ذیل کے نکات پر غور کریں گے۔

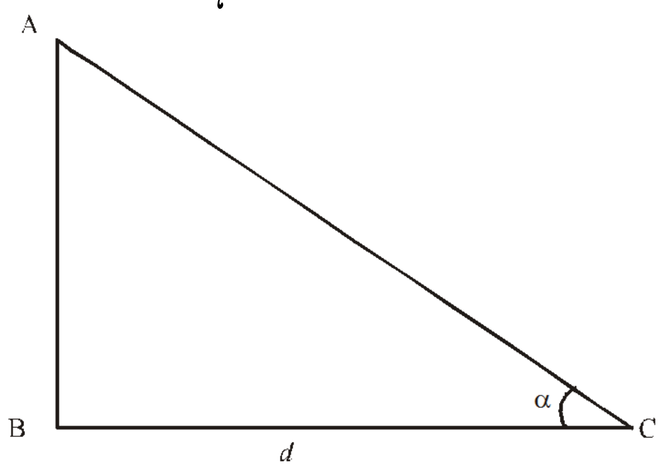
ہم کوشش کریں گے کہ بلندی اور فاصلہ معلوم کرنے کے لئے زاویہ فراز و زاویہ نشیب استعمال کریں۔

ہم جیومٹری شکل میں تبدیل کریں گے۔ بلندی اور فاصلہ معلوم کرنے کے لئے ہم اشکال بنائیں گے اور اشکال سے سوال کو حل کریں گے۔ چند مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال-14: ایک کلاک ٹاور کا زاویہ فراز α° محسوس کیا گیا ٹاور کے قدم سے d میٹر کے فاصلہ سے مشاہدہ کیا گیا۔ ڈاٹا کی مدد سے شکل بنائیے۔

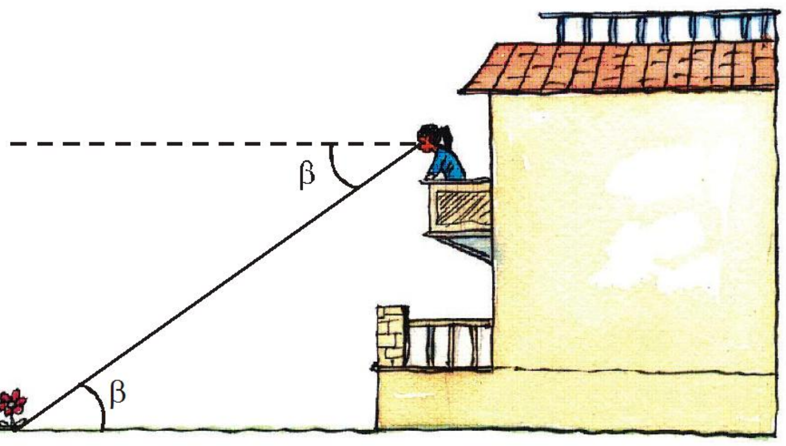
حل: ڈاٹا کی مدد سے شکل اس طرح ہے

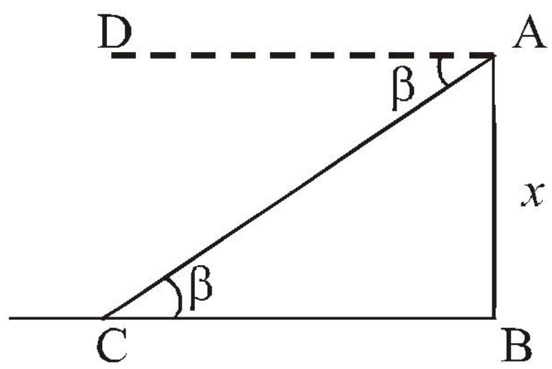




مثال-15: ایک مکان کی بالکونی سے رنگی نے زاویہ نصیب β محسوس کیا۔مکان کی بلندی m ہو تو شکل بنائیے۔

حل: ڈاٹا کی مدد سے شکل اس طرح ہے

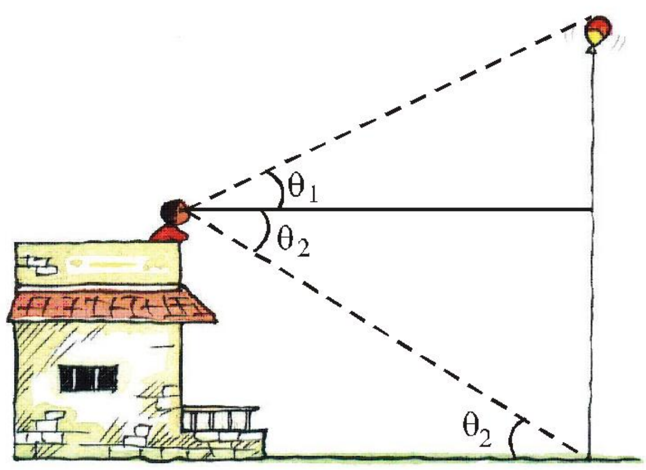


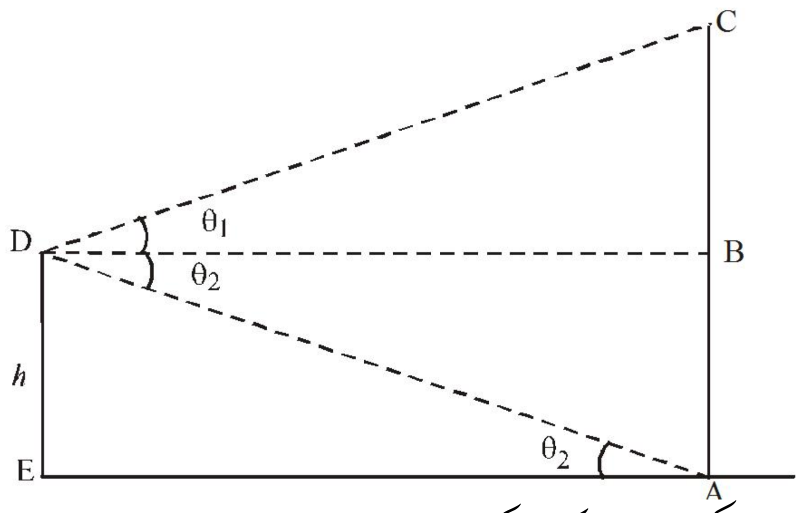


$\angle DAC = \angle ACB = b$ (کیوں؟)

مثال-16: ایک بڑا غبارہ رسی باندھ کر ہوا میں چھوڑا گیا۔ایک آدمی مکان کے اوپر سے غبارہ کا زاویہ فراز θ_1 محسوس کرتا ہے اور غبارہ کو اس کے قدم پر زاویہ نشیب θ_2 دیکھتا ہے۔ مکان کی بلندی h ہو تو اس پیمائشات کی مدد سے خاکہ بنائیے۔

حل:





ہم دیکھ رہے ہیں کہ $\angle BDA = \angle DAE$ کیوں

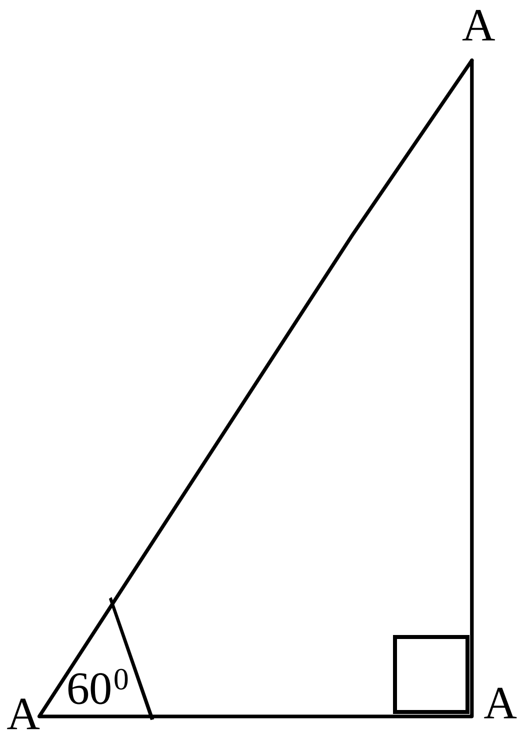
اپنے اکتساب کی جانچ کیجئے

1. بنٹی 10 میٹر ٹاور کے قدر سے ٹاور کا زاویہ فراز 60^0 دیکھتا ہے۔ اس پیمائش کی مدد سے خاکہ بنائیے۔
2. ٹانش نے زمین پر رکھے ہوئے گولے کو مدرسہ کی بلڈنگ سے زاویہ نشیب 40^0 دیکھتا ہے۔ بلڈنگ کی بلندی 20 میٹر ہے۔ خاکہ بنائیے۔
3. ایک میٹر لمبی دیوار سہارے کی 60^0 کا زاویہ فراز بناتے ہوئے ٹکی ہوئی ہے۔سیڑھی کے قدم دیوار کا فاصہ ایک میٹر ہے۔ ایک خاکہ بنائیے۔

جیومٹری اشکال کو استعمال کرتے ہوئے ہم کس طرح روزمرہ زندگی میں معلوم کرتے ہیں۔ اب ہم بلندی اور فاصلہ کے سوالات حل کریں گے۔

مثال-17 : ایک سیڑھی' کھڑکی پر 60^0 کا زاویہ فراز بناتے ہوئے ٹکی ہوئی ہے۔ سیڑھی کی لمبائی 10 فیٹ ہے۔ سیڑی کے قدم سے دیوار کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے AC سیڑھی ہے۔ زمین پر بننے والا زاویہ 60^0 ہے۔



AC سیڑھی کی لمبائی = 10فیٹ (دیا گیا)

اب ہم سیڑھی کے قدم A سے دیوار B کا فاصلہ یعنی AB معلوم کریں گے۔

$\angle A$' AC اور AB کے درمیان رشتہ

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 60^0 = \frac{AB}{10}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{10}$$

$$AB = \frac{10}{2} = 5 \text{ فٹ}$$

$\therefore$ سیڑھی کے قدم سے دیوار کا فاصلہ = 5فٹ

مثال-18 : ایک ٹاور زمین پر افق واقع ہے۔زمین کے نقطہ سے زاویہ فراز' جو ٹاور کے قدم سے 30 سے دور ہے 30^0 محسوس کرتا ہے۔ ٹاور کی بلندی معلوم کیجئے۔ $(\sqrt{3} = 1.73)$

حل: فرض کیجئے کہ AB ٹاور ہے اور بلندی h میٹر ہے۔

نقطہ C (زمین پر نقطہ) جو 30 میٹر دور نقطہ B (ٹاور کے قدم سے)

$$BC = 30m$$

$$\angle BCA = 30^0$$

$$\Delta ABC,\ \tan 30^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30}$$

$$h = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} = 10\times1.73 = 17.3$$ میٹرس

مثال-19 : کھمبے کا سایہ صبح 7 بجے $\sqrt{3}$ گنا ہے۔زاویہ فراز 30^0 ہے۔بتائیے۔

حل: فرض کیجئے کہ کھمبا BC ہے۔جس کی بلندی h ہے اور θ سورج کی روشنی سے بننے والا زاویہ ہے۔
دیا گیا ہے کہ AB سایہ ہے اور h کا $\sqrt{3}$ گنا ہے۔

تب $AB = \times\ \sqrt{3} = h\ \sqrt{3}$

$$\Delta ABC,\ \tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{h}{h\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore\ q = 30^0$$

صبح 7 بجے سورج کی روشنی سے بننے والا زاویہ $= 30^0$

مثال-20 : زمین پر واقع بنال کا مدرسہ بلڈنگ سے تائش زاویہ فراز 45^0 محسوس کرتا ہے۔بلڈنگ کی بلندی 20 میٹر ہے۔بال اور اس کے آنکھ کا فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل: OR آنکھ کا خط اور زاویہ نشیب 45^0 بننے والا زاویہ خط OP سے دیکھتا ہے۔
لیکن $OP \parallel QR$ اور OR قاطع خط ہے۔

$$\angle POR = \angle ORG = 45^\circ$$

بلڈنگ کی بلندی $OQ = 20$ میٹر

ہم کو آنکھ اور بال کا درمیانی فاصلہ معلوم کرنا ہے۔ $OR = d$

قائم الزاویہ مثلث OQR میں $\sin 45^0 = \frac{OQ}{OR}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{20}{d}$$

$$d = 20\sqrt{2} = 20 \times 1.414 = 28.28$$

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ایک غبارہ، محکمہ موسمیات کے اسٹیشن کے 100 میٹر طویل کیبل جو 60^0 بناتا ہے۔زمین سے غبارہ کا فاصلہ معلوم کیجیے۔
2. ایک سیڑھی 60^0 بناتے ہوئے زمین سے دیوار پر ٹکی ہوئی ہے۔دیوار سے سیڑھی کے قدم کا فاصلہ 3 میٹر ہے۔سیڑھی کی لمبائی معلوم کیجیے۔
3. ایک نقطہ سے 50 میٹر کی دوری سے ایک ٹاور کا زاویہ 60^0 دکھتا ہے ٹاور کی بلندی معلوم کیجیے۔
4. ایک درخت پر خرگوش زاویہ نشیب 30^0 محسوس کرتا ہے۔درخت کی بلندی 12 فٹ ہے۔مشاہدہ کے مقام سے خرگوش کتنی دوری پر ہے۔
5. ایک پتنگ کا تار 100 میٹر لمبا ہے۔زمین سے زاویہ فراز 60^0 دکھتا ہے۔ پتنگ کی بلندی معلوم کیجیے۔
6. ایک ٹاور 10 میٹر اونچا ہے۔ مشاہدہ کے مقام ٹاور کے قدم کا درمیانی فاصلہ 100 میٹر ہے۔زاویہ فراز معلوم کیجیے۔

چند مزید دلچسپ سوالات کریں گے۔

مثال-21 : ایک شخص دریا کے ایک کنارے پر ٹھہرا، دوسرے کنارے کا درخت کا زاویہ فراز 60^0 محسوس کرتا ہے۔ کنارے سے 40 میٹر پیچھے ہٹنے کے بعد اس کا زاویہ فراز 30^0 ہوتا ہے۔درخت کی بلندی اور دریا کی چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ درخت کی بلندی R میٹر ہے اور BC = x دریا کی چوڑائی۔

نقطہ C اور D سے درخت کا زاویہ بالترتیب 60^0 اور 30^0 ہے۔

ΔABC میں $\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$

یا $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$

یا $h = \sqrt{3}\,x$ ......(i)

مثلث ΔABD میں

$$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \quad ......(ii)$$

مساوات(i) اور (ii) سے

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x}{x+40}$$

$$3x = x + 40x$$

یا $2x = 40$

یا $x = 20$

مساوات(i) سے $h = \sqrt{3} \times 20 = 20 \times 1.732 = 34.64$

دریا کی چوڑائی = 20 میٹر اور درخت کی بلندی 3.464 میٹر

مثال-22 : ایک مکان کا زاویہ فراز ٹاور سے 30^0 ہے۔مکان کے قدم سے ٹاور کا زاویہ 60^0 ہے۔اگر ٹاور کی بلندی 50 میٹر ہو تب مکان کی بلندی معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ PQ ٹاور کی بلندی 50 میٹر ہے اور AB مکان کی بلند = x میٹر

زاویہ $\angle PBQ = 60^0$ اور $\angle AQB = 30^0$ تب

ΔABQ قائم الزاویہ مثلث میں $\tan 30^0 = \frac{AB}{BD}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{QB}$$

$$QB = x\sqrt{3} \quad ......(i)$$

ΔPBQ قائم الزاویہ مثلث میں

$$\tan 60^0 = \frac{PQ}{QB}$$

$$\sqrt{3} = \frac{50}{QB}$$

$$OB = \sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$x\sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{50}{3} = 16.67$$

مکان کی بلندی 16.67 میٹر ہے۔

مثال-23 : ایک 100 میٹر ٹاور پر ٹھہرا ہوا شخص' ٹاور کے دونوں جانب رکھے ہوئے کار کا زاویہ نشیب 45^0 اور 60^0 دیکھتا ہے۔ دو کاروں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیجیے کہ PQ ٹاور 100 میٹر بلند' A اور B دو کار ہیں۔

کار A اور B کا زاویہ نشیب بالترتیب 45^0 اور 60^0 ہے شکل میں بتایا گیا۔

$$\therefore\ \angle XQA = \angle QAP = 60^0$$

اب $\angle YQB = \angle QBP = 45^0$

ΔQPB میں

$$\tan 45^0 = \frac{QP}{BP}$$

$$1 = \frac{100}{BP}$$

$$BP = 100 \qquad \ldots\ldots(i)$$

اس طرح مثلث QPA میں

$$\tan 60^0 = \frac{QP}{AP}$$

$$\sqrt{3} = \frac{100}{AP}$$

$$AP = \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{100 \times 1.732}{3} = 57.74$$

AP = 57.74 میٹر ...(ii)

دو کاروں کا درمیانی فاصلہ AP + PA

= 100 + 57.74 میٹرس

= 157.74 میٹرس

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. 100 میٹر چوڑی سڑک کے دونوں طرف مساوی بلندی والے پلر میں سڑک کے ایک نقطہ سے دونوں پلروں کا زاویہ فراز 60^0 اور 30^0 بالترتیب ہیں۔ نقطہ کا فاصلہ معلوم کیجئے اور پلر کی بلندی معلوم کیجئے۔
2. زمین سے 3000 میٹر کی بلندی پر دو جہاز ہیں۔ زمین کے ایک نقطہ سے دونوں جہازوں کا زاویہ فراز بالترتیب 60^0 اور 45^0 ہے۔دوجہاں زوں کا درمینی فاصلہ معلوم کیجئے۔
3. ایک مکان کے کھڑکی سے 4 میٹر لمبائی سیڑھی ٹکی ہوئی ہے جس کا زاویہ فراز 30^0 ہے۔سیڑھی کے قدم سے دوسری جانب واقع کھڑکی کو مس کرنے پر زاویہ فراز 60^0 ہے۔ دونوں کھڑکیوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کیجئے۔

مشق

1. ایک مثلث PQR میں R قائمہ ہے اور $\angle P = Q$ اگر 7 سمر = PR، 25 سمر = QR تب مستطیلی نسبتیں لکھئے۔
2. ABC ایک قائم الزاویہ مثلث ہے نقطہ B پر۔ 7.5 سمر = AC اور 6 سمر = AB زاویہ C کے تمام مثلثی نسبتیں لکھئے۔
3. ایک مثلث DPQR نقطہ O پر قائمہ ہے۔ 1 سمر = PQ اور 2 سمر = QR تب sin P، cos P، sin R اور cos R کی قدریں معلوم کیجئے اور sin P = cos R بتایئے۔
4. قدریں معلوم کیجئے۔

(i) $\text{Sin}60^o \cos30^o + \sin30^o \cos60^o$

(ii) $\frac{4}{3}\tan^2 60^o + 3\cos^2 30^o - 2\sec^2 30^o - \frac{4}{3}\cot^2 60^o$

(iii) $\tan^2 60^o - \sin^2 30^o - \cos^2 60^o$

(iv) $(\text{cosec}^2 45^o \sec^2 30^o)(\sin^2 30^o + 4\cot^2 45^o - \sec^2 60^o)$

(v) $\dfrac{\sin 30^0 - \sin 90^0 + 2\cos 0^0}{\tan 30^0 \tan 60^0}$

(vi) $\dfrac{4}{\cot^2 30^0} + \dfrac{4}{\sin^2 60^0} - \cos^2 45^0$

5. x کی قدر معلوم کیجئے اگر $\sin x = \cos x$ اور x حادہ زاویہ ہے۔

6. تصدیق کیجئے کہ $\sin A = \tan A \cos A$ جب کہ $a = 30^0$ اور 60^0 ہو۔

7. تصدیق کیجئے کہ $\cos 2A = \cos 2A - \sin 2A$ جب کہ 45^0 اور $<A = 30$

8. اگر $\tan(A + B) = \sqrt{3}$ اور $\tan (A - B) = 1$ ، $0^0 < A + B < 90^0$ تب A ، B کی قدر لکھئے۔

9. اگر $\sin (2x + 10)^0 = 0.5$ اور x حادہ زاوی ہے۔ تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

10. اگر $\tan (5x - 2020)0 = 1$ اور $2000 < x < 2050$ تب x کی قدر معلوم کیجئے۔

11. مکمل سیڑھی $5\sqrt{3}$ فٹ ہے اور stringer کی بلندی 5 فٹ ہے۔ کون سے زاویہ پر سیڑھی کو رکھا جائے۔

12. ایک شخص درخت کے قدم 100 میٹر دور ہے ۔ زاویہ فراز 30^0 محسوس کرتا ہے ۔ درخت کی بلندی اعشاری کے دو مقامات تک معلوم کیجئے۔

13. ایک پہاڑ کی چوٹی سے دونوں جانب واقع کلومیٹر کے پتھر کا زاویہ نشیب بالترتیب 60^0 اور 30^0 ہے۔ پہاڑ کی بلندی معلوم کیجئے۔

14. 7 میٹر بلند مکان سے ٹاور کا زاویہ فراز 60^0 دکھتا ہے اور ٹاور کے قدم کا زاویہ 45^0 دکھتا ہے۔ ٹاور کی بلندی معلوم کیجئے۔

15. سمندر کے کنارے ٹھہرا ہوا شخص آنے والی کشتی کا زاویہ فراز 10 منٹ میں 30^0 سے 60^0 دکھتا ہے کشتی کنارے کب پہنچے گی۔

16. ایک لیٹ ہاؤس سے دو کشتیاں دونوں جانب زاویہ فراز 30^0 اور 45^0 محسوس کرتے ہیں دو کشتیوں کا درمیانی فاصلہ 100 میٹر ہے لیٹ ہاؤس کی بلندی معلوم کیجئے۔

17. ایک ٹاور کا سایہ زمین پر $45\sqrt{3}$ ہے۔ سورج کا زاویہ 30^0 اور 60^0 ہے۔ ٹاور کی بلندی معلوم کیجئے۔

18. دونوں ٹاورس کا درمیانی فاصلہ 80 میٹر ہے۔ پہلے ٹاور کا زاویہ نشیب، دوسرے ٹاور کے اوپر 30^0 ہے۔ اگر دوسرے ٹاور کی بلندی 160 میٹر ہو پہلے ٹاور کی بلندی معلوم کیجئے۔

19. ایک مکان کی کھڑکی زمین سے 10 میٹر بلند ہے۔ دوسرے مکان جو مقابل واقع ہے کا زاویہ فراز اور زاویہ نشیب بالترتیب 60^0 اور 45^0 ہے۔ مقابل کے مکان کی بلندی معلوم کیجئے۔ ($\sqrt{3} = 1.73$)

20. ایک

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

- علم مثلث کے بنیادی نسبتیں

بنیادی نسبتیں	مقلوب
$\sin A = \dfrac{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$	$\operatorname{cosec} A = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}$
$\cos A = \dfrac{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}{\text{وتر}}$	$\sec A = \dfrac{\text{وتر}}{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}$
$\tan A = \dfrac{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}$	$\cot A = \dfrac{\angle A \text{ کا متصلہ ضلع}}{\angle A \text{ کا مقابل کا ضلع}}$

- بنیادی نسبتیں اور مقلوب میں رشتہ

$$\sin x \ \operatorname{cosec} x = 1$$
$$\cos x \ \sec x = 1$$
$$\tan x \ \cot x = 1$$

- مثلثی نسبتیں زاویہ 0^0، 30^0، 45^0، 60^0 اور 90^0

angle θ / ratio	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	not defined
cosec θ	not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	not defined
cot θ	not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- متوازی خط اور نگاہ سے اوپر بننے والا زاویہ زاویہ فراز کہلاتا ہے۔
- متوازی خط اور نگاہ سے نیچے بننے والا زاویہ زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔

اکائی 7 شماریات

سبق 7.1

شماریات کا تعارف
Introduction to Statistics

7.1.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہوجائیں گے:

- بنیادی اور ثانوی اعداد و شمار میں فرق کریں گے۔
- وقفہ جماعت، جماعت کے نمبروں اونچائی پر جماعت کی جسامت اگر چہ مثال کے طور پر سمجھنا اور اس کی وضاحت کرنا۔
- تعدد تقسیم میں دیے گئے بڑے غیر منظّم گروپ کے اعداد و شمار کی نمائندگی کریں گے (گنتی کے نشانات کو استعمال کریں)

7.1.1 تعارف

ایک دن احمد اپنے ریاضی کے ٹیچر سے ملاقات کے لئے ان کے گھر پہنچا۔ وہ اس وقت وارڈ سے حاصل کردہ معلومات کی بابت ہندوستان کی مردم شماری کو ترتیب دینے میں مصروف تھے۔

احمد : السلام علیکم سر! ایسا معلوم ہو رہا ہے آپ بہت مصروف ہیں۔ کیا میں آپ کی کچھ مدد کرسکتا ہوں۔

استاد : احمد میں نے مردم شماری کے ضمن میں تمام گھروں کی کچھ معلومات اکٹھا کی ہیں۔ جیسے افراد خاندان کی تعداد، ان کی عمریں، آمدنی اور جس گھر میں وہ رہتے ہیں وہ کس طرز کا بنا ہے اور دیگر معلومات۔

احمد : سر ان معلومات کا فائدہ ہوتا ہے؟

استاد : یہ معلومات حکومت کے لئے بہت فائدہ مند ہوتی ہیں۔ وہ اس کی مدد سے ترقیاتی پروگراموں کی منصوبہ بندی کرتی ہے اور وسائل مختص کرتی ہے۔

احمد : ان معلومات کو حکومت کس طرح استعمال کرتی ہے؟

استاد : ان معلومات کو محکمہ مردم شماری معطیات کے تجزیاتی طریقے سے مرتب کرتا ہے اور معلومات کی شکل میں نتائج کی تشریح کی جاتی ہے۔ احمد کیا آپ نے پچھلی جماعتوں میں بنیادی شماریات (معطیات کو پڑھنا) کے بارے میں کچھ معلومات حاصل کی ہیں؟ کیا آپ نے معلومات حاصل نہیں کی ہیں؟

احمد کی طرح ہم بھی اپنی زندگی میں ایسے بہت سے حالات سے گزرتے ہیں جہاں ہم ان معلومات کو دیکھتے ہیں۔ حقیقت میں عددی ہندسوں میں جدول، ترسیمات وغیرہ کی شکل میں ان کا تعلق ترکاریوں کی قیمت، شہروں کے درجہ حرارت، کرکٹ کے اسکور، بولنگ نتائج اور

بہت سی دوسری معلومات سے ہوسکتا ہے۔ یہ حقیقی یا تصویری جو عددی یا دوسری شکل میں اکٹھا کئے جاتے ہیں۔ ایک خاص مقصد کے لئے معطیات کہلاتے ہیں۔ ریاضی کی وہ شاخ جس میں معطیات کا مطالعہ کرتے ہوئے ان کا مقصد معلوم کیا جاتا ہے' شماریات کہلاتے ہیں۔

7.1.2 معطیات کو اکٹھا کرنا

شماریات کا ابتدائی کام ایک خاص مقصد کے لئے معطیات کو اکٹھا کرنا ہے۔ اسکو سمجھنے کے لئے اس کی شروعات ذیل کے ایک عملی کام معطیات کو اکٹھا کرنے کی مشق سے کرتے ہیں۔

مشغلہ

آپ کی جماعت کے طلباء کو چار گروپ میں تقسیم کیجئے اور ایک گروپ کو ذیل کے اقسام میں سے کسی معطیات کو اکٹھا کرنے کا کام مختص کیجئے۔

(i) آپ کی جماعت کے تمام طلباء کا وزن معلوم کیجئے۔

(ii) ان طالب علموں (بچوں) کی تعداد جن کے حقیقی بھائی یا بہن بھی یہاں پڑھتے ہیں۔

(iii) پچھلے مہینہ (ماہ) میں روزانہ کی اساس پر غیر حاضر طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

(iv) جماعت کے ہر ایک طالب علم کا گھر سے مدرسہ کا فاصلہ۔

آیئے غور کریں کہ کس طرح طلبا کے مطلوبہ معلومات کو حاصل کیا ہے:

1. کیا انہوں نے یہ معلومات ہر ایک طالب علم سے راست پوچھ کر حاصل کیا ہے۔ یا ہر ایک کے گھر شخصی طور پر حاصل کیا ہے۔

2. انہوں نے یہ معلومات مختلف ذرائع سے حاصل کی ہیں جیسا کہ اسکول میں موجود ریکارڈ وغیرہ سے۔

پہلی صورت میں جب تفتیش کار (طالب علم) نے واضح مفروضات اکٹھا کئے تھے۔ معطیات کو اکٹھا کرنا ''ابتدائی معطیات'' کہلاتا ہے۔ جیسا کہ i, iii, iv اس طرح مذکورہ بالا ہدف (iii) پچھلے مہینے میں روزانہ کی اساس پر غیر حاضر طلباء کی تعداد کو صرف اسکول کے حاضری رجسٹر سے ہی معلوم کیا جاسکتا ہے کیونکہ ہم کلاس ٹیچر کی جانب سے تیار کئے گئے معطیات کو استعمال کررہے ہیں۔ لہٰذا یہ ڈیٹا ''ثانوی معطیات'' کہلاتا ہے۔ یعنی ایک ذرائع سے حاصل شدہ معلومات جو پہلے ہی ریکارڈ کئے گئے ہیں (رجسٹر میں) ثانوی معطیات کہلاتے ہیں۔

7.1.3 معطیات کا اظہار

ایک مرتبہ معطیات کو اکٹھا کیا جاتا ہے تو تفتیش کار اس کو پیش کرنے کا طریقہ معلوم کرتا ہے۔ جس شکل میں اس کو پیش کرتا ہے۔ وہ بامعنی بامقصد اور قابل تفہیم ہوتا ہے۔ جسے دیکھتے ہی اس کی اہم خصوصیات معلوم ہوں۔ آیئے مختلف صورتحال کا جائزہ لیتے ہیں۔ جہاں ان معطیات کو پیش کرنے کی ہمیں ضرورت ہوتی ہے۔

50 نشانات والے ریاضی کے ایک ٹسٹ میں طلباء کے حاصل کردہ نشانات پر غور کیجئے۔

25, 34, 42, 20, 39, 50, 28, 30, 50, 11, 20, 42, 45, 40, 7.

اس شکل میں پائے جانے والے معطیات خام معطیات (Raw data) کہلاتے ہیں۔

دیئے گئے معطیات کی مدد سے آپ آسانی سے اعظم ترین اور اقل ترین نشانات کی شناخت کر سکتے ہیں اور ان کا فرق معطیات کا سعت (Range) کہلاتا ہے۔

یہاں پر اقل ترین اور اعظم ترین نشانات ترتیب وار 7 اور 50 ہیں۔

لہٰذا 43 = 7 − 50 = سعت

مذکورہ بالا کی مدد سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہمارے معطیات 7 اور 50 کے درمیان واقع ہیں۔

مذکورہ بالا (مندرجہ بالا) سے ذیل کے سوالات کے جوابات دیجئے۔

(i) دیئے گئے معطیات کی وسطی قدر معلوم کیجئے۔

(ii) کتنے طلباء ایسے ہیں جنہوں نے ریاضی میں 60% یا اس سے زیادہ نشانات حاصل کئے ہیں؟

مباحثہ

(i) رفیع کا کہنا ہے کہ معطیات کی وسطی قدر 25 ہے۔ کیوں کہ امتحان 50 نشانات کے لئے منعقد کیا گیا تھا۔

(ii) متین کا کہنا ہے کہ معطیات کی وسطی قدر 25 نہیں ہے۔ اس صورت میں ہم صرف 15 طلباء کے نشانات بطور معطیات رکھتے ہیں۔ معطیات کو سعودی ترتیب میں لکھنے کے بعد

7, 11, 20, 20, 25, 28, 30, 34, 39, 40, 42, 42, 45, 50, 50

ہم کہہ سکتے ہیں کہ آٹھواں رکن اس کا درمیانی رکن ہے اور یہ 34 ہے۔

(iii) پہلے سے آپ جانتے ہیں کہ 50 نشانات کے 60% کو کس طرح معلوم کیا جاتا ہے۔ (جیسے $\frac{60}{100} \times 50 = 30$)

آپ دیکھتے ہیں کہ یہاں 9 طالب علم ہیں۔ جنہوں نے 60% یا اس سے زائد نشانات حاصل کئے ہیں۔ (30 نشانات یا اس سے زائد)۔

اگر ایک معطیات میں مشاہدات کی تعداد بہت زیادہ ہے۔ تب ان کی صعودی ترتیب ونزولی ترتیب لکھنے میں زیادہ وقت لگ سکتا ہے۔ اس لئے ہم کو دوسرے متبادل طریقے کے بارے میں سوچنا چاہیئے۔

دی گئی مثالوں کا مشاہدہ کیجئے۔

مثال-1: جملہ 10 نشانات والے ریاضی کے ٹسٹ میں 50 طلباء کے حاصل کردہ نشانات پر غور کیجئے۔

5, 8, 6, 4, 2,   5, 4, 9, 10, 2,   1, 1, 3, 4, 5,

8, 6, 7, 10, 2,   1, 1, 3, 4,4,   5, 8, 6, 7, 10,

2,8, 6, 4, 2,   5, 4, 9, 10, 2,   1, 1, 3, 4, 5,

8, 6,4, 5, 8

حل:

نشانات	(شمار) گنتی کے نشانات	طلباء کی تعداد
1	~~||||~~ |	6
2	~~||||~~ |	6
3	|||	3
4	~~||||~~ ||||	9
5	~~||||~~ ||	7
6	~~||||~~	5
7	||	2
8	~~||||~~ |	6
9	|||	2
10	||||	4
	جملہ	**50**

گنتی کے نشانات کی مدد سے معطیات کی جدول بندی کی گئی ہے جیسا کہ جدول میں بتایا گیا ہے۔

ایسے طلباء کی تعداد جنہوں نے نشانات میں ایک مخصوص عدد حاصل کئے ہیں، وہ نشانات کا ''تعدد'' کہلاتے ہیں۔ مثال کے طور پر 9 طلباء نے 4 نمبر حاصل کئے تو 4 نمبروں کا تعدد 9 ہے۔

یہاں جدول میں گنتی کے نشانات خام معطیات کو جدول کرنے میں کارآمد ہیں۔ جدول کے تمام تعدد کا مجموعہ معطیات کے مشاہدات کی کل تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

جیسا کہ معطیات کے حقیقی مشاہدات کو تعدد کے ساتھ جدول میں بتلایا گیا ہے۔ **یہ جدول ''غیر گروہی تعددی تقسیمی جدول یا باا ثر مشاہدات کا جدول کہلاتا ہے۔**

مشغلہ

جن حروفوں سے آپ کے جماعت کے بچوں کے نام شروع ہوتے ہیں ان حروف کا ایک تعددی تقسیمی جدول بنائیے اور حسب ذیل سوالات کے جوابات دیجئے۔

(i) آپ کی جماعت کے بچوں کے نام میں کون سا ابتدائی حرف سب سے زیادہ استعمال ہو رہا ہے؟

(ii) کتنے طلباء ہیں جن کے نام حروف I سے شروع ہوتے ہیں؟

(iii) آپ کی جماعت میں سب سے کم استعمال ہونے والے ابتدائی حرف کون سا ہے؟

فرض کیجئے کہ خاص موقع پر معطیات کو تین زمروں میں پیش کرنا۔ (i) کتنے طلباء ایسے ہیں جنہیں زائد کلاسس کی ضرورت ہے؟ (ii) کتنے طلباء ایسے ہیں جن کی کارکردگی اوسط ہے؟ اور (iii) کتنے طلباء ایسے ہیں جنہوں نے ٹسٹ میں اچھا مظاہرہ کیا؟ ضرورت کے مطابق ہم گروپ بنا سکتے ہیں اور گروہی تعددی جدول بھی جیسا کہ نیچے بتلایا گیا ہے۔

طلباء کی تعداد	گنتی کے نشانات	درجہ بندی	وقفہ جماعت (نشانات)
15	𝍸 𝍸 𝍸	زائد کلاسس کی ضرورت ہے	1-3
16	𝍸 𝍸 𝍸 |	اوسط	4-5
19	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	بہتر	6-10

ضرورت کے مطابق معطیات کی درجہ بندی کرنا یا اگر مشاہدات زیادہ تعداد میں ہو تو اس کے گروپس بنانا تا کہ آسانی ہو۔ آیئے ایک اور مثال لیتے ہیں۔ جس میں گروپ اور تعدد، ہمیں معطیات کو سمجھنے میں آسانی پیدا کرتے ہیں۔

مثال-2: سنترے کی باسکٹ سے 50 سنتروں کو لے کر ان کا وزن (گرام میں) کیا گیا ہے۔ جس کی تفصیل ذیل کی جدول میں دی گئی ہے:

35, 45, 55, 50, 30, 110, 95, 40, 70, 100, 60, 80, 85, 60, 52, 95, 98, 35, 47, 45, 105, 90, 30, 50, 75, 95, 85, 80, 35, 45, 40, 50, 60, 65, 55, 45, 30, 90, 115, 65, 60, 40, 100, 55, 75, 110, 85, 95, 55, 50

معطیات کے تعدد کو ایک ساتھ ظاہر کرنے موثر اور آسان فہم کے لئے تمام تعدد کو وقفہ جماعت ,30-39, 40-49, 50-59 .... 100-109, 110-119 کے طور پر تقسیم کیا جاتا ہے۔ ان چھوٹے چھوٹے زمروں کو یا گروہ کو جماعت یا وقفہ جماعت کہتے ہیں۔ اور اس کی جسامت کو جماعت کی لمبائی یا جماعت کی چوڑائی کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر 30-39 میں 30 کو نچلی حد جب کہ 39 کو اوپری حد کہتے ہیں۔ اس وقفہ جماعت کی لمبائی 10 ہوگی۔

تعدد (سنتروں کی تعداد)	گنتی کے نشان	(سنتروں کا وزن) وقفہ جماعت
6	𝍸 |	30-39
8	𝍸 |||	40-49
9	𝍸 ||||	50-59
6	𝍸 |	60-69
3	|||	70-79
5	𝍸	80-89
7	𝍸 ||	90-99
3	|||	100-109
3	|||	110-119
50		جملہ

معطیات کو پیش کرنا اس کو آسان اور مختصر بناتا ہے۔ہمیں ایک ملک میں معطیات کے اہم خدوخال کا مشاہدہ کرنے کے قابل بناتا ہے۔ یہ ایک گروہی تعددی تقسیمی جدول کہلاتا ہے۔

ہم مندرجہ بالا جدول میں جماعتوں کا مشاہدہ کرتے ہیں تو دیکھتے ہیں کہ اس کی جماعتیں غیر منطبق ہیں جیسے 49-40 ,39-30 ... کوئی بھی عدد کسی بھی دو وقفہ جماعتوں میں دہرایا نہیں گیا ہے۔ایسی جماعتیں داخلی جماعتیں کہلاتی ہیں۔مختصر جسامت کی بہت سی جماعتیں بڑی جسامت کی تھوڑی سی جماعتیں بھی ہم بتا سکتے ہیں۔عموماً اگر خام معطیات کا سعت معلوم ہو جائے۔ (اقل ترین قدر- اعظم ترین قدر = سعت) اس کی بنیاد پر ہم وقفہ جماعت کی لمبائی اور جماعتوں کی تعداد کو بھی تشکیل دے سکتے ہیں۔مثال کے طور پر 35-30 ‘40-36 اور اسطرح ہیں:

جماعتی سرحد	جماعتی حد
19.5-29.5	20-29
29.5-39.5	30-39
39.5-49.5	40-49
49.5-59.5	50-59
59.5-69.5	60-69
69.5-79.5	70-79
79.5-89.5	80-89
89.5-99.5	90-99
99.5-109.5	100-109
109.5-119.5	110-119
119.5-129.5	120-129

اب سوچئے اگر ایک سنترے کا وزن 39.5 گرام ہے۔آپ اس کو کون سے وقفہ جماعت میں رکھیں گے (شامل کریں گے) ہم اس کو نہ ہی 39-30 اور نہ ہی 49-40 کی جماعت میں شامل کر سکتے ہیں۔ایسی صورت میں ہم کو حقیقی حدوں (سرحدوں) والی وقفہ جماعت بنانا پڑے گا۔ایک وقفہ جماعت کی اوپری حد اور دوسری جماعت کی نچلی حد کے اوسط سے جماعت کی اوپری سرحد بنتی ہے۔اسی طرح دوسری وقفہ جماعت کی نچلی سرحد بنتی ہے۔

اسی طرح تمام وقفہ جماعتوں کی سرحدیں معلوم کی جاتی ہیں۔یہ فرض کرتے ہوئے کہ پہلی جماعت سے پہلے ایک وقفہ جماعت اور آخری جماعت کے بعد دوسری وقفہ جماعت میں ہم نچلی سرحد معلوم کرتے ہیں کسی بھی پہلی جماعت کی اور اوپری سرحد کسی بھی آخری وقفہ جماعت کی۔ پھر ایک بار یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ آیا 39.5 وقفہ جماعت 39.5-29.5 میں شامل کیا جانا چاہئے یا وقفہ جماعت 49.5-39.5 میں۔اصول کے مطابق اگر کوئی مشاہدہ ایک مخصوص جماعت کے اوپر سرحد کے معادل ہوتا ہے تب اس مخصوص مشاہدہ کو دوسری جماعت میں شامل کیا جاتا ہے۔39.5-29.5 کی جماعت میں نہیں۔اس طرح 39.5 کو وقفہ جماعت 49-39.5 میں شامل کیا جائے گا۔

جماعتیں جو 40–30، 50–40، 60–50 ...... کی شکل میں ہوتی ہیں منطبق جماعتیں کہلاتی ہیں اور خارجی جماعتیں بھی کہلاتی ہیں۔ اگر ہم داخلی جماعتوں کی سرحدوں کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ وہ خارجی جماعتوں کی شکل میں ہیں۔اس مخصوص جماعت کی اوپری سرحد اور نچلی سرحد کے فرق سے وقفہ جماعت کی لمبائی معلوم ہوتی ہے۔99-90 کے وقفہ جماعت کی لمبائی 10 (10 = 89.5 - 99.5 یعنی) ہے۔

مثال - 3 : ماہ ستمبر کے 30 دنوں میں ایک مخصوص شہر کی اضافی رطوبت (% میں) درج کی گئی جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.0	92.1	84.9	90.0	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89.0

(i) 84-86, 86, -88 وغیرہ جماعتوں کا گروہی تعددی تقسیمی جدول بنائیے۔

(ii) اس معطیات کا سعت کیا ہے؟

حل: (i) گروہی تعددی تقسیمی جدول جیسا کہ ذیل میں بتلایا گیا ہے۔

وقفہ جماعت (اضافی) (رطوبت)	گنتی کے نشان	دنوں کی تعداد
84-86	|	1
86-88	|	1
88-90	||	2
90-92	||	2
92-94	|||| ||	7
94-96	~~||||~~ |	6
96-98	~~||||~~ ||	7
98-100	||||	4

(ii) مختلف مقامات پر مختلف ہوتا ہے۔ 14.3 = 84.9 - 99.2 سعت

[**نوٹ:** 90 وقفہ جماعت 92-90 میں اور 96 وقفہ جماعت 98-96 میں آتا ہے۔]

اپنے اکتساب کی جانچ کیجیے

1. ذیل میں تعددی تقسیمی جدول میں نشان واری تعدد دیکھئے۔

نشانات	5 تک	6 تک	7 تک	8 تک	9 تک	10 تک
طلبا کی تعداد	5	11	19	31	40	45

2. ذیل کے معطیات سے ایک تعددی تقسیمی جدول بنائیے۔جس میں یومیہ اجرت کے 32 اشخاص کی آمدنی (روپیوں میں) دی گئی ہے۔ [وقفہ جماعت کی لمبائی 10 ہو]

110	184	129	141	105	134	136	176	155	145	150
160	160	152	201	159	203	146	177	139	105	140
190	158	203	108	129	118	112	169	140	185	

.3 دسویں جماعت کے 30 طلباء ریاضی اولیمپیاڈ میں شرکت کئے ان کے حاصل کردہ نشانات ذیل میں دیئے گئے ہیں۔

46	31	74	68	42	54	14	93	72	53	59
38	16	88	27	44	63	43	81	64	77	62
53	40	71	60	08	68	50	58			

وقفہ جماعت 0-9، 10-19 کو استعمال کرتے ہوئے معطیات کا ایک گروہی تعدادی تقسیمی جدول بنایئے اور 49 سے زیادہ نشانات حاصل کرنے والے طلباء کی تعداد معلوم کیجئے۔

.4 ایک اسکول کے 40 اساتذہ کی عمریں (سالوں میں) کی تعدد تقسیم مندرجہ ذیل ہیں:

اساتذہ کی تعداد	عمر سالوں میں
12	25-31
15	31-37
7	37-43
5	43-49
1	49-55
40	**جملہ**

(i) کلاس کی جسامت کیا ہے؟

(ii) 37-43 کی اوپری سرحد کیا ہے؟

(iii) 49-55 کی نچلی سرحد کیا ہے؟

مشق

.1 53, 61, 48, 60, 78, 68, 55, 100, 67, 90 سعت معلوم کیجئے۔

.2 ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں نشان واری تعدد دیکھئے۔

10 تک	9 تک	8 تک	7 تک	6 تک	5 تک	نشانات
40	32	25	15	22	8	طلبا کی تعداد

.3 دسویں جماعت کے 36 طلباء کے بلڈ گروپس کو ریکارڈ کیا گیا جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے۔

A	O	A	O	A	B	O	A	B	A	B	O
B	O	B	O	O	A	B	O	B	AB	O	A
O	O	O	A	AB	O	A	B	O	A	O	B

ان معطیات کو تعددی تقسیمی جدول کی شکل میں ظاہر کیجئے۔ ان طالب علموں میں کون سا بلڈ گروپ سب سے زیادہ عام ہے اور کون سا سب سے کم ہے؟

4. تین سکوں کو ایک ساتھ 30 مرتبہ اچھالا گیا ہر وقت آنے والے چت کی تعداد کو نوٹ کیا گیا جیسا کہ ذیل میں بتایا گیا ہے

1	2	3	2	3	1	1	1	0	3	2	1
2	2	1	1	2	3	2	0	3	0	1	2
3	2	2	3	1	1						

مذکورہ بالا دئے گئے معطیات کے لئے تعددی تقسیمی جدول بنائیے۔

5. ایک ٹیلی ویژن چینل مختصر پیغامی خدمات (SMS) کے ذریعہ ''سگریٹ نوشی منع ہے'' سروے کرواتا ہے۔ A، B اور C (مواقع) Options کے ساتھ A مکمل ممنوع B صرف عوامی مقامات پر ممنوع، C ضرورت نہیں۔ ایک گھنٹے میں SMS کے ذریعہ حاصل نتائج

A	B	A	B	C	B				
A	B	B	A	C	C	B	B	A	B
B	A	B	C	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	B	C	B	A	B	A
B	C	B	B	A	B	C	B	B	A
B	B	A	B	B	A	B	C	B	A
B	B	A	B	C	A	B	B	A	

مندرجہ بالا معطیات کو تعددی تقسیمی جدول میں ظاہر کیجئے۔ کتنے جوابات موصول ہوئے؟ زیادہ تر لوگوں کا کیا خیال تھا؟

ہم نے کیا سیکھا

- جب تفتیش کار (طالب علم) سے واضح مفروضات اکٹھا کئے گئے تھے، معطیات کا اکٹھا کرنا ابتدائی معطیات کہلاتا ہے۔
- ایک ذرائع سے حاصل شدہ معلومات جو پہلے ہی ریکارڈ کئے گئے ہیں رجسٹر میں ثانوی معطیات کہلاتی ہے۔
- دیئے گئے معطیات میں اعظم ترین اور اقل ترین نشانات کا فرق سعت کہلاتا ہے۔
- ایک جدول میں معطیات کے حقیقی مشاہدات معہ تعداد کا اظہار **غیر گروہی تعددی تقسیمی جدول یا بااثر مشاہدات کا جدول** کہلاتا ہے۔

- اعداد و شمار سے منسلک معطیات جیسے چھپی ہوئی رپورٹیں اور خود تجربہ کے ذریعہ جمع نہیں کیا جاتا ہے۔ اس کو ثانوی معطیات کہتے ہیں۔
- وسطانیہ ایک معطیات کے مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے جب اس کو ترتیب میں لکھا جائے۔ (صعودی یا نزولی)
- جب مشاہدات کی تعداد n ایک طاق عدد ہے تب $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدات وسطانیہ ہے۔
- جب مشاہدات کی تعداد n ایک جفت ہے تب $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ واں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ واں مشاہدات
- وسطانیہ معطیات کو مساوی عدد کے دو گروپس میں تقسیم کرتا ہے۔ ایک حصہ بڑی قدروں پر اور دوسرا حصہ چھوٹی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے۔

سبق 7.2

مرکزی رجحان کی پیمائش

Measure of Central Tendency

7.2.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- مرکزی رجحان کی پیمائش کو سمجھنا۔
- گروہی معطیات اور غیر گروہی معطیات کا اوسط معلوم کرنا اور اس کے سوالات کو حل کرنا۔
- گروہی معطیات اور غیر گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنا اور اس کے سوالات کو حل کرنا۔
- گروہی معطیات اور غیر گروہی معطیات کا بہتانیہ معلوم کرنا اور اس سوالات کو حل کرنا۔
- روزمرہ زندگی میں اوسط، وسطانیہ اور بہتانیہ کے ذریعہ سوالات اور مسائل کو حل کرنا۔

7.2.1 تعریف

مرکزی رجحان کی پیمائش

ذیل کے حالات پر غور کیجئے۔

صورت-1: ایک ہاسٹل میں 50 طلباء ناشتے میں روزانہ 200 اڈلیاں کھاتے ہیں۔ اگر مزید 20 طلباء ہاسٹل میں شامل ہوتے ہیں تب میس انچارج کو مزید کتنی اڈلیاں بنانی پڑیں گی۔

صورت-2: ذیل کے جدول میں ایک فیکٹری کے اسٹاف کی تنخواہیں دی گئی ہیں۔ غور کیجئے۔ یہ تمام اسٹاف کی تنخواہ کی نمائندگی کرتی ہے۔

اسٹاف	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تنخواہ روپیوں میں (ہزاروں میں)	12	14	15	15	15	16	17	18	90	95

صورت-3: ذیل کے جدول میں ایک شہر میں حمل و نقل کے مختلف ذرائع دیے گئے ہیں۔ کون سا بہت ہی مقبول ذریعہ حمل و نقل ہے؟

(1) کار 15%

(2) ٹرین 12%

(3) بس 60%

(4) دو پہیہ والی گاڑیاں 13%

پہلی صورت میں عموماً ہم اوسط (اوسط حسابیہ) لیں گے تاکہ سوال کو حل کیا جا سکے۔ اگر ہم دوسری صورت میں بھی تنخواہوں کے اوسط لیتے ہیں تو یہ 30.7 ہو جائے گی لیکن خام معطیات کی تصدیق یہ ظاہر کرتی ہے کہ تنخواہ کی اوسط قدر ایک ملازم کی تنخواہ کی بہتر عکاسی نہیں کر سکتی کیوں کہ زیادہ سے زیادہ ملازمین کی تنخواہیں 12 سے 18 ہزار کے درمیان ہیں۔ اس صورت میں (وسطی قدر) وسطانیہ ایک

بہتر پیائش ہوسکتی ہے۔تیسری صورت میں بہتانیہ (کثیر الوقوع) ایک بہت ہی مناسب انتخاب Option کے طور پر غور کیا جاسکتا ہے۔مرکزی رجحان معلوم کرنے کے لئے اوسط یا وسطانیہ یا بہتانیہ کے درمیان معطیات کی نوعیت اور اس کے مقاصد ہی اس کے اصول ہوں گے۔

مندرجہ ذیل زندگی کے حالات کا مشاہدات کریں اور دوست کے ساتھ مباحثہ کریں۔

3 ایسے مواقع بتلائیے جہاں علیحدہ علیحدہ اوسط حسابیہ،وسطانیہ اور بہتانیہ کو معلوم کیا جاسکے۔

اس بات پر غور کیجئے کہ جہاں دو کرکٹرس رفیع اور وقار کے چاہنے والے دعویٰ کرتے ہیں کہ ان کے اسٹار ایک دوسرے سے بہتر اسکور بناتے ہیں۔آخری 5 میاچوں کی بنیاد پر وہ موازنہ کرتے ہیں۔

میاچیس		1st	2nd	3rd	4th	5^{th}
بنائے گئے رن	رفیع	50	50	76	31	100
	وقار	65	23	100	100	10

دونوں کھلاڑیوں کے چاہنے والے ان رن کو جمع کرتے ہیں اور ان کا اوسط معلوم کرتے ہیں اس طرح

رفیع کا اسکور $\frac{307}{5} = 61.4$

وقار کا اسکور $\frac{298}{5} = 59.6$

لہٰذا رفیع کا اوسط اسکور،وقار کے اوسط اسکور سے زیادہ ہے۔رفیع کے پرستار کہتے ہیں کہ رفیع کی کارکردگی وقار سے بہتر ہے لیکن وقار کے چاہنے والے اس بات سے راضی نہیں ہیں۔وقار کے پرستار دونوں کھلاڑیوں کے اسکور کو نزولی ترتیب میں لکھتے ہیں۔اور درمیانہ اسکور معلوم کرتے ہیں، جیسا کہ ذیل میں بتلایا گیا ہے:

رفیع	100	76	50	50	31
وقار	100	100	65	23	10

وقار کے چاہنے والے کہتے ہیں، درمیانہ اسکور 65 ہے، جو رفیع کے درمیانہ اسکور سے زیادہ ہے۔جب کہ رفیع کا درمیانہ اسکور 50 ہے۔اس طرح وقار کی کارکردگی کو نمایاں مقام دیا جانا چاہیئے۔

لیکن ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقار نے 5 میاچوں میں دو سنچریاں بنائی ہیں لہٰذا اس کی کارکردگی بھی بہتر ہوسکتی ہے۔

آیئے اب رفیع اور وقار کے پرستاروں کے درمیان جھگڑے کو سلجھائیں گے۔آیئے ہم تین پیائشات کو دیکھتے ہیں تاکہ کسی نکتے پر آسکیں۔پہلے جو اوسط اسکور کو استعمال کیا گیا وہ اوسط حسابیہ ہے۔بحث میں جو درمیانی اسکور استعمال کئے گئے وہ وسطانیہ ہے۔کارکردگی کے تقابل کے لئے متعدد مرتبہ دہرایا گیا اسکور بھی ایک پیائش ہے وہ بہتانیہ ہے۔رفیع کا بہتانیہ اسکور 50 ہے۔وقار کا بہتانیہ اسکور 100 ہے۔ان تمام تین پیائشات میں کونسی پیائش اس مواد کے لئے مناسب ہے۔آیئے پہلے اوسط کے بارے میں تفصیل سے جانیں گے۔

7.2.2 اوسط حسابیہ

اوسط ایک معطیات کے مشاہدات کا مجموعہ ہوتا ہے جس کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ہم پہلے ہی ایک خام معطیات کے اوسط حسابیہ کے بارے میں بحث کر چکے ہیں۔

اوسط $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ $\frac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$ یا $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

خام معطیات کا اوسط:

مثال-1: ایک مقام کی ایک ہفتہ میں ریکارڈ کی گئی بارش 4 سمر‘ 5 سمر‘ 12 سمر‘ 3 سمر‘ 8 سمر‘ 0.5 سمر ہے۔ ہر ایک دن کی اوسط بارش معلوم کیجئے۔

حل: ہر دن کا اوسط مذکورہ بالا مشاہدات کا اوسط حسابیہ ہے۔ دیے گئے ایک ہفتے کی بارش 4 سمر‘ 5 سمر‘ 12 سمر‘ 3 سمر‘ 6 سمر‘ 8 سمر‘ 0.5 سمر ہے۔

مشاہدات کی تعداد (n) = 7

اوسط $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . x_n}{n}$

جہاں $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ ، n مشاہدات مشاہدات ہیں۔

اوسط $\bar{x} = \frac{4+5+12+3+6+8+0.5}{7} = \frac{38.5}{7} = 5.5$ سمر

مثال-2: اگر 10‘ 12‘ 18‘ 13‘ P اور 17 کا اوسط 15 ہے تب P کی قدر معلوم کیجئے۔

حل: ہم جانتے ہیں اوسط $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$

$$15 = \frac{10+12+18+13+P+17}{6}$$

$$90 = 70 + P$$

$$P = 90 - 70$$

$$P = 20.$$

غیر گروہی تعددی تقسیمی کا اوسط

اس مثال پر غور کیجئے ایک جماعت کے 40 طلباء کے وزن ذیل کی تعددی تقسیمی جدول میں دیے گئے ہیں:

وزن کلوگرام میں (x)	30	32	33	35	37	41
طلباء کی تعداد (f)	5	9	15	6	3	2

40 طلباء کا اوسط وزن معلوم کیجئے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ جدول میں 30 کیلو وزن کے 5 طلباء ہیں۔ اس طرح ان کے وزن کا مجموعہ 5x30=150 کلوگرام ہے۔ اسی طرح ہم ہر ایک تعدد کے وزن کا مجموعہ اور کل کا مجموعہ معلوم کر سکتے ہیں۔ تعدد کا مجموعہ ایک معطیات میں مشاہدات کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

اوسط حسابیہ $\bar{x} = \frac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}}$

اس طرح $\text{اوسط} = \frac{5\times30+9\times32+15\times33+6\times35+3\times37+2\times41}{5+9+15+6+3+2} = \frac{1336}{40} = 33.40\text{kg.}$

اگر $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ مشاہدات ہیں اور $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ متعلقہ تعدد ہیں۔تب مندرجہ بالا عبارت کواس طرح لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{اوسط حسابیہ} = \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4 + f_5x_5 + f_6x_6}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f + f_6} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

مثال-3: ذیل کے معطیات کا اوسط معلوم کیجئے۔

25	20	15	10	5	x
5	7	25	10	3	f

حل :

مرحلہ-1: ہرایک صف کے $f_i \times x_i$ کو محسوب کیجئے۔

مرحلہ-2: تعدد کے مجموعہ کو معلوم کیجئے (Σf_i) اور $f_i \times x_i$ کا مجموعہ $\Sigma f_i \times x_i$ محسوب کیجئے۔

مرحلہ-3: اوسط $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{755}{50} = 15.1$

$f_i x_i$	f_i	x_i
5	3	15
10	10	100
15	25	375
20	7	140
25	5	125
	$\Sigma f_i = 50$	$\Sigma f_i x_i = 755$

مثال-4: اگر ذیل کے معطیات کا اوسط 7.5 ہے تب A کی قدر معلوم کیجئے۔

10	9	8	7	6	5	نشانات
4	8	A	17	10	3	طلباء کی تعداد

حل: تعدد کا مجموعہ $(\Sigma f_i) = 42 + A$

$f_i \times x_i$ کا مجموعہ $(\Sigma f_i x_i) = 306 + 8A$

$$\text{اوسط} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma f_i xi}{\Sigma\, f_i}$$

دیا گیا اوسط حسابیہ $= 7.5$

$$\text{لہٰذا} \quad 7.5 = \frac{306 + 8A}{42 + A}$$

$\Rightarrow \quad 7.5(42 + A) = 306 + 8A$

$\Rightarrow \quad 7.5 \times 42 + 7.5A = 306 + 8A$

$\Rightarrow \quad 315 + 7.5A = 306 + 8A$

$\Rightarrow \quad 315 - 306 = 8A - 7.5A$

$\Rightarrow \quad 9 = 0.5A$

$\Rightarrow \quad A = 18$

انحرافی طریقے کے ذریعہ غیر گروہی معطیات کا اوسط معلوم کرنا۔

مثال-5: ذیل کے معطیات کا اوسط حسابیہ معلوم کیجئے۔

X	10	12	14	16	18	20	22
F	4	5	8	10	7	4	2

حل:

(i) سادہ طریقہ

غیر گروہی تعددی تقسیم کی صورت میں آپ ضابطہ کو استعمال کر سکتے ہیں

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{622}{40} = 15.55$$

x_i	f_i	$f_i x_i$
10	4	40
12	5	60
14	8	112
16	10	160
18	7	126
20	4	80
22	2	44
	$\sum_{i=1}^{7} f_i = 40$	$\sum_{i=1}^{7} f_i x_i = 622$

(iii) انحرافی طریقہ:

اس صورت میں ہم مشاہدات میں سے موزوں مشاہدہ لیتے ہیں۔فرض کیجئے کہ ہم 16 کو اندازاً اوسط مانتے ہیں تب A=16 دی گئی جدول میں دوسرے مشاہدات کا انحراف ہوتا ہے۔

تعدد کا مجموعہ = 40

x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$fi \times di$
10	4	–6	–24
12	5	–4	–20
14	8	–2	–16
16	10	0	0
18	7	+2	+14
20	4	+4	+16
22	2	+6	+12
	40		–60+42 = –18

$fi \times di$ کے حاصل ضرب کا مجموعہ $= -60 + 40$

$$\Sigma f_i d_i = -18$$

اوسط $$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 16 + \left(\frac{-18}{40}\right)$$

$$= 16 - 0.45$$

$$= 15.55.$$

غیر گروہی معطیات کا اوسط

مثال-5: ZPHS Sangam کے دسویں جماعت کے 30 طلباء کے ریاضی میں حاصل نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔ان طلباء کے نشانات کا اوسط معلوم کیجیے۔

حاصل نشانات (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
طلباء کی تعداد (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

حل: آیئے اب ہم دیئے گئے معطیات کو منظم انداز میں ترتیب دیتے ہوئے ان کا مجموعہ معلوم کریں گے۔

حاصل کردہ نشانات (x_i)	طلباء کی تعداد (f_i)	$f_i \times x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160

50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
مجموعہ	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

اسی طرح ، $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$

اس لئے طلباء کے نشانات کا اوسط=59.3

ہماری روزمرہ کی زندگی میں مختلف حالات میں معطیات اکثر بڑی مقدار میں موجود ہوتے ہیں۔جن کو با مقصد مطالعہ بنانے کے لئے ان معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔اس لئے ہم غیر گروہی معطیات کو گروہی معطیات میں تبدیل کرتے ہوئے ان معطیات کا اوسط معلوم کرنے کے لئے چند طریقے اخذ کریں گے۔

آیئے اب ہم مثال 6 میں دئے گئے غیر گروہی معطیات کو وقفہ جماعت کی چوڑائی 15 لیتے ہوئے گروہی معطیات میں تبدیل کریں گے۔

یاد رکھئے کہ ہر وقفہ جماعت کے لئے تعدد کا تعین کرتے وقت ان طلباء کی تعداد کو جن کے نشانات جماعت کی اوپری سرحد کے مساوی ہو اگلی جماعت کی تعدد میں لیا جاتا ہے۔مثلاً 40 نشانات حاصل کرنے والے 4 طلباء کو وقفہ جماعت 55-40 میں لیا جاتا ہے۔ تا کہ وقفہ جماعت 40-25 میں اس اصول کو ذہن میں رکھتے ہوئے آیئے گروہی تعددی بٹاؤ کا جدول تیار کریں۔

وقفہ جماعت	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
طلباء کی تعداد	2	3	7	6	6	6

اب ہر ایک وقفہ جماعت کے لئے ہمیں ایک نقطہ (قدر) کی ضرورت ہوتی ہے جو اس جماعت کے لئے ایک نمائندہ ہو۔ یہ مانا گیا ہے کہ ہر وقفہ جماعت کا تعدد کا اس جماعت کے وسطی قدر (Mid point) کے اطراف ہوتا ہے۔اس لئے وسطی نقطہ (وسطی قدر) کو ہر جماعت کے تمام مشاہدات کے لئے نمائندہ تصور کیا جاتا ہے اور اس کو جماعت کا جماعتی اعداد (Class marks) کہتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ جماعتی عدد (وسطی نقطہ) دراصل اس جماعت کی نچلی سرحد اور اوپری سرحد کا اوسط ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{جماعت کی نچلی سرحد} + \text{جماعت کی اوپری سرحد}}{2}$$

مثلاً جماعت 25-10 کے لئے جماعتی عدد $\frac{10+25}{2} = 17.5$ ہوگا۔ اس طرح ہم بقیہ جماعتوں کے لئے جماعتی عدد معلوم کر سکتے ہیں۔ان جماعتی اعداد کو جدول میں درج کیا جاتا ہے اور ان کو xi سے ظاہر کیا جاتا ہے۔آیئے اب ہم پچھلی مثال کے طریقہ کار پر اوسط معلوم کر سکتے ہیں۔

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد f_i	جماعتی تعداد x_i	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

جدول کے آخری کالم میں موجود قدروں کا مجموعہ سے ہمیں $\Sigma f_i x_i$ حاصل ہوتا ہے اس لئے دئے گئے گروہی معطیات کا اوسط $\bar{x}$ اس طرح ہے

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

اوسط معلوم کرنے کا یہ نیا طریقہ Direct method راست طریقہ کہلاتا ہے۔ہم نے مشاہدہ کیا ہے کہ مندرجہ بالا دونوں صورتوں میں اوسط معلوم کرنے کے لئے، لئے گئے معطیات اور ضابطہ یکساں ہیں۔لیکن حاصل نتائج مختلف ہیں۔

مثال (6) میں حقیقی اوسط 59.3 ہے اور تقریباً اوسط 62 ہے۔کیا آپ سوچ سکتے ہو کہ ایسا کیوں ہوا ہے؟

بعض اوقات جب x_i اور f_i کی قدریں بہت بڑی ہوتب ان کا حاصل ضرب معلوم کرنا مشکل اور زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔ ان حالات کے لئے آیئے اب ہم کوئی دوسرا طریقہ عمل پر غور کریں تا کہ ریاضیاتی عمل کو کسی حد تک کم اور آسان کیا جا سکے۔ہم f_i s کو کچھ نہیں کر سکتے لیکن x_i s کی قدروں کو چھوٹی قدروں میں تبدیل کر سکتے ہیں تا کہ حاصل ضرب کو آسان ہو جائے۔ہم x_i s یہ کس طرح کریں گے کسی مقررہ قدر کو ہر ایک x_i s سے تفریق کرنا کیسا ہے؟ آیئے اب ہم اس طریقہ کار سے مثال 6 میں دئے گئے معطیات کا اوسط معلوم کرتے ہیں۔

اس طریقہ کار کا پہلا مرحلہ یہ ہے کہ x_i s کی کسی ایک قدر کو مفروضہ اوسط کے طور پر لیا جائے اور اس کو a سے ظاہر کیا جائے۔ ریاضیاتی عمل کو مزید مختصر کرنے کے لئے اس مفروضہ x_i اوسط کو لیا جائے $x_1, x_2, ..., x_n$ کے درمیان ہو۔اس طرح $a = 47.5$ یا $a = 62.5$ لے سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $a = 47.5$ دوسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہر x_i s سے a کی انحرافی قدریں معلوم کریں۔جس کو d_1 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

تیسرا مرحلہ یہ ہے کہ ہرایک f_i اور d_i کا حاصل ضرب معلوم کیا جائے اوران کا مجموعہ کومحسوب کیا جائے یعنی $\Sigma f_i d_i$ مندرجہ ذیل جدول میں اس طریقہ کار کو سمجھایا گیا ہے $d_i = x_i - a = x_i - 47.5$

وقفہ جماعت x	طلباء کی تعداد (f_i)	جماعتی عدد (x_i)	$d_i = x_i - a$	$f_i d_i$
10-25	2	17.5	–30	–60
25-40	3	32.5	–15	–45
40-55	7	47.59(a)	0	0
55-70	6	62.5	15	90
70-85	6	77.5	30	180
85-100	6	92.5	45	270
جملہ	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

اس طرح مندرجہ بالا جدول سے انحراف کا اوسط $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$ ہے۔

آیئے اب $\bar{d}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان رشتہ محسوب کریں۔

چونکہ d_i کی قدر معلوم کرنے کے لئے ہرایک x_i سے a تفریق کیا جاتا ہے۔اس لئے اوسط $\bar{x}$ کی قدر حاصل کرنے کے لئے محسوب کردہ d کی قدر میں a جمع کرنا ہوگا۔اس کی تشریح ریاضیاتی طور پر اس طرح کی جاتی ہے۔

انحراف کا اوسط $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

اس لئے $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$

$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$

کیوں کہ $\bar{d} = \bar{x} - a$

اس لئے $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

جدول سے a، $\Sigma f_i d_i$ اور Σf_i کی قدر درج کرنے پر

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

مندرجہ بالا طریقۂ کار 'مفروضہ اوسط کا طریقہ'' کہلاتا ہے۔

مندرجہ ذیل جدول کے کالم '4' میں موجود قدروں کا مشاہدہ کیجیئے۔ جو تمام 15 کے اضعاف ہیں۔ اگر ہم کالم 4 کی تمام قدروں کو 15 سے تقسیم کرتے ہوئے اور بھی چھوٹی قدریں حاصل کر سکتے ہیں۔ جن کو f_i سے ضرب دینا آسان ہوگا۔ (یہاں پر عدد '15' ہر جماعت کے لئے وقفہ جماعت ہے)

اس لئے فرض کرو کہ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ جہاں پر a مفروضہ اوسط ہے اور h وقفہ جماعت ہے۔

اب، ہم ہر جماعت کے لئے u_i کی قدر معلوم کرتے ہوئے $f_i u_i$ کی قدروں کا مجموعہ $\Sigma f_i u_i$ کے معلوم کرتے ہیں اور $h = 15$ (عام طور پر وقفہ جماعت کو h لیا جاتا ہے لیکن یہ ضروری نہیں کہ ہمیشہ وقفہ جماعت ہی لی جائے)

فرض کرو کہ $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد (f_i)	جماعتی عدد (x_i)	$d_i = x_i - a$	$x_i - a$	$f_i u_i$
10-25	2	17.5	–30	–2	–4
25-40	3	32.5	–15	–1	–3
40-55	7	47.5	0	0	0
55-70	6	62.5	15	1	6
70-85	6	77.5	30	2	12
85-100	6	92.5	45	3	18
جملہ	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

یہاں ہم کو دوبارہ $\bar{u}$ اور $\bar{x}$ کے درمیان رشتہ محسوس کرنا ہوگا۔

ہم جانتے ہیں کہ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$

اسی طرح $\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$

اسی طرح

$$\bar{u} = \frac{\frac{\Sigma f_i(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}(\bar{x} - a)$$

$$h\bar{u} = (\bar{x} - a)$$

$$\bar{x} = a + h\bar{u}$$

اس لئے

$$\bar{x} = a + h\left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right]$$

یا

$$\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h$$

جدول سے 'a' $\Sigma f_i x_i$ اور Σf_i کی قدر درج کرتے ہوئے اوسط حسابیہ $\bar{x}$ محسوب کیا جاتا ہے

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{29}{30} \times 15$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62.$$

اس طرح طلباء کے نشانات کا اوسط 62 حاصل ہوگا۔

مندرجہ بالا طریقہ **''انحرافی طریقہ''** کہلاتا ہے۔

نوٹ:

- اگر تمام d_1s کی قدروں کے لئے مشترک جزو ضربی ہو تب انحرافی طریقہ موزوں ہوگا۔
- تینوں طریقوں سے حاصل کردہ اوسط مساوی ہوتا ہے۔
- مفروضہ اوسط کا طریقہ اور انحرافی طریقہ راست طریقے کی مختصر شکل ہے۔
- ضابطہ $\bar{x} = a + h\bar{u}$ کی قدریں جدول سے تعلق رکھتی ہوں یا نہ ہوں قابل عمل ہوتا ہے۔ لیکن یہ قدر اس طرح لی جائے کہ $u_i = \frac{x_i - a}{h_i}$ صفر نہ ہو۔

آیئے اب ہم ان طریقوں کو دوسری مثالوں میں استعمال کریں گے۔

مثال-7: مندرجہ ذیل جدول میں جو ہمارے ملک ہندوستان کے تمام ریاستوں اور مرکزی زیر انتظام علاقوں کے دیہات کے اسکول میں پڑھانے والی معلمات کا فی صد دیا گیا ہے۔ان کا اوسط مندرجہ بالا تین طریقوں سے محسوب کیجیے۔

معلمات کا فیصد	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
ریاستوں/مرکزی زیر انتظام علاقوں کی تعداد	6	11	7	4	4	2	1

وسائل: (NCERT) کے ساتویں کل ہند تعلیمی سروے سے حاصل کیا گیا ہے۔

حل: آیئے اب ہم ہر جماعت کے جماعتی عدد (وسطی قدر) x_i محسوب کریں گے۔

یہاں ہم $a = 50$ $h = 10$ لیتے ہیں۔

تب $d_i = x_i - 50$ اور $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$

اب d_i اور u_i کی قدر کو معلوم کر کے جدول میں درج کیجیے۔

معلمات کا فیصد C.I	ریاستوں/مرکزی زیر انتظام علاقے کی تعداد	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
15-25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25-35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35-45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45-55	4	50	0	0	200	0	0
55-65	4	60	10	1	240	40	4
65-75	2	70	20	2	140	40	4
75-85	1	80	30	3	80	30	3
جملہ	$\Sigma f_i = 35$					360	–36

جدول سے $\Sigma f_i = 35, \Sigma f_ix_i = 1390, \Sigma f_id_i = -360, \Sigma f_iu_i = -36$ حاصل ہوتا ہے۔

راست طریقے کے استعمال سے $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i} = \dfrac{1390}{35} = 39.71$

مفروضہ طریقے کے استعمال سے $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_id_i}{\Sigma f_i} = 50 + \dfrac{-360}{35} = 50 - 10.29 = 39.71$

$$\bar{x} = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 50 + \frac{-36}{35} \times 10 = 39.71$$ انحرافی طریقے سے

اس طرح دیہاتی اسکول میں پڑھانے والی معلمات کا فیصدی 39.71 ہے۔

اگر چہ کہ وقفہ جماعت غیر مساوی ہو اور x_i کی قدریں اعظم ترین ہو تب بھی انحرافی طریقہ کار کے ذریعہ اوسط محسوب کیا جاسکتا ہے۔ h کی قدر کو اس طرح لی جائے کہ وہ تمام d_i 'S کو تقسیم کرتا ہو۔

مثال-8: تعددی ہٹاؤ جدول میں ایک روزہ کرکٹ میاچوں میں گیند بازوں کے حاصل کردہ وکٹ کی تعداد دی گئی ہے۔ان معطیات کا اوسط موزوں طریقہ کے استعمال سے معلوم کریں۔نیز یہ بھی بتایئے کہ اوسط سے کس بات کا اندازہ لگایا جاتا ہے۔

وکٹوں کی تعداد	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
بلے بازوں کی تعداد	7	5	16	12	2	3

حل: یہاں پر وقفہ جماعت مختلف ہے اور x_i's کی قدریں بہت بڑی ہیں۔پھر بھی ہم انحرافی طریقہ کے استعمال سے $a = 200$ اور $h = 20$ لیتے ہوئے اوسط حسابیہ معلوم کریں گے۔ ہمیں جدول میں دیا گیا ڈاٹا مکمل کرنا ہوتا ہے۔

معلمات کا فیصد C.I	ریاستوں/مرکزی زیر انتظام علاقے کی تعداد	x_i	$d_i = x_i = 50$	$u_i = \frac{x_i = -50}{10}$	f_ix_i	f_id_i	f_iu_i
20-60	7	20	40	160	−160	−8	−56
60-100	5	30	80	120	−120	−6	−30
100-150	16	40	125	75	−75	−3.75	−60
150-250	12	50	200(α)	0	0	0	0
250-350	2	60	300	100	100	5	10
350-450	3	70	400	200	200	10	30
		80					
جملہ	45						−106

$$\bar{x}_i = a + \left[\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right] \times h = 200 + \frac{-106}{45} \times 20 = 200 - 47.11 = 152.89$$ اس طرح

اس طرح ایک روزہ کرکٹ میاچ میں 45 بلے بازوں کے اوسط وکٹوں کی تعداد 152.89 ہے۔

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. ذیل کے جدول میں ایک پوسٹ آفس کے پارسلوں کے وزن دیئے گئے ہیں

وزن کلوگرام میں	50	65	75	90	110	120
پارسلوں کی تعداد	25	34	38	40	47	16

تب پارسلس کا اوسط وزن معلوم کیجئے۔

2. ذیل کے جدول میں ایک گاؤں کے خاندانوں کی تعداد کے مقابل ان کے بچوں کی تعداد بھی دی گئی ہے۔

بچوں کی تعداد	0	1	2	3	4	5
خاندان کی تعداد	11	25	32	10	5	1

ایک خاندان کے بچوں کی اوسط تعداد معلوم کیجئے۔

3. ذیل کی تعددی تقسیم کا اوسط 7.2 ہے تب K کی قدر معلوم کیجئے۔

x	2	4	6	8	10	12
f	4	7	10	16	K	3

7.2.3 وسطانیہ

وسطانیہ دیئے گئے خام معطیات کے مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے۔ان کے مشاہدات کو صعودی/نزولی ترتیب میں لکھا جاتا ہے تو یہ معطیات دو مساوی گروپس میں تقسیم ہوتی ہیں۔ ایک حصہ کا وسطانیہ بڑی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے اور دوسرا حصہ وسطانیہ سے چھوٹی قدروں پر مشتمل ہوتا ہے۔

جب خام معطیات کے مشاہدات کو ترتیب میں رکھنے پر اگر معطیات کے مشاہدات کی تعداد n ایک طاق عدد ہے تب $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ مشاہدہ وسطانیہ ہوگا۔

اگر n ایک جفت ہے تب $\left(\frac{n}{2}\right)^{th}$ اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ مشاہدات کا اوسط اس کا وسطانیہ ہوگا۔

تعددی تقسیم کا وسطانیہ

آیئے ایک کمپنی کے 100 ملازمین کی ماہانہ تنخواہ کو معطیات کے باا ثر مشاہدات تصور کرتے ہوئے ان کا وسطانیہ معلوم کرنے کے طریقے پر بحث کریں گے۔

تنخواہیں (روپیوں میں)	7500	8000	8500	9000	9500	10000	1100
ملازمین کی تعداد	4	18	30	20	15	8	5

دیئے گئے معطیات کا وسطانیہ کس طرح معلوم کرنا چاہئے۔

پہلے دیئے گئے مشاہدات صعودی یا نزولی ترتیب میں لکھئے۔ اس کے بعد جدول میں مشاہدہ کی متعلقہ تعدد کو لکھے اور کم تر یکجائی تعدد کو محسوب کیجئے۔

یکجائی تعدد؛ ایک مخصوص مشاہد تک تعددوں کا بڑھتا ہوا مجموعہ ہوتا ہے۔

$\frac{N}{2}$ معلوم کیجئے اور وسطانی جماعت کی شناخت کیجئے۔ جس کا یکجائی تعداد $\frac{N}{2}$ سے زیادہ ہو جہاں N تعددوں کا مجموعہ ہے۔

یہاں جفت $N = 100$ جفت ہے اس طرح $\left[\frac{N}{2}\right]^{th}$ اور $\left[\frac{N}{2}+1\right]^{th}$ مشاہدات ترتیب وار 50 اور 51 ہیں۔

جدول کی رو سے 50 ویں اور 51 ویں مشاہدات کی متعلقہ قدریں ایک ہی ہیں۔ جو 8500 تنخواہ میں شامل ہیں۔ اس طرح اسی تقسیم کی وسطانی جماعت 8500 ہے۔

اب گروہی معطیات کا وسطانیہ معلوم کرنے کے لئے ہم دونوں یکجائی تعدد میں کسی کو بھی استعمال کر سکتے ہیں۔ گروہی معطیات میں یکجائی تعدد پر نظر ڈالتے ہی یہ ممکن نہیں ہے کہ درمیانی مشاہدہ کی نشاندہی کی جائے۔ یہ درمیانی مشاہدہ اس ہی وقفہ جماعت میں کہیں واقع ہوگا۔ اس لئے اس جماعت کے درمیان اس قدر کو معلوم کرنے کے لئے دیئے گئے کل تعدد کو دو نصف حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ لیکن یہ قدر کس جماعت سے تعلق رکھتی ہے کس طرح معلوم کیا جائے۔

اس جماعت کو معلوم کرنے کے لئے تمام جماعتوں کا یکجائی تعداد اور $\frac{n}{2}$ کی قدر معلوم کی جاتی ہے اور اس جماعت کی نشاندہی کی جاتی ہے۔ جس کا یکجائی تعدد $\frac{n}{2}$ سے زیادہ ہوگی۔ وہ جماعت وسطانوی کی جماعت کہلاتی ہے۔

یکجائی تعدد (cf)	طلباء کی تعداد (f)	نشانات
5	5	0-10
8	3	10-20
12	4	20-30
15	3	30-40
18	3	40-50
22	4	50-60
29	7	60-70
45	7	80-90
53	8	90-100

مندرجہ بالا تعددی ہٹاؤ کے جدول میں $n = 53$ اس لئے $\frac{n}{2} = 26.5$ اب جماعت 70 - 60 کا یکجائی تعدد 29 ہے۔ جو $\frac{n}{2}$ یعنی 26.5 سے زیادہ ہے۔ اس لئے جماعت 70 - 60 وسطانوی (Medium class) ہے۔

وسطانوی جماعت کی نشاندہی کے بعد مندرجہ ذیل ضابطہ کی مدد سے وسطانیہ محسوب کیجئے۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

جہاں پر $l =$ وسطانوی جماعت کی نچلی سرحد

$n =$ مشاہدات کی تعدد ہے۔

$cf =$ وسطانوی جماعت سے پہلی والی جماعت کا یکجائی تعدد ہے۔

$f =$ وسطانوی جماعت تعدد

$h =$ وقفہ جماعت (وسطانوی جماعت کا وقفہ)

ضابطہ میں قدروں کو درج کرنے پر

$$\frac{n}{2} = 26.5,\ l = 60,\ \ cf = 22,\ \ f = 7,\ h = 10$$

مندرجہ بالا ضابطہ سے ہم کو حاصل ہوگا

$$\text{وسطانیہ} = 60 + \left[\frac{26.5 - 22}{7}\right] \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4.$$

اس طرح جماعت میں آدھے طلباء کے نشانات 66.4 سے کم اور آدھے نشانات 66.4 سے زیادہ ہے۔

مثال-9: ایک مدرسہ کے دسویں جماعت کے 51 لڑکیوں کے قد کا سروے کرتے ہوئے حاصل معطیات کو ذیل کے جدول میں اس طرح بتلایا گیا۔ ان کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

قد سمر میں	140 سے کم	145 سے کم	150 سے کم	155 سے کم	100 سے کم	165 سے کم
لڑکیوں کی تعداد	4	11	24	40	46	51

حل : وسطانیہ معلوم کرنے کیلئے ہمیں وقفہ جماعت اور اس جماعت کا متعلقہ تعدد معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

دیا گیا تعددی ہٹاؤ کا جدول ''کم تر یکجائی تعدد'' ہے۔

کیوں کہ 165, 160, 15, 5, 150, 145, 140 متعلقہ جماعتوں کے اوپری سرحد ہیں۔ اس طرح یہ جماعتیں یہ ہوں گی۔ 140 سے کم 140 - 145, 160 - 165 .... . ., 145 - 150.

وقفہ جماعت	تعدد	یکجائی تعدد
140 سے کم	4	4
140-145	7	11
145-150	18	29
150-155	11	40
155-160	6	46
160-165	5	51

تعددی ہٹاؤ کے مشاہدات پر غور کرنے پر پت چلتا ہے کہ 4 لڑکیاں ایسے ہیں جن کا قد 140 سمر سے کم ہے۔یعنی 140 سے کم وقفہ جماعت کا تعدد 4 ہوگا۔ اب 11 لڑکیاں ہیں۔ جن کا قد 145 سمر سے کم ہے اور 4 لڑکیاں جن کا قد 140 سے کم ہے۔ لہٰذا وقفہ جماعت 140-145 کا تعدد 7 = 4 – 11 ہوگا۔اس طرح تمام متعلقہ جماعتوں کا تعدد محسوس کیا جا سکتا ہے۔

مشاہدات کا تعداد n = 51

یعنی $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25\ 5$

25.5 واں مشاہدہ وقفہ جماعت 145-150 میں واقع ہوتا ہے۔

$\therefore$ 145-150 کو وسطانیہ جماعت کہتے ہیں۔

تب $l = 145$ پہلی سرحد

$cf = 11$ (وسطانیہ جماعت سے پہلی جماعت کا یکجائی تعدد)

$f = 18$ وسطانیہ جماعت کا عدد

$h = 5$ وسطانیہ جماعت کا وقفہ جماعت

ضابطہ کو استعمال کرتے ہوئے

$$\text{وسطانیہ} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$= 145 + \frac{(25.5 - 11)}{18} \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03$$

اس طرح لڑکیوں کے قد کا وسطانیہ 149.3 سمر ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ 50% لڑکیوں کا قد 149.3 سے کم اور 50% لڑکیوں کا قد 149.3 سے زیادہ ہے۔

مثال-10: مندرجہ ذیل معطیات کا وسطانیہ 525 ہے۔ x اور y غائب شدہ تعدد معلوم کیجئے۔ جب کہ تعدد کا مجموعہ 100 ہے۔ جہاں C.I کا مطلب وقفہ جماعت اور Fr کا مطلب تعدد لیا جائے گا۔

CI	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000
Fr	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4

حل: دیا گیا ہے کہ $n = 100$

$$x + y = 100 - 76 = 24 \quad \dots (1)$$

وسطانیہ 525 ہے جو وقفہ جماعت 500-600 میں واقع ہوتا ہے۔

اس طرح $l = 500, f = 20, cf = 36 + x, h = 100$ اس لئے

وقفہ جماعت	تعدد	یکجائی تعدد
0-100	2	2
100-200	5	7
200-300	x	$7 + x$
300-400	12	$19 + x$
400-500	17	$36 + x$
500-600	20	$56 + x$
600-700	y	$56 + x + y$
700-800	9	$65 + x + y$
800-900	7	$72 + x + y$
900-1000	4	$76 + x + y$

ضابطے کے استعمال سے

$$\text{وسطانیہ (Median)} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h$$

$$525 = 500 + \frac{50 - 36 - x}{20} \times 100$$

$$525 - 500 = (14 - x) \times 5$$

$$25 = 70 - 5x$$

$$5x = 70 - 25 = 45$$

$$\therefore \quad x = 9$$

$x = 9$ کو مساوات (1) میں درج کرنے پر

$$9 + y = 24$$

$$y = 24 - 9$$

$$y = 15$$

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. ذیل کے تعددی ہٹاؤ کے جدول میں 400 نیان بلب کی مدت عمر گھنٹوں میعادی گئی ہے۔اس کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

کا کردگی گھنٹوں میں	1500-200	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
بلب کی تعداد	14	56	60	86	74	62	48

2. ذیل کے تعددی ہٹاؤ کے جدول میں ایک جماعت کے 30 طلبا کے وزن درج کئے گئے ہیں۔ ان کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

وزن کلوگرام میں	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75
طلباء کی تعداد	2	3	8	6	6	3	2

7.2.4 بہتاتیہ Mode

بہتاتیہ مشاہدہ کی وہ قدر ہوتی ہے جو متعدد مرتبہ وقوع پذیر ہوتی ہے۔ یعنی زیادہ تعداد میں اوقع ہونے والا مشاہدہ بہتاتیہ کہلاتا ہے۔

مثال-11: ایک دکان میں ایک مخصوص دن مختلف سائز کے جوتے فروخت کئے گئے۔ جوتوں کی تعداد کو ذیل میں بتلایا گیا ہے۔ بہتاتیہ معلوم کیجئے۔

6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 10, 7, 6, 7, 9, 7, 6.

حل: پہلے مشاہدات کو ترتیب میں لکھئے۔ 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10 تا کہ تعددی تقسیمی جدول بناسکیں۔

سائز	6	7	8	9	10
فروخت کئے گئے جوتوں کی تعداد	4	5	1	2	1

یہاں عدد 7 متعدد مرتبہ واقع ہو چکا ہے یعنی 5 مرتبہ

چونکہ دیئے گئے معطیات (جوتوں کی جسامت) کا بہتاتیہ 7 ہے۔

یہ جوتے کی جسامت 7 کو ظاہر کرتا ہے۔ جو سب سے جلد فروخت ہونے والی شئے کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال-12: ایک جماعت کے 20 طلباء کے ٹسٹ کے اسکور 100 کے منجملہ ذیل میں دیئے گئے ہیں۔

(a) 93, 84, 97, 98, 100, 78, 86, 100, 85, 92, 55, 91, 90, 75, 94, 83, 60, 81, 95

..... ,91-100, 81-90 وقفہ جماعت لے کر ایک تعددی جدول بنایئے۔

(b) ماڈل کلاس (عشائیہ) معلوم کیجئے۔ زیادہ سے زیادہ تعداد پر مشتمل ماڈل کلاس (مثالی جماعت) کہلاتی ہے۔

(c) وقفہ جماعت کی لمبائی معلوم کیجئے جو وسطانیہ پر مشتمل ہے۔

حل: (a)

زیادہ تر یکجائی تعدد	تعدد	ٹسٹ اسکور
20	9	91 - 100
11	6	81- 90
5	3	71 - 80
2	0	61 - 70
2	2	51 - 60
	20	جملہ

(a) 100-9 یک مثالی جماعت (ماڈل کلاس) ہے جو سب سے زیادہ تعدد 9 رکھتی ہے۔

(b) 20 کی وسطی قدر 10 ہے۔ اگر اوپر سے شمار کیا جائے تب 10 وقفہ جماعت 90-81 میں شامل ہوگا اور اگر نیچے سے شمار کیا جائے اور اوپر آگے جائیں تب بھی 10 وقفہ جماعت 90-81 میں ہوگا۔ وقفہ جماعت جو وسطانیہ پر مشتمل 90-81 ہے۔

گروہی معطیات کا عشائیہ

گروہی تعدد میں بٹاؤ کو دیکھ کر عشائیہ معلوم کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ یہاں پر ہم صرف اعظم ترین تعدد والی جماعت کی نشاندہی کر سکتے ہیں۔ جو بہتاتی جماعت کہلاتی ہے۔ بہتاتیہ اسی جماعت میں کوئی قدر رہوگی جس کو مندرجہ ذیل ضابطہ کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\text{Mode بہتاتیہ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$= l$ بہتائی جماعت کی نچلی سرحد ہے۔

$= h$ بہتائی جماعت کا وقفہ ہے۔

$= f_1$ بہتائی جماعت کا تعدد

$= f_0$ بہتائی جماعت کے پیش رو جماعت کا تعدد

$= f_2$ بہتائی جماعت کے پس رو جماعت کا تعدد ہے۔

آیئے ہم ذیل کی مثالوں کے ذریعہ مندرجہ بالا ضابطہ کے استعمال کو سمجھیں گے۔

مثال-13: ایک محلے میں 20 خاندان کا سروے کیا گیا اور خاندان میں موجود افراد کی تعداد کو درجہ ذیل جدول میں درج کیا گیا ہے۔

افراد خاندان	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
خاندان کی تعداد	7	8	2	2	1

ان معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجئے۔

حل: یہاں پر سب سے بڑا تعدد 8 ہے اور اس تعدد کی متعلقہ جماعت 3-5 ہے۔ اس لئے بہتائی جماعت (Mode Class) 3-5 ہے۔

اب بہتائی جماعت 3-5 نچلی سرحد $l = 3$

وقفہ جماعت $h = 2$ نچلی سرحد $f_1 = 8$

بہتائی جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد $f_0 = 7$

بہتائی جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد $f_2 = 2$

آیئے ان قدروں کو ضابطہ میں درج کرنے پر

$$\text{Mode بہتائیہ} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2\times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

اس لئے اوپر کے معطیات کا بہتاتیہ 3.286 ہے۔

مثال-14: ریاضی کے امتحان میں 30 طلباء کے نشانات کو مندرجہ ذیل جدول میں دیا گیا ہے۔ ان معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجئے۔ نیز اوسط معلوم کرتے ہوئے ان دونوں کا تقابلی تبصرہ کیجئے۔

وقفہ جماعت	طلباء کی تعداد (f_i)	جماعتی عدد (x_i)	$f_i x_i$
10-25	2	17.5	35.0
25-40	3	32.5	97.5
40-55	7	47.5	332.5
55-70	6	62.5	375.0
70-85	6	77.5	465.0
85-100	6	92.5	555.0
جملہ	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

حل: چونکہ طلباء کی سب سے زیادہ تعداد (یعنی 7) کے حاصل کردہ نشانات وقفہ جماعت 55-40 میں واقع ہیں۔اس لئے یہی جماعت یعنی 55-40 بہتائی جماعت کہلاتی ہے۔

بہتائی جماعت کی نچلی سرحد $l = 40$

جماعت کا وقفہ $h = 15$

اس جماعت کا تعدد $f_i = 7$

بہتائی جماعت سے پہلی جماعت کا تعدد $f_0 = 3$

بہتائی جماعت کے بعد والی جماعت کا تعدد $f_2 = 6$

ضابطہ کی رو سے $\text{Mode بہتاتیہ} = l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

$$= 40 + \left(\frac{7-3}{2\times 7 - 6 - 3}\right) \times 15 = 40 + 12 = 52$$

تبصرہ: بہتاتیہ (Mode) 52 ہے۔ مثال(1) کی مدد سے ہم جانتے ہیں کہ اوسط 62 ہے۔ جماعت کے زیادہ سے زیادہ تر طلباء کے حاصل نشانات 52 ہیں۔ جب کہ طالب علم کے حاصلہ نشانات کا اوسط 62 ہے۔

اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. مندرجہ ذیل جدول میں ایک مخصوص وزن میں ہاسپٹل میں شریک مریضوں کی عمروں کو دیا گیا ہے۔

عمر (سال میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	5

بہتاتیہ معلوم کیجیے۔

2. مندرجہ ذیل جدول میں 225 مختلف برقی آلات کی کام کرنے کی علامت (گھنٹوں میں) درج کی گئی ہے۔

کام کرنے کی مدت (گھنٹوں میں)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
تعدد	10	35	52	61	38	29

برقی آلات کی بہتائی مدت معلوم کیجیے۔

3. مندرجہ ذیل جدول میں ہندوستان کے تمام ریاستوں کے اسکولوں میں موجود ٹیچر اور طلباء کی نسبت کو درج کیا گیا ہے۔ ان معطیات کا بہتاتیہ اور اوسط معلوم کیجیے۔ ان کا تقابل کیجئے اور تبصرہ کیجیے۔

طلباء کی تعداد	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
ریاستوں کی تعداد	3	8	9	10	3	0	0	2

4. تعددی ہٹاؤ کے جدول میں ایک یومیہ انٹرنیشنل کرکٹ میاچ میں دنیا کے مشہور ہے۔ بلے بازوں کے بنائے گئے رن کی تعداد دی گئی ہے۔ اس کا بہتا تیہ معلوم کیجئے۔

رن	3000-4000	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000	10000-11000
بلے بازوں کی تعداد	14	18	9	7	6	3	1	1

مشق

1. گیہوں کے چار تھیلوں کا وزن (کلوگرام میں) 103, 105, 102, 104 ہیں۔ وزن کا اوسط معلوم کیجئے۔

2. گزشتہ پانچ سالوں میں ایک اسکول میں داخلے 605, 710, 745, 835 تھے۔ ہر سال داخلوں کا اوسط کیا تھا۔

3. ایک اسکول میں دسویں جماعت کے 30 طلباء کا ریاضی ٹسٹ میں درج ذیل نشانات ہیں:

40	73	49	83	40	49
27	91	37	31	91	40
31	73	17	49	73	62
40	62	49	50	80	35
40	62	73	49	31	28

نشانات کے اوسط معلوم کیجئے۔

4. پہلے دس طبعی اعداد کا اوسط معلوم کیجئے۔

5. ایک مخصوص کرانہ دکان میں 6 دن تک شوگر کی روزانہ فروخت نیچے دی گئی ہے۔ شوگر کی یومیہ فروخت کا اوسط معلوم کیجئے۔

ہفتہ	جمعہ	جمعرات	چہارشنبہ	منگل	پیر
130.5 کلوگرام	70.5 کلوگرام	82 کلوگرام	40 کلوگرام	121 کلوگرام	74 گرام

6. انحرافی طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے ذیل میں دیئے گئے تقسیم روزانہ اُجرت کا اوسط معلوم کیجئے۔

روزانہ اجرت (روپئے میں)	150-160	160-170	170-180	180-190	190-201
مریضوں کی تعداد	5	8	15	10	2

7. ذیل کے میاچوں کی سیریز میں باسکٹ بال ٹیم کے حاصل کردہ پوائنٹس اس طرح ہیں:
16, 1, 6, 26, 14, 4, 13, 8, 9, 23, 47, 9, 7, 8, 17, 28 معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

8. ذیل کے معطیات کا وسطانیہ معلوم کیجئے جو ریاضی کے ٹسٹ میں 15 میں سے 35 طلباء کو حاصل ہوتے ہیں:

حاصل کردہ نشانات	3	5	6	11	15	14	13	7	12	10
طلباء کی تعداد	4	6	5	3	1	7	3	2	3	1

9. ذیل میں 11 میچوں کی سیریز میں کئے گئے گول کا اسکور اس طرح ہے
1, 0, 3, 2, 4, 5, 2, 4, 4, 2, 5 اسکور کا وسطانیہ معلوم کیجئے۔

10. معطیات کا بہتاتیہ معلوم کیجئے۔

9, 6, 8, 9, 10, 7, 12, 15, 22, 15

11. ماحولیاتی معلومات کے لئے طلباء سے ایک سروے کروایا گیا۔ انہوں 20 گھروں میں موجودہ درختوں کی تعداد کا تعددی ہٹاؤ کا جدول تیار کیا۔ ہر ایک گھر میں موجود درختوں کی اوسط تعداد معلوم کیجئے۔

درختوں کی تعداد	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
گھروں کی تعداد	1	2	1	5	6	2	3

12. کسی فیکٹری کے 50 مزدوروں کی یومیہ اُجرت کے تعددی ہٹاؤ کا جدول دیا گیا ہے۔ کوئی موزوں طریقے سے مزدوروں کی اوسط یومیہ آمدنی معلوم کیجئے۔

یومیہ اجرت روپیوں میں	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450
مزدوروں کی تعداد	12	14	8	6	10

13. ایک محلے کے بچوں کو دیئے گئے یومیہ جیب خرچ کا گروہی تعددی ہٹاؤ کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔ اگر جیب خرچ کا اوسط 18 رروپئے ہو تب غائب شدہ f کی قدر کیا ہوگی۔

یومیہ جیب خرچ (روپیوں میں)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
بچوں کی تعداد	7	6	9	13	f	5	4

14. مندرجہ ذیل جدول میں ایک سال کے دوران میں ہاسپٹل میں شریک مریضوں کی عمروں کو دیا گیا ہے

عمر (سال میں)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
مریضوں کی تعداد	6	11	21	23	14	15

اوسط اور بہتا تیہ معلوم کیجئے۔ ان دونوں مرکزی رجحان کا تقابل کیجئے اور تبصرہ کیجئے۔

15. وری کوسے گاؤں کے 200 خاندانوں کے ماہانہ خرچ کو ذیل کے تعددی ہٹاؤ کے جدول میں دیا گیا ہے۔ ان خاندان کا بہتائی خرچ معلوم کیجئے اور اس کے علاوہ ان کے اوسط خرچ کیا ہوگا معلوم کیجئے۔

خرچ (روپیوں میں)	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000	3000-3500	3500-4000	4000-4500	4500-5000
بچوں کی تعداد	24	40	33	28	30	22	16	7

16. ذیل کے تعددی ہٹاؤ کے جدول میں ایک محلے 68 برقی صارفین کے مانہ صرف کی جانے والی برقی اکائیاں دی گئی ہیں۔ ان معطیات کا وسطانیہ، اوسط اور بہتا تیہ معلوم کرتے ہوئے ان کا تقابل کیجئے۔

صرف شدہ برقی اکائیاں	65-85	85-105	105-125	125-145	145-165	165-185	185-205
صارفین کی تعداد	4	5	13	20	14	8	4

17. اگر ذیل میں دیئے گئے 60 مشاہدات کا وسطانیہ 28.5 ہے تب x اور y کی قدر معلوم کیجئے۔

وقفہ جماعت	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
تعدد	5	x	20	15	y	5

18. مندرجہ ذیل جدول یں ایک لائف انشورنس ایجنٹ کے پاس 100 پالیسی رکھنے والے اشخاص کی عمر کا تعددی ہٹاؤ دیا گیا ہے۔ ان کیع مرکا وسطانیہ معلوم کیجئے۔ (یادرہے کہ لائف انشورنس پالیسی صرف 18 سال تا 60 سال کے عمر رکھنے والے اشخاص کو دی جاتی ہے)

عمر (سال میں)	20 سے کم	25 سے کم	30 سے کم	35 سے کم	40 سے کم	45 سے کم	50 سے کم	55 سے کم	60 سے کم
پالیسی رکھنے والوں کی تعدادا	2	6	24	45	78	89	92	98	100

ہم سب کا خلاصہ کرتے ہیں

- ایک مرکزی رجحان کی پیمائشات معطیات کی ایک منفرد قدر ہے۔ جو دوسرے مشاہدات کو بھی اکٹھا کرتی ہے۔
- مرکزی رجحان کی پیمائش کے اقسام اوسط، بہتاتیہ، وسطانیہ
- اوسط ایک معطیات کا مشاہدات کا مجموعہ ہوتا ہے جس کو مشاہدات کی تعداد سے تقسیم کیا جاتا ہے

$$\text{اوسط} = \frac{\text{مشاہدات کا مجموعہ}}{\text{مشاہدات کی تعداد}} \quad \text{یا} \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

- وسطانیہ ایک معطیات کے مشاہدات کی وسطی قدر ہوتی ہے۔ جب اس کو ترتیب میں لکھا جائے (صعودی یا نزولی)
- وسطانیہ دراصل مرکزی رجحان میں ایک ہے جو دیئے گئے مشاہدات کی بالکل وسط میں آنے والی قدر کو ظاہر کرتا ہے۔ دیئے گئے معطیات مشاہدات کو صعودی ترتیب (نزولی ترتیب) میں درج کرنا چاہیئے۔
- بہتاتیہ مشاہدہ کی وہ قدر ہوتی ہے جو متعدد مرتبہ وقوع پذیر ہوتی ہے۔ یعنی زیادہ تعداد میں واقع ہونے والا مشاہدہ بہتاتیہ کہلاتا ہے۔

گروہی معطیات کا اوسط

(i) **راست طریقہ**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

جہاں x_i جماعتی عدد اور x_i's کا f_i تعددی ہے۔

(ii) **مفروضہ اوسط کا طریقہ کار**

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

(iii) **انحراف کا طریقہ**

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \right) \times h$$

جہاں مفروضہ اوسط a ہے $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ اور h وقفہ جماعت ہے۔

سبق 7.3

معطیات کا ترسیمی اظہار

Graphical Represtation of Data

7.3.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- دیئے گئے بار چارٹ کی تشریح اور وضاحت کرنا۔
- بار گراف کے ذریعہ دیئے گئے معطیات/ ڈاٹا کا اظہار۔
- ہسٹوگرام کے ذریعہ دیائے گئے معطیات/ ڈاٹا کا اظہار۔
- دیئے گئے معطیات کے لئے تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل۔
- دیئے گئے معطیات کے لئے آجیو منحنیوں (Ogive Curves) کی تشکیل اور ان کی تشریح۔

7.3.1 تعریف

جب ہم معطیات پر غور کرتے ہیں' معطیات کی پیائشی خاصیت ''متغیر'' (Variable) اور معطیات کی مختلف اشیاء متغیرات کی قدریں کہلاتی ہیں۔ مثال کے طور پر کسی سال ایک اسکول کے دہم جماعت کے طلباء کے جملہ نشانات کو ایک متغیر 'x' کے طور پر مانا جائے تو ان کے حاصل کردہ نشانات $(i = 1, 2, 3 .....)$ x_i ' متغیر کی قدریں کہلائیں گی اور اسکول کے مطابق x_i کی جملہ قدروں کو جامع معطیات مانا جائے گا۔

معطیات کو مختصر کر کے ''تعددی تقسیم'' میں پیش کرنے سے شماریاتی تجزیہ آسان ہو جاتا ہے اور یہی شماریاتی تجزیہ کو شکل دینے کی بنیاد بنتا ہے۔ اگر یہی معطیات کو ترسیمات کے ذریعہ پیش کیا جائے تو اعداد کا حاصلہ ملتا ہے اور ہم معطیات کی نمایاں خصوصیات کو آسانی سے سمجھ سکتے ہیں۔ عام طور پر اعداد اور پہاڑوں سے وہ بات سمجھ میں نہیں آتی جو شماریات کی تھوڑی بہت معلومات رکھنے والے اعداد کی ترسیمی شکل دیکھ کر آسانی سے سمجھ جاتے ہیں۔ تعدد میں تبدیلی کے مشاہدہ کے لئے جیسا متغیر میں اضافہ (یا کمی)' مختلف جماعتوں کی تعدد کے درمیان تعلق معلومات ہوتا ہے اور معیات کی تشکیل میں ترسیمات فائدہ مند ہوتے ہیں۔

عام طور پر متغیر سے تعلق رکھنے والے تعددی تقسیمات کے لئے مندرجہ ذیل ترسیمات تشکیل دیئے جاتے ہیں:

(1) بار گراف (2) ہسٹوگرام (3) تعددی کثیر ضلعی (4) آجیو منحنیاں (a) کم تر یکجائی تعددی منحنی (b) زیادہ تر یکجائی تعددی منحنی۔

7.3.2 بارچارٹس (ترسیمات)

افقی یا انتصابی مساوی چوڑائی اور مختلف طول والے بار سے معلومات یا معطیات کا اظہار بار گراف کہلاتا ہے۔

مان لیجئے: ذیل میں ایک جماعت میں 40 طلباء کے حاصل کردہ گریڈس دیئے گئے ہیں۔

طلباء کی تعداد	گریڈس
13	A
9	B
6	C
7	D
5	E

افقی خط X۔محور پر مساوی چوڑائی اور مساوی فاصلہ رکھنے والے بار' بار گراف یا بار چارٹ کہلاتے ہیں۔ مستطیلات کے طول کو انتصابی خط Y۔محور پر دکھلایا جاتا ہے جو ان کے متعلقہ تعدد (طلباء کی تعداد) کے متناسب ہوتے ہیں۔

یہاں پر مستطیل کی چوڑائی کوئی خصوصی معنی نہیں رکھتی سوائے اس کے کہ اس کو تصویری طور پر پُرکشش بنایا جائے۔

اگر آپ کو شکل 7.3.1.1 کے لئے بار گراف دیا گیا ہو۔

تو آپ اس سے کیا نتیجہ اخذ کریں گے؟

کتنے طلباء نے گریڈ 'A' حاصل کیا؟

کس گریڈ کے طلباء سب سے زیادہ ہیں؟

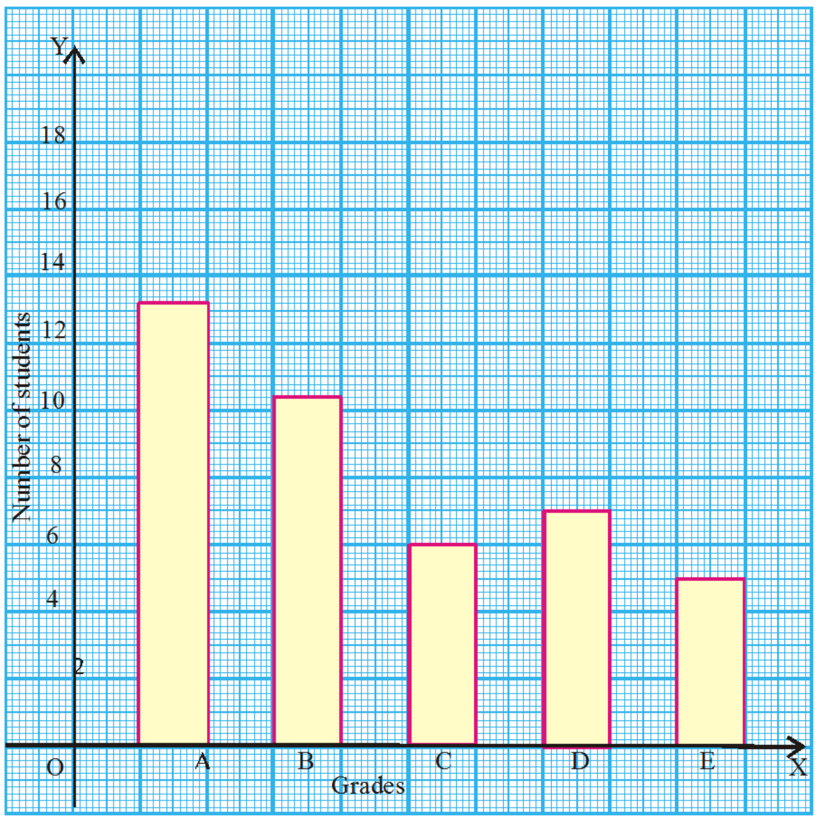
کس گریڈ کے طلباء سب سے کم ہیں؟

(i) جن طلباء نے A گریڈ حاصل کیا اُن کی تعداد زیادہ ہے۔

(ii) جن طلباء نے E گریڈ حاصل کیا اُن کی تعداد کم ہے۔

سوالات یا تقابل کرتے ہوئے آپ متعلقہ معطیات سے اخذ کرتے ہیں کہ

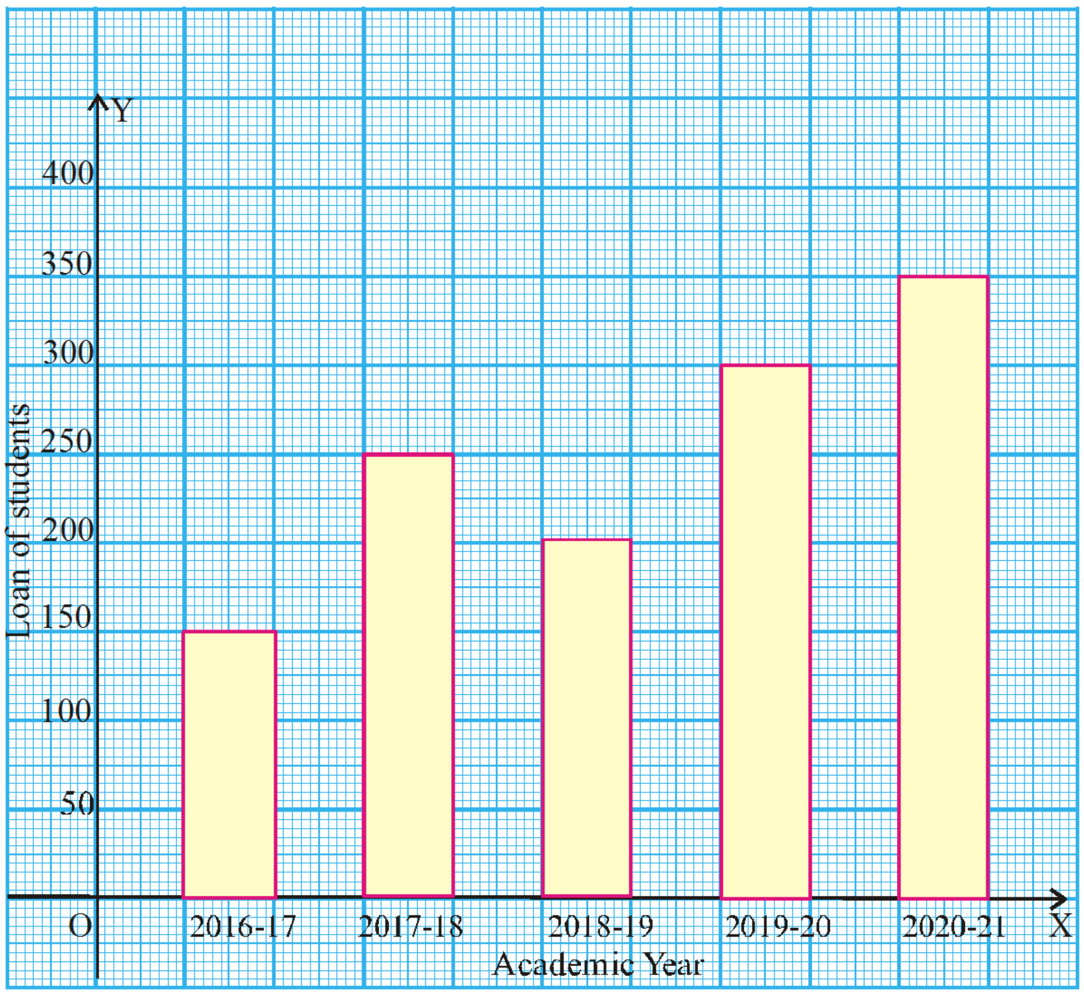
- روزہ زندگی میں بار گراف کا استعمال ماہر معاشیات' بزنس مین' زرعی میدان' سرکاری محکمہ جات' طبی میدان وغیرہ میں ہوتا ہے۔



- دوسری شکل کے بار گراف کو شکل 7.1.3.1.2 میں بتلایا گیا ہے جہاں پر طلباء کے گریڈس کو Y۔محور پر ظاہر کیا گیا ہے اور متعلقہ تعدد (طلباء کی تعداد) کو X۔محور پر ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال

تعلیمی سال 17-2016 سے 21-2020 کے دوران ZPHS تھائی کنڈہ میں طلباء کی تعداد کو ذیل کی شکل 7.3.1 میں بتلایا گیا ہے۔ بار گراف دیکھ کر ذیل کے سوالات کے جوابات دیجئے۔



(i) بار گراف میں کیا معلومات دی گئی ہیں؟

(ii) کس سال اسکول میں طلباء کی تعداد 250 ہے۔

(iii) کس سال اسکول میں طلباء کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟

(iv) صادق ہے یا کاذب بتائیے؟

سال 2017-18 میں طلباء کی بھرتی سال 2016-17 کے دوگنی ہوئی۔

حل:

(i) بارگراف تعلیمی سال 2016-17 سے 2020-21 ZPHS تھائی کنڈہ میں طلباء کی بھرتی کو ظاہر کرتا ہے۔

(ii) سال 2017-18 میں' اسکول میں طلباء کی تعداد 250 تھی۔

(iii) سال 2020-21 میں' اسکول طلباء کی تعداد سب سے زیادہ تھی۔

(iv) سال 2017-18 میں طلباء کی بھرتی کی تعداد 250

سال 2016-17 میں طلباء کی بھرتی کی تعداد 150

لہٰذا دیا گیا بیان کاذب ہے۔

بارگراف کی تشکیل

ذیل کا معطیاتی جدول سال 2016 سے سال 2020 کے دوران مولوگو منڈل میں ایک بینک کی طرف سے کسانوں کو دی گئی قرض کی رقم (روپے کوڑوں میں) ظاہر کرتا ہے ان معطیات کے لئے بارگراف تشکیل دیجئے۔

سال	2016	2017	2018	2019	2020
قرض (کروڑ روپیوں میں)	12	10	11	10	7

حل:

بارگراف کی تشکیل

مرحلہ-1: ایک ترسیمی کاغذ لے کر دو عمودی خطوط کھینچیے۔

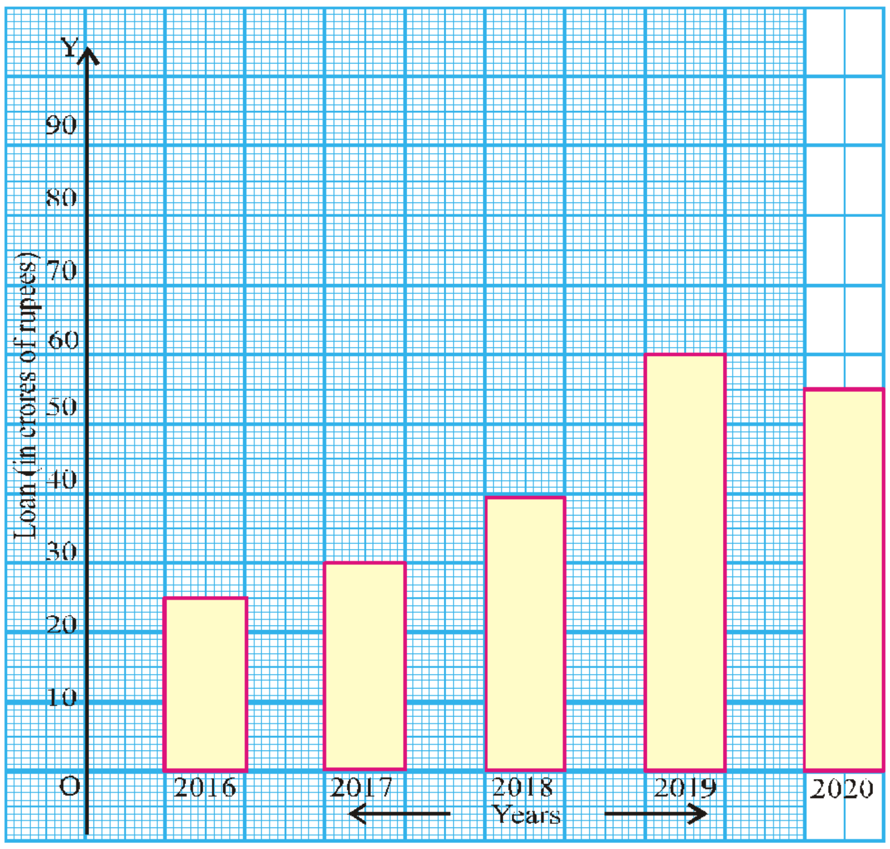
افقی خط کو X۔محور اور انتصابی خط کو Y۔محور کا نام دیجئے۔

مرحلہ-2: X۔محور پر ''سال'' اور Y۔محور پر اس کے مطابق قرض (روپے کروڑوں میں) کو ظاہر کیجئے۔

مرحلہ-3: X۔محور پر مساوی چوڑائی والے باران کے درمیان مساوی فاصلہ (جگہ کی مناسب سے) کا تعین کیجئے۔

مرحلہ-4: مختلف سالوں میں 'بار' کے طول کو محسوب کیجئے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

$216 : \frac{1}{10} \times 25 =$ 2.5 اکائیاں



2017 : $\frac{1}{10} \times 30 =$ 3 اکائیاں

2018 : $\frac{1}{10} \times 40 =$ 4 اکائیاں

2018 : $\frac{1}{10} \times 60 =$ 6 اکائیاں

2020 : $\frac{1}{10} \times 55 =$ 5.5 اکائیاں

مساوی چوڑائی اور مرحلہ 4: میں حاصل ہونے والے طول کے پانچ بار تشکیل دیجیے۔ X۔ محور پر ان کے متعلقہ سال کی مساوی فاصلہ رکھتے ہوئے نشاندہی کیجیے جیسا کہ گراف میں بتلایا گیا ہے۔

قرض (روپے کروڑوں میں) کا بار گراف جس کو بینک نے سال 2016 سے 2020 کے دوران جاری کی۔

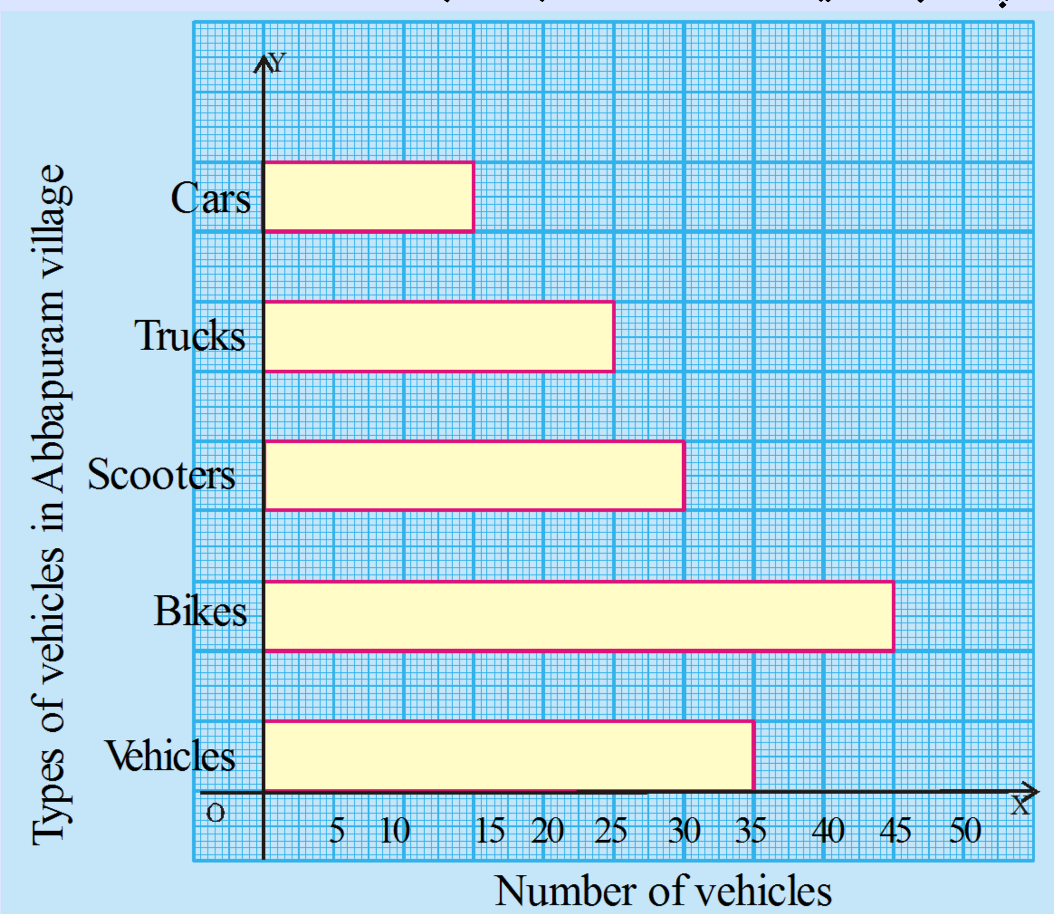
آپ کی ترقی جانچ کیجیے۔

1. (i) افقی یا انتصابی مساوی چوڑائی والے ______ کے استعمال سے معطیات کا اظہار بار گراف کہلاتا ہے۔

(ii) بار گراف میں ''باروں'' کو ______ فاصلہ رکھتے ہوئے تشکیل دیا جاتا ہے۔

(iii) ایک بار گراف میں مستطیل کا طول اس کے متعلقہ تعدد کے ______ ہوتا ہے۔

2. ذیل کے بار گراف میں مولوگو ضلع کے ابا پورم گاؤں میں گاڑیوں کی تعداد کی معطیات کو بتلایا گیا ہے۔
مندرجہ بالا گراف پر غور کیجیے اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیجیے۔



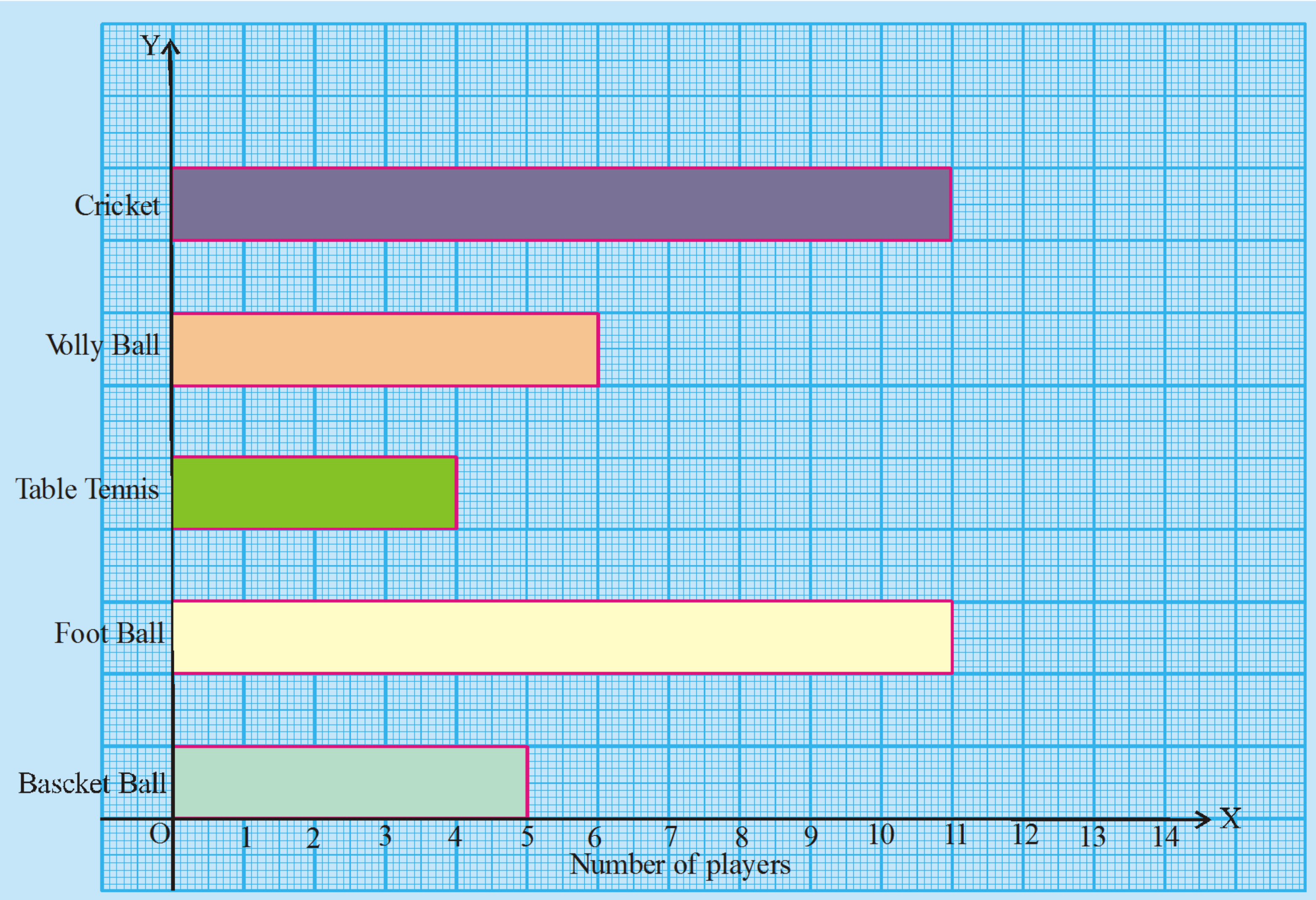
(i) گاؤں میں کتنے سوئر بائیں ہیں؟

(ii) کس قسم کی گاڑیاں کم تعداد میں ہیں؟

(iii) گاؤں میں کتنی موٹر بائیکس اور کتنی اسکوٹرس ہیں؟

(iv) آٹوز کی تعداد کار کی تعداد سے کتنی زیادہ ہے؟

.3 ذیل میں دیئے گئے بار گراف میں 5 مختلف کھیلوں میں کھلاڑیوں کی تعداد کو دکھلایا گیا ہے۔



بار گراف کا مشاہدہ کیجئے اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیجئے۔

(i) والی بال ٹیم میں کھلاڑیوں کی تعداد کتنی ہے؟

(ii) کن کھیلوں میں سب سے زیادہ کھلاڑیوں نے حصہ لیا؟

(iii) کس کھیل میں صرف 4 کھلاڑیوں نے حصہ لیا؟

(iv) کن کن کھیلوں میں کھلاڑیوں کی تعداد مساوی ہے؟

7.3.3 ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلعی

- گروہی تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار
- ہم پہلے ہی دی گئی معلومات کو بار گراف میں ظاہر کرنا سیکھ چکے ہیں۔
اب ہم مسلسل گروہی تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار سیکھیں گے۔

اب ہم دیئے گئے گروہی تعددی تقسیم کے لئے ہسٹوگرام کا مشاہدہ کریں گے۔

وقفہ جماعت (نشانات)	0-10	11-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
تعدد	3	5	9	10	15	19	13	11	9	6

(i) ترسیم میں کتنے ''بار'' ہیں؟

(ii) کس تناسب میں ''بار'' کا طول کھینچا گیا؟

(iii) تمام ''بار'' کی چوڑائیاں مساوی ہیں اس کی کیا وجہ ہے؟

(iv) کیا ہم اس ترسیم کے کوئی دو ''بار'' کو باہم تبدیل کر سکتے ہیں؟

- اس ترمیم سے آپ سمجھ سکتے ہیں کہ:

(i) 10 ''بار'' 10 وقفہ جماعتوں کے تعدد کا اظہار کر رہے ہیں۔

(ii) بار کے طول متعلقہ تعدد سے تناسب میں ہیں۔

(iii) بار کی چوڑائیاں مساوی ہیں کیوں کہ چوڑائی وقفہ جماعت وقفہ جماعتوں کی لمبائی مساوی ہے۔

(iv) اس طرح یہ مسلسل سلسلہ کو ظاہر کرتا ہے (خارجی وقفہ کے ساتھ)

مسلسل تعددی تقسیم کے ہسٹوگرام کو ترسیم کے ذریعہ ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

''ہسٹوگرام ایک عمودی بار گراف ہے جو ''بار'' کے درمیان فاصلہ نہیں رکھتا۔''

- گروہی معطیات کی جماعتیں X۔محور پر لی جاتی ہیں اور (ہر محور پر مناسب پیمانہ لے کر)
- ہر جماعت کے لئے ایک مستطیل تشکیل دیا جاتا ہے جس کا قاعدہ وقفہ جماعت کو اور طول متعلقہ تعدد کو ظاہر کرتا ہے۔ مستطیلات کا رقبہ ان کے متعلقہ جماعتوں کے تعدد کے تناسب میں ہوتا ہے۔

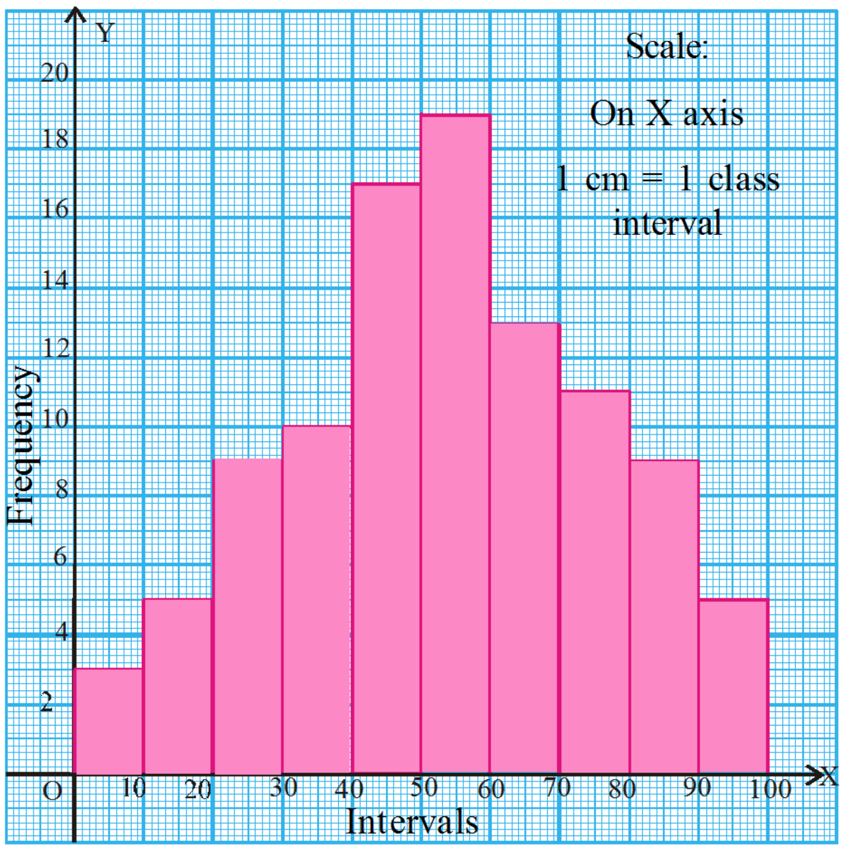
ہسٹوگرام کی تشکیل

- اب ہم مثال کے ذریعہ اس کی ترسیم سیکھیں گے۔
- ایک ٹی۔وی چیانل یہ جاننا چاہتا ہے کہ کس عمر کے گروپ کے لوگ ان کا چیانل دیکھ رہے ہیں۔

وہ سروے کرواتا ہے۔ہسٹوگرام کی شکل میں ان معطیات کا اظہار کیجئے۔

جماعت کی سرحدیں	تعدد(دیکھنے والوں کی تعداد)	وقفہ جماعت (عمر کا گروپ)
10.5-20.5	10	11-20
20.5-30.5	15	21-30
30.5-40.5	25	31-40
40.5-50.5	30	41-50
50.5-60.5	20	51-60
60.5-70.5	5	61-70

مرحلہ-1: اگر وقفہ جماعتیں کی داخلی (حدیں) دی جائیں تو انھیں خارجی شکل (سرحدوں) میں بدلنا ہوگا۔ کیوں کہ ہسٹوگرام کی تشکیل متصلہ مستطیلات پر مبنی ہوتی ہے۔



مرحلہ-2: مناسب پیمانہ کا انتخاب کرکے X۔محور پر وقفہ جماعت کی نشان دہی کریں۔

مرحلہ-3: مناسب پیمانہ لے کر Y ۔محور پر تعدد کی نشاندہی کریں۔

(ضروری نہیں کہ دونوں محوروں پر پیمانہ مساوی ہو)

مرحلہ-4: وقفہ جماعت کو قاعدہ اور متعلقہ تعدد کو طول مانتے ہوئے مستطیلات تشکیل دیں۔

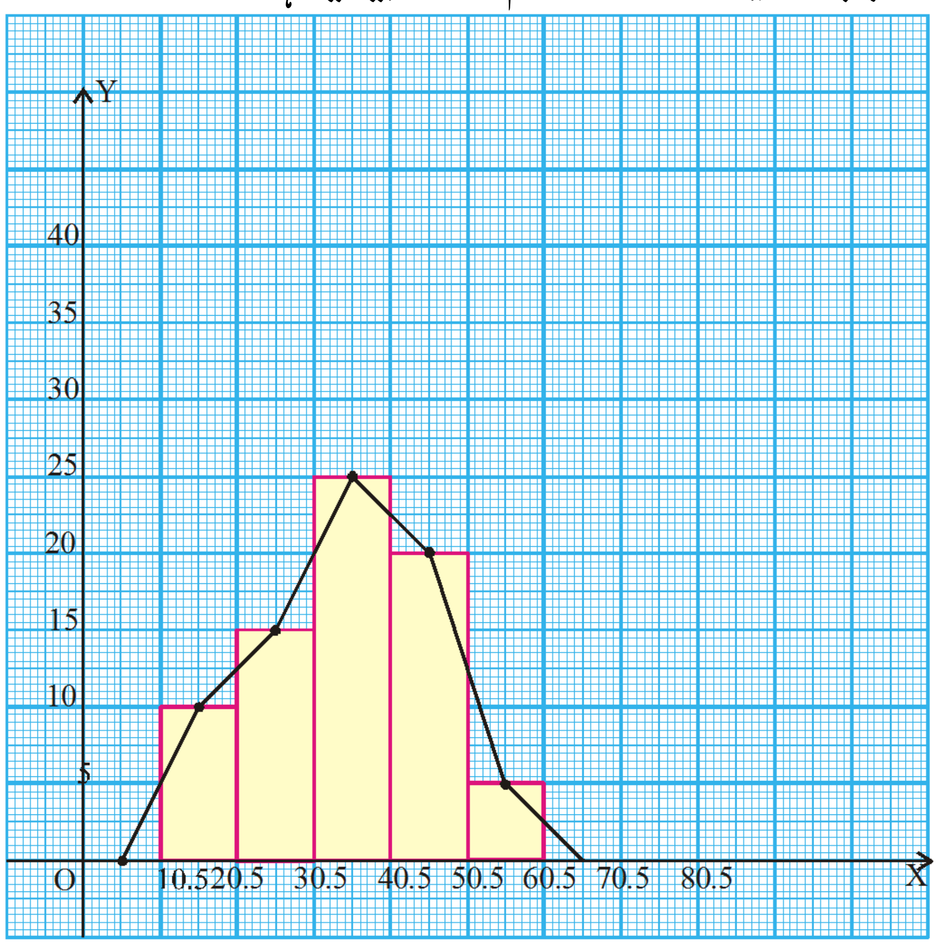
7.3.4 تعددی کثیر ضلعی

- تعددی کثیر ضلعی، گروہ/ معیاری معطیات اور اس کی متعلقہ تعدد کو ظاہر کرنے کا ایک دوسرا ترسیمی طریق ہے۔

دوبارہ ہم اوپر والی مثال ہی لیتے ہیں۔سروے پر پتہ چلتا ہے کہ کس عمر کے گروپ کے لوگ ان کے ٹی وی چیانل کا مشاہدہ کرتے ہیں۔

تعداد (ناظرین کی تعداد)	جماعت کی سرحدیں (خارجی)	وقفہ جماعت (عمر کا گروپ)
10	10.5-20.5	11 - 20
15	20.5-30.5	21 - 30
25	30.5 - 40.5	31 - 40
30	40.5 - 50.5	41 - 50
20	50.5 - 60.5	51 - 60
5	60.5 - 70.5	61 - 70

- فرض کیجئے کہ مندرجہ بالا معطیات کو متصلہ ہسٹوگرام سے ظاہر کیا گیا ہے۔



اب ہم متصلہ وسطی نقاط کو خطی قطعوں سے جوڑ دیتے ہیں اور ان وسطی نقاط کو B، C، D، E، F اور G کا نام دیتے ہیں۔ ان نقاط کو جوڑنے پر ہمیں شکل BCDEFG حاصل ہوتی ہے۔

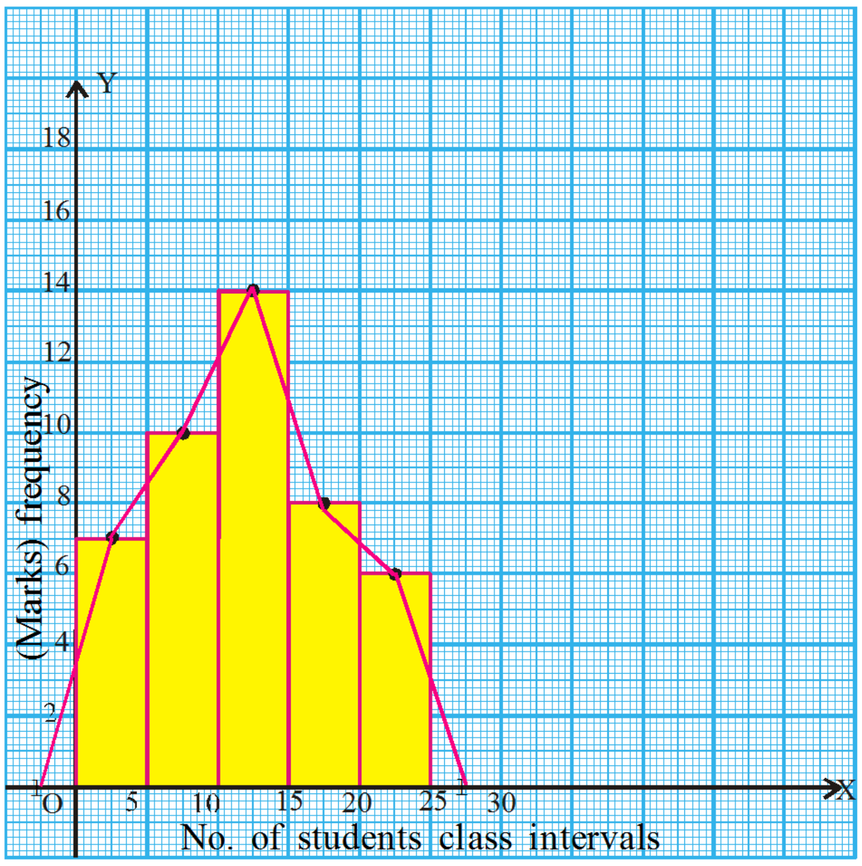
کثیر ضلعی کو مکمل کرنے کیلئے ہم فرض کر لیتے ہیں کہ جماعت 10.5 - 20.5 سے پہلے ایک اور وقفہ جماعت ہے جس کا تعدد ''صفر'' ہے اور اسی طرح ایک کے بعد دیگر 5, 5-7, 60 تک ان کے وسطی نقاط بالترتیب A سے G تک ہوں گے۔ ان نقاط کو خطی قطعوں سے جوڑنے پر حاصل ہونے والی شکل تعددی کثیر ضلعی ABCDEFG ہوگی۔

بہر حال سب سے چھوٹی جماعت سے پہلے کوئی جماعت وجود نہیں رکھتی اور نہ ہی سب سے بڑی جماعت کے بعد۔ صفر تعدد لے کر وقفہ جماعتوں کو جمع کرنے سے ہم تعددی کثیر ضلعی کا رقبہ معلوم کرنے کے قابل ہوں گے جیسا کہ ہسٹوگرام کا رقبہ ہوتا ہے۔

تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل

ایک ٹسٹ میں ایک جماعت کے 45 طلباء کے (25 کے منجملہ) حاصل کردہ نشانات دیئے گئے ہیں۔ اس تعددی تقسیمی جدول سے متعلقہ ایک تعددی کثیر ضلعی تشکیل دیجئے

وقفہ جماعت	تعدد	وسطی نقطہ
0 - 5	7	2.5
5 - 10	10	7.5
10 - 15	14	12.5
15 - 20	8	17.5
20 - 25	6	22.5
جملہ	45	



بناوٹ کے اقدام

مرحلہ-1: دی گئی معطیات کے ہر وقفہ جماعت کا وسطی نقطہ محسوب کرنا۔

مرحلہ-2: اس معطیات کے لئے ہسٹوگرام تشکیل دینا اور مستطیلات کے سرے پر وسطی نقطہ کا نشان لگانا (اس مثال میں وسطی نقاط بالترتیب B، C، D، E، F ہیں)

مرحلہ-3: تمام وسطی نقاط کو خطی قطعوں سے جوڑنا۔

مرحلہ-4: پہلی جماعت سے پہلے اور آخری جماعت کے بعد ایک ایک اور وقفہ جماعت کو فرض کرتے ہوئے اس کے بھی وسطی نقاط (H اور A) کو محسوب کرتے ہوئے X۔محور پر نشان لگائیں۔ یہاں چوں کہ پہلی جماعت 0-5 ہے، اس سے پہلے کی جماعت معلوم کرنے کے لئے X۔محور کو بائیں جانب بڑھائیں اور خیالی وقفہ جماعت 0-5 کا وسطی نقطہ معلوم کریں۔

مرحلہ-5: پہلے اختتامی نقطہ B سے A کو ملایئے اور آخری اختتامی نقطہ F کو G سے ملایئے جو تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل کو مکمل کرتا ہے۔

نوٹ: تعددی کثیر ضلعی کو ہسٹو گرام بنائے بغیر علیحدہ طور پر تشکیل دیا جا سکتا ہے۔

- ایک گروہی تعددی تقسیم کے لئے: ہسٹو گرام بنائے بغیر تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل:

ہم ایک مثال لیتے ہیں:

ایک ڈیاگنوسٹک سنٹر 50 ذیابطیس مریضوں (عمر کے لحاظ سے) کے خون کے نمونوں کی جانچ کرتا ہے۔ حاصل ہونے والی معلومات کو ذیل کے جدول میں دیا گیا ہے

عمر (سال)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
مریضوں کی تعداد	5	10	13	18	4

- اب ہم ہسٹو گرام بنائے بغیر تعددی کثیر ضلعی تشکیل دیں گے۔

مرحلہ-1: مختلف جماعتوں کے جماعتی نشانات معلوم کرنا۔

مرحلہ-2: پیمانہ کا انتخاب کرنا۔

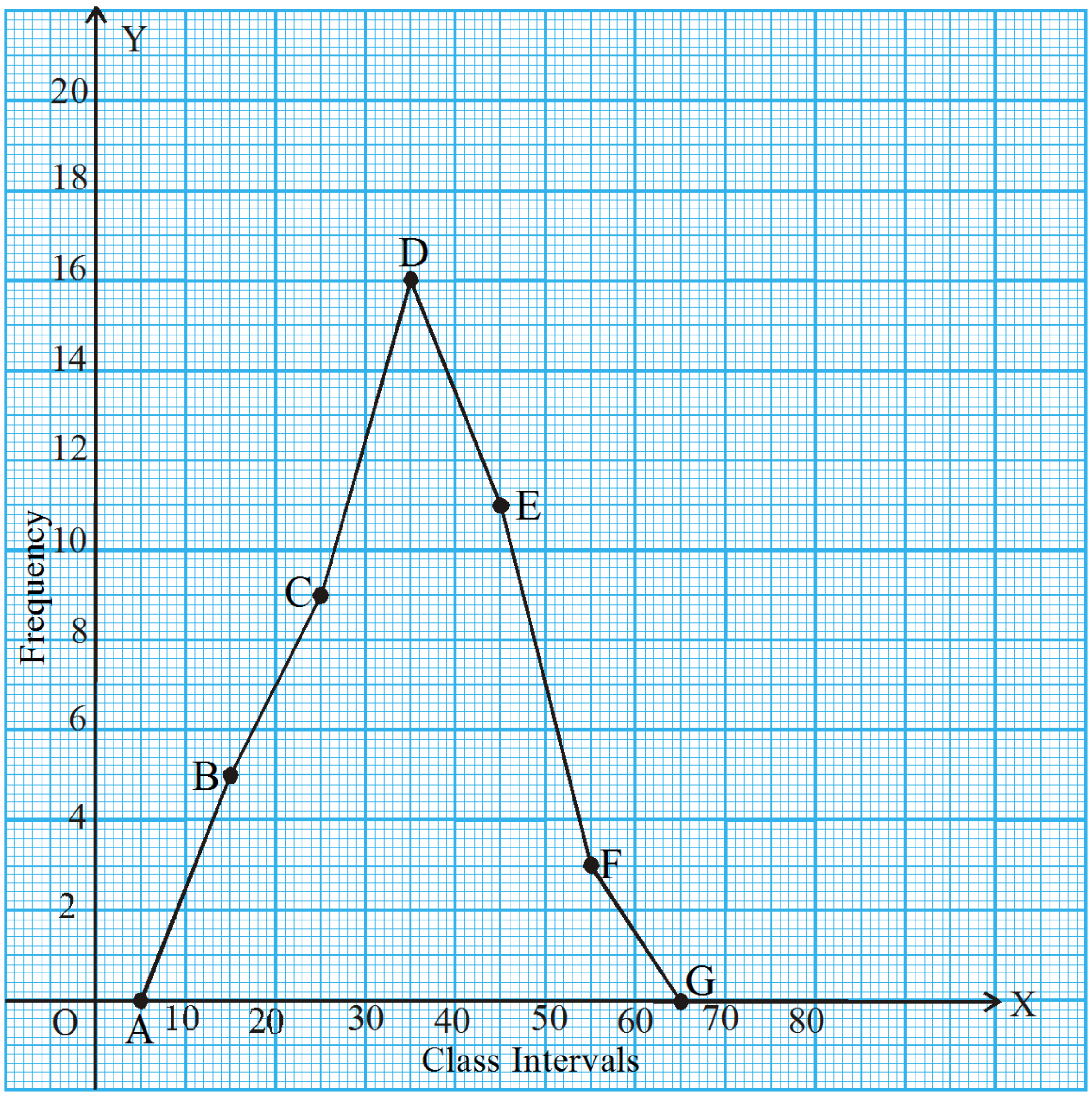
X۔محور پر   وقفہ جماعت 1 = 1 سمر

Y۔محور پر   اکائیاں 2 = 1 سمر

مرحلہ-3: ایک جماعت میں اگر 'x' جماعتی نشان کو اور 'f' متعلقہ تعدد کو ظاہر کرتا ہے تب ترسیم پر نقطہ (x, f) کی نشاندہی کریں۔

مرحلہ-4: خطی قطعوں کے ذریعہ متصلہ نقاط کو ملایا جائے۔

وقفہ جماعت (عمر)	مریضوں کی تعداد (f)	جماعتی نشان (x)	نقاط (x, f)
0-10	0	5	(5, 0)
10-20	5	15	(15, 5)
20-30	9	25	(25, 9)
30-40	16	35	(35, 16)
40-50	11	45	(45, 11)
50-60	3	55	(55, 3)
60-70	0	65	(65, 0)



اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. خالی جگہوں کو پُر کیجئے۔

(i) ہسٹوگرام میں عام طور پر وقفہ جماعت کو __________ پر لیا جاتا ہے۔

(ii) ہسٹوگرام میں عام طور پر جماعت کے متعلقہ تعداد کو __________ پر لیا جاتا ہے۔

(iii) ہسٹوگرام میں، مستطیلات کے رقبے متعلقہ جماعتوں کی __________ کے تناسب میں ہوتے ہیں۔

(iv) ہسٹوگرام __________ کا ترسیمی اظہار ہے۔

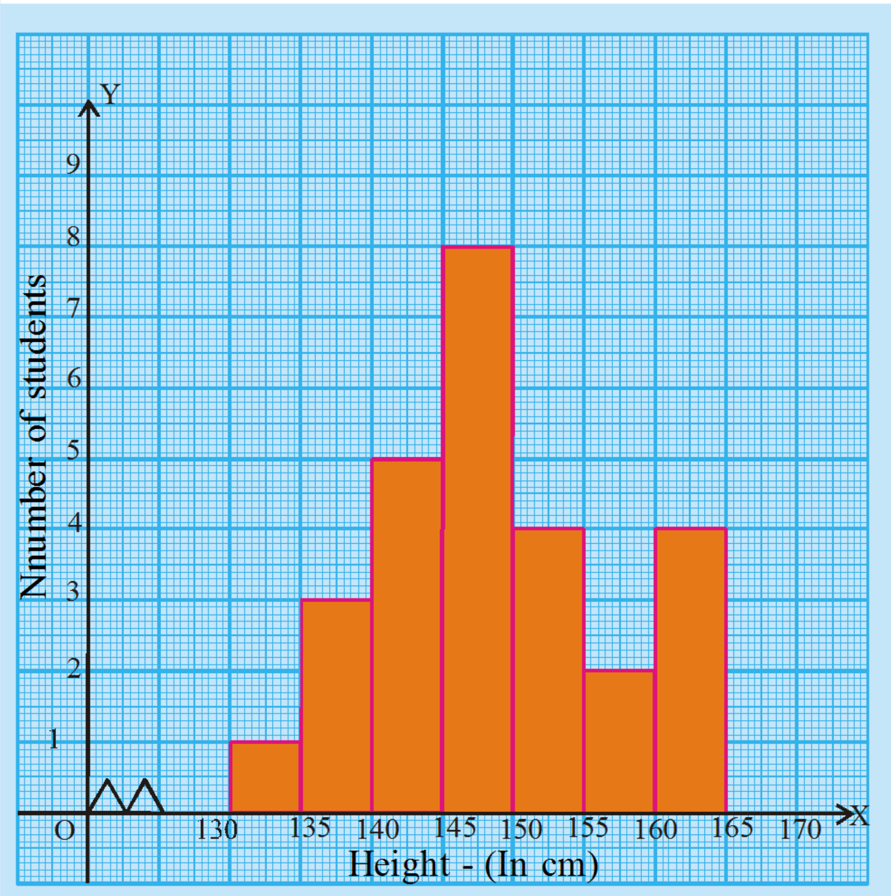
2. ذیل میں مختلف ذہنی استعداد (IQ) رکھنے والے 45 طلباء کی درجہ بندی کی گئی ہے۔ ان معطیات کے لئے ہسٹوگرام تشکیل دیجئے۔

IQ	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
طلباء کی تعداد	2	5	6	15	12	9	5

3. ذیل میں 250 مزدوروں کی یومیہ اجرت دی گئی ہے ان معطیات کے لئے ہسٹوگرام تشکیل دیجئے۔

یومیہ اجرت	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
مزدوروں کی تعداد	30	42	50	55	45	28

4. ذیل کے ہسٹوگرام کا مشاہدہ کیجئے اور دیئے گئے سوالات کے جوابات دیجئے۔
(i) ہسٹوگرام میں کیا معلومات دی گئی ہیں؟
(ii) کس جماعت میں طلباء کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟
(iii) کتنے طلباء کا قد 145 سمر سے زیادہ ہے؟
(iv) کتنے طلباء کا قد 140 سمر سے کم ہے؟



7.3.5 آجیو منحنی (Ogive Curve)

(یکجائی تعددی تقسیم کی منحنی)

ترسیم جو گروہی تعددی تقسیم اور متعلقہ وقفہ جماعتوں کی نچلی/اوپری سرحدوں سے ظاہر کی جاتی ہے ''یکجائی تعددی منحنی'' یا ''آجیو منحنی'' کہلاتی ہے۔

اصطلاح ''آجیو'' (Ogive) کا تلفظ ''اوجیو'' 'Ojeev' ہے۔ جو کہ لاطینی لفظ 'Ogee' سے ماخوذ ہے۔ 'Ogee' کی شکل دراصل ایک محدب منحنی و مقعر منحنی پر مشتمل ہے جس کے عمودی کنارے حرف 'S' کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔ 14 ویں اور 15 ویں صدی عیسوی میں گوتھک انداز کی یہ طرز تعمیر دراصل Ogee شکل کی ہے ایک مثال/خصوصیت ہے۔

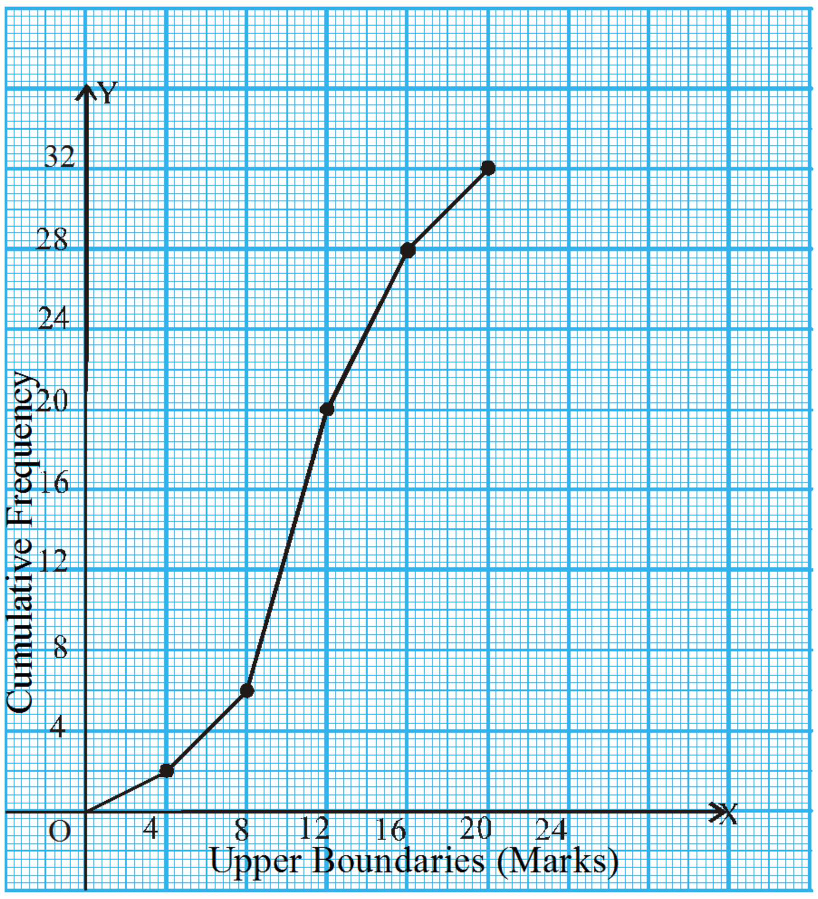
'آجیو منحنیاں' اعداد کے کسی تواتر کے مشاہدات سے نتائج کے اخذ کرنے اور ان کے جامع فہم میں کار آمد ہوتی ہیں۔

کم تر یکجائی تعددی منحنی

ایک جماعت تشکیل جانچ کے ٹسٹ میں 32 طلباء کے محصلہ نشانات (20 میں سے) ذیل کے جدول میں درج کئے گئے ہیں:

نشانات	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
طلباء کی تعداد	2	5	12	10	3

وقفہ جماعت (نشانات)	طلباء کی تعداد (f)	اوپری سرحد (UB)	کم تر یکجائی تعدد	نقاط (L, B, f)
0-4	2	4	2	(4, 2)
4-8	5	8	7	(8, 7)
8-12	12	12	19	(0, 19)
12-16	10	16	29	(16, 29)
16-20	3	20	32	(20, 32)



مرحلہ-1: اگر تعددی تقسیم میں داخلی جماعتیں دی گئی ہوں تو اُسے خارجی جماعتوں میں بدلنا ہوگا۔

مرحلہ-2: کم تر یکجائی تعددی جدول کی تشکیل کرنی ہوگی۔

مرحلہ-3: X۔محور پر وقفہ جماعت کی اوپری سرحدیں اور Y۔محور پر متعلقہ یکجائی تعدد لیا جاتا ہے۔

پیمانہ کا انتخاب :

X۔محور پر وقفہ جماعت 1 = 1 سم

Y۔محور پر 4 اکائیاں = 1 سم

مرحلہ-4: حاصل ہونے والے نقاط کی ترسیمی کاغذ پر نشاندہی کیجیے۔

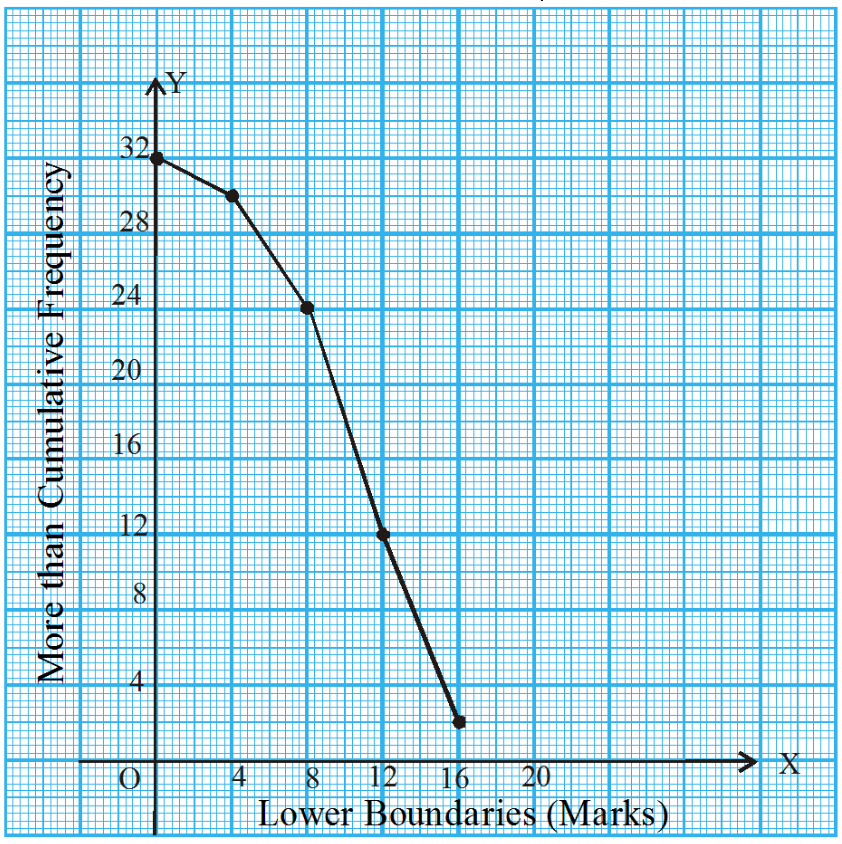
مرحلہ-5: ان نقاط کو پٹری کا استعمال نہ کرتے ہوئے ہاتھ سے ملائیں جو کہ مطلوبہ آجیو منحنی ہوگی۔

زیادہ تر یکجائی تعددی منحنی

مندرجہ بالا مثال کے لئے ہم زیادہ تر یکجائی تعددی منحنی تشکیل دیں گے

وقفہ جماعت (نشانات)	طلباء کی تعداد (f)	نچلی سرحد (LB)	زیادہ تر یکجائی تعدد	نقاط (زیادہ تر یکجائی تعدد)
0-4	2	0	32	(0, 32)
4-8	5	4	30	(4, 30)
8-12	12	8	25	(8, 25)
12-16	10	12	13	(12, 13)
16-20	3	16	3	(16, 3)

- اسطرح ہم X۔محور پر نچلی سرحد میں اور Y۔محور پر زیادہ تر یکجائی تعدد لیتے ہوئے ’’زیادہ تر یکجائی تعددی منحنی‘‘ تشکیل دے سکتے ہیں۔



اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. ذیل میں ایک فیکٹری کے 50 مزدوروں کی یومیہ اجرت

یومیہ اجرت (روپیوں میں)	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
مزدوروں کی تعداد	5	7	14	8	6	10

اس تعددی ہٹاؤ کو کم تر یکجائی تعددی تقسیم میں لا کر آجیو Ogive منحنی بنائیے۔

2. ذیل کے تعددی ہٹاؤ میں 70 طلباء کا قد دیا گیا ہے۔ کم تر اور زیادہ تر یکجائی تعددی تقسیم کا جدول تیار کیجئے اور ان کے آجیو منحنیاں بنائیے۔

قد (سمر میں)	118-126	127-135	135-144	145-153	154-162	163-172	172-180
طلباء کی تعداد	5	7	14	8	6	10	3

مشق

1. ذیل کے معطیات کے لئے بار گراف تشکیل دیجئے۔

وزن (کلوگرام میں)	32	34	36	38	40	42
طلباء کی تعداد	4	8	3	12	6	5

2. ذیل میں ایک علاقہ کے 50 صارفین کا برقی کا ماہانہ صرفہ تقسیمی جدول میں دیا گیا ہے۔ بار گراف اور ہسٹوگرام علیحدہ علیحدہ تشکیل دیجئے۔

ماہانہ صرفہ	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
صارفین کی تعداد	8	10	18	7	7

3. ذیل میں مختلف ذہنی استعداد (IQ) رکھنے والے 50 طلباء کا تقسیمی جدول دیا گیا ہے۔ ان معطیات کے لئے ہسٹوگرام تشکیل دیجئے۔

ذہنی استعداد (IQ)	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
صارفین کی تعداد	3	6	7	11	9	9	5

4. ذیل کے جدول میں دہم جماعت کے 540 طلباء کے سالانہ امتحان میں محصلہ نشانات (600 میں سے) دیئے گئے ہیں' ان معطیات کے لئے ہسٹوگرام تشکیل دیجئے۔

نشانات	360	400	440	480	520	560
طلباء کی تعداد	90	115	130	85	70	50

5. ذیل کے جدول میں ایک فیکٹری کے 250 مزدوروں کی ہفتہ واری اجرت دی گئی ہے۔ ان معطیات کے لئے ایک ہی گراف پر ہسٹوگرام اور تعددی کثیر ضلع تشکیل دیجئے۔

ہفتہ واری اجرت	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
مزدوروں کی تعداد	30	40	52	55	45	28

6. ذیل کے معطیات کے لئے ''آجیو منحنیاں'' (Ogive curves) بنائیے۔

جماعت	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
تعدد	12	10	11	10	7	6	4	5

7. ذیل میں 175 طلباء کے نشانات کا تعددی ہٹاؤ دیا گیا ہے ان معطیات کے لئے ''کم تر'' اور ''زیادہ تر'' یکجائی تعددی منحنی تشکیل دیجئے۔ (آجیو منحنیاں)

نشانات (C.I)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
طلباء کی تعداد	4	6	8	12	24	6	48	31	24

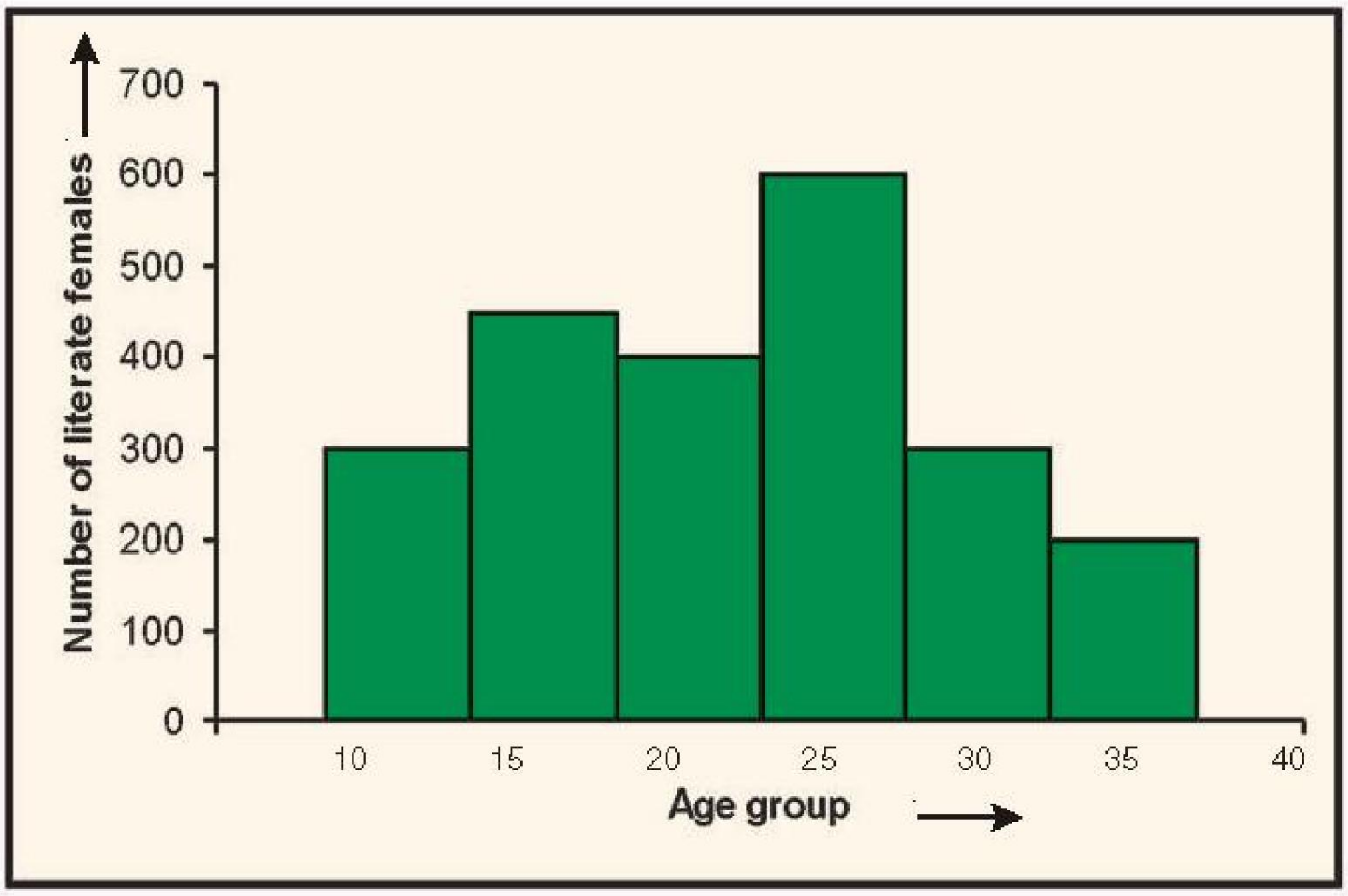
ایک کراس ورڈ (Cross - word) کے مقابلہ میں 50 شرکاء کا لیا گیا وقت (منٹ میں) ریکارڈ کیا گیا۔ جو ذیل میں جدول میں بتلایا گیا ہے۔

مقابلہ کے شرکاء کی تعداد	وقت (منٹ میں)
8	20-25
10	25-30
9	30-35
12	35-40
6	40-45
5	45-50

(i) ان معطیات کے لئے ہسٹو گرام تشکیل دیجئے۔

(ii) تعددی کثیر ضلعی کی تشکیل کیجئے۔

9. ذیل کے ہسٹو گرام میں ایک شہر کے 10 تا 40 سال عمر والے گروپ کی خواندہ خواتین کی تعداد بتلائی گئی ہے:
مندرجہ بالا ہسٹو گرام کا مشاہدہ کیجئے اور ذیل کے سوالات کے جوابات دیجئے:



(i) شہر میں 10 تا 40 سال عمر والے گروپ کی خواندہ خواتین کی جملہ تعداد کیا ہے؟
(ii) کس عمر گروپ میں خواندہ خواتین کی تعداد سب سے زیادہ ہے؟
(iii) وہ کون سے دو عمر کے گروپس میں جس میں خوانداہ خواتین کی تعداد مساوی ہے؟

ہم نے کیا سیکھا؟

- بار گراف معطیات کا وہ ترسیمی اظہار ہے جس میں تمام بار (مستطیلات) مساوی چوڑائی اور مساوی فاصلہ رکھتے ہیں۔ بار گراف میں تمام بار (مستطیلات) کو افقی یا مجموعی طور پر تشکیل دیا جاسکتا ہے۔
- ہسٹوگرام ایک گروہی تعددی تقسیم کا ترسیمی اظہار ہے جس کی جماعتیں مسلسل ہوتی ہیں۔ ہسٹوگرام میں مستطیلات کا رقبہ متعلقہ تعدد کے متناسب ہوتا ہے۔
- تعددی کثیر ضلعی کی ترسیم، ہسٹو گرام کے متصلہ مستطیلات کے سروں پر وسطی نقاط کا نشان لگا کر انھیں جوڑنے سے حاصل ہوتی ہے۔ پہلی جماعت سے پہلے اور آخری جماعت کے بعد ایک ایک وقفہ جماعت کا اضافہ کر کے ان کے وسطی نقاط کو پہلے اور آخری مستطیل کے وسطی نقاط سے ملایا جاتا ہے۔
- ایک تعددی کثیر ضلعی کو ہسٹوگرام کی تشکیل کے بغیر جماعت کی وسطی قدر اور متعلقہ تعدد لے کر علیحدہ طور پر بھی تشکیل دیا جاسکتا ہے۔
- ترسیم جو ایک گروہی تعددی تقسیم کا یکجائی تعدد اور اس کی متعلقہ جماعتوں کی نچلی/اوپری سرحد لے کر بنائی جاتی ہے۔ ''یکجائی تعددی منحنی'' یا ''آجیو منحنی'' کہلاتی ہے۔

سبق
7.4

قیاسیات کا تعارف
Introduction to Probability

7.4.0 اکتسابی مقاصد

اس سبق کے پڑھنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے:

- ایک وقوعہ کے قیاس کے نظریہ کو سمجھیں گے باہمی غیر مشمولی وقوعوں (Mutually exclusive events) کی مثالوں سے تشریح کریں گے۔
- واحد وقوع پر روزمرہ زندگی سے متعلق سادہ سوالات حل کریں گے۔
- تکمیلی وقوع کے نظریہ کی مثالوں سے تشریح کریں گے۔ ناممکن اور یقینی وقوعے کی مثالیں دیں گے۔
- روزمرہ زندگی سے متعلق مسائل کا حل یا دوسرے مضامین کے ساتھ قیاسیات کو مربوط کرنا۔

7.4.1 تعریف

ہم اپنی روزمرہ زندگی میں کبھی کبھار ایسے جملے استعمال کرتے ہیں:

(i) آج بارش ہوسکتی ہے۔

(ii) امکان ہے کہ ٹرین آنے میں دیر ہو۔

(iii) بینک سے کوئی غلطی ہو اس کا امکان نہیں ہے۔

(iv) توقع ہے کہ اگلے سپٹمبر تک دال کی قیمتیں کم ہوں گی۔

(v) مجھے یقین نہیں ہے کہ وہ دوڑ جیتے گا وغیرہ۔

الفاظ جیسے **''ہوسکتا ہے''، ''امکان ہے''، ''امکان نہیں ہے''، ''توقع ہے''، ''توقع نہیں ہے''** بتاتے ہیں کہ جس بارے میں ہم بات کر رہے ہیں اس کا ہونا **غیر یقینی** ہے۔ یہ ہو بھی سکتا ہے اور نہیں بھی۔

اس باب میں ہم اس طرح کے سوالات کا مطالعہ کریں گے۔ اس کے علاوہ 'غالباً'، 'امکان ہے'، ''ممکن ہے'' جیسے الفاظ پر بھی گفتگو کریں گے۔ ہم حتی الامکان ہونے والے یا یقینی واقعات اور غیر یقینی اور ناممکن واقعات سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ کسی واقعہ کے امکان سے اور اس کے نتیجہ کی یکسانیت سے متعلق بھی گفتگو کریں گے۔ اس باب میں ہم کسی واقعہ

کے امکانی معیار کے متعلق سیکھنے کی کوشش کریں گے۔

مقداری تعین کے تعدادی اظہار کے مطالعہ کو ''قیاسیات'' کہتے ہیں۔

قیاسیاتی نظریہ ریاضی کی وہ شاخ ہے جو ہمیں یہ سکھاتی ہے کہ غیر یقینی صورتحال پیش نے پر اس کا سامنا کس طرح کیا جائے۔ سب سے پہلے قیاسیات کے نظریہ کو 16 ویں صدی میں پیش کیا گیا اس کا اصل ''قسمت پر مبنی کھیل'' (Games of choice) سے وجود میں آیا جیسے پانسہ کا پھینکنا اور موجودہ دور میں قیاسیات کے استعمال کی وسعت کئی میدانوں جیسے حیاتیات، معاشیات، جینیات، طبیعات، سماجیات وغیرہ میں پھیل چکی ہے۔

دنیا کے مختلف حصوں سے تعلق رکھنے والے لوگوں نے اس قسم کے تجربات کئے جس میں متعدد بار سکہ اچھال کر چت یا پٹ کی تعداد کو ریکارڈ کیا گیا۔

مثال کے طور پر فرانسیسی فلسفی کامٹے ڈی بفن (Comte De Buffon) نے ایک سکہ کو 4040 دفعہ اچھال کر 2048 چت حاصل کئے اس صورت میں چت حاصل ہونے کا تجرباتی قیاس $\frac{2048}{4040}$ تھا یعنی 0.507۔

برطانیہ کا جے۔ای۔کیرچ (J.E. Kerrich) ایک سکہ کو 10,000 مرتبہ اچھال کر 5067 چت حاصل کئے۔ اس صورت میں چت حاصل ہونے کا تجرباتی قیاس $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ تھا۔ انگریزی ماہر شماریات کارل پیرسن (Karl Person) نے زیادہ وقت دے کر سکہ کو 24000 مرتبہ اچھالا اور اس نے 12012 چت حاصل کئے۔ اس طرح اس کا چت حاصل کرنے کا تجرباتی قیاس 0.5005 تھا۔

فرض کیجئے کہ آپ سے پوچھا گیا چت حاصل کرنے کا تجرباتی قیاس کیا ہے؟ تجربہ کی تکمیل کے بعد کیا کہا جائے؟ ایک ملین مرتبہ؟ 10 ملین مرتبہ؟ آپ غور کریں گے کہ جیسے جیسے سکہ اچھالنے کی تعداد میں اضافہ ہوگا چت یا پٹ کا تجرباتی قیاس 0.5 یا $\frac{1}{2}$ کے قریب ترین ہوسکتا ہے جو کہ چت حاصل کرنے کا نظریاتی قیاس ہے۔

7.4.2 بِلامنصوبہ تجربہ اور اس سے حاصل ہونے والے نتائج
(Random Experiment and its Outcomes)

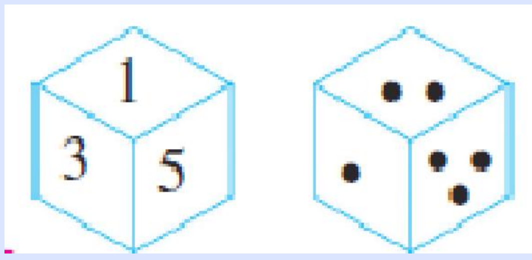
ذیل کی صورتوں پر غور کیجئے:

(1) جب سکہ اچھالا جاتا ہے تو ہم پہلے سے جانتے ہیں کہ سکہ بغیر کسی رکاوٹ کے نیچے گرے گا اور اس کے ممکنہ نتائج دو ہی ہوسکتے ہیں یا چت(Heads) یا تو پٹ(Tails)۔

قیاسی نتیجہ کے لئے جب ہم کوئی سکہ لیتے ہیں تو ہمیں یہ یقین ہوتا ہے کہ اس کی تشاکلی ہیئت کے سبب جس رخ پر بھی یہ گرے گا وہ رخ ہی اصل نتیجہ ہوگا۔

(2) جب پانسہ ڈالا جاتا ہے تو ہم پہلے ہی سے جانتے ہیں کہ پانسہ زمین کی جانب گرے گا اور اس کے اوپری رخ پر چھ میں سے صرف ایک ہی عدد حاصل ہوگا 1، 2، 3، 4، 5 یا 6

پانسہ 6رخوں والا ایک متوازن مکعب ہوتا ہے۔ جس کے ہر رخ پر ایک عدد لکھا ہوتا ہے (1 سے 6) بعض دفعہ اعداد کی جگہ نقاط کا بھی استعمال کیا جاتا ہے۔



(3) جب ہم زمین میں 4 بیج بوتے ہیں اور تین دن بعد مشاہدہ کرتے ہیں کہ کتنے بیج اُگے ہیں۔ اُگنے والے بیجوں کی تعداد 0،1 ، 2، 3 یا 4 ہوسکتی ہے۔

اوپر کی صورتوں میں 'سکہ اچھالنا' 'پانسہ ڈالنا' 'بیج بونا اور اس کا مشاہدہ کرنا کہ کتنے بیج اُگے ہیں' یہ ''بلامنصوبہ تجربہ'' کی مثالیں ہیں۔ پہلی صورت میں دو ممکنہ نتائج ہوتے ہیں۔ چت اور پٹ۔ دوسری صورت میں ممکنہ نتائج 1، 2، 3، 4، 5، 6 ہوتے ہیں۔ تیسری صورت میں ممکنہ نتائج 0، 1 ، 2، 3، 4 ہوتے ہیں۔

بلامنصوبہ تجربہ ہمیشہ ایک سے زائد ممکنہ نتائج رکھتا ہے۔ جب تجربہ کیا جاتا ہے تو تمام ممکنہ نتائج میں سے صرف ایک نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ مزید یہ کہ تجربہ سے پہلے ہم کوئی خاص نتیجہ کا اندازہ نہیں کرسکتے۔

تجربہ کو متعدد بار دہرانے سے مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

بلامنصوبہ تجربوں کی مزید کچھ اور مثالیں:

(i) بکسے میں سے جو ایک ہی قسم اور مختلف رنگوں کی گیندوں پر مشتمل ہے' بلا منصوبہ ایک گیند نکالنا۔

(ii) ایک بکسے میں 100 کارڈز ہیں جس پر 1 سے 100 تک اعداد لکھے ہیں' اس بکسے میں سے بلا منصوبہ ایک کارڈ نکالنا۔ اس سبق میں اب ہم بلا منصوبہ تجربات پر مبنی سوالات حل کریں گے۔

اپنی ترقی کی جانچ کیجیے

1. حسب ذیل میں سے کون سا بلا منصوبہ تجربہ ہے؟
   (i) فرض کیجیے کہ آپ اندازہ لگا کر ایک ہمہ انتخابی سوال کا جواب دیتے ہیں۔ چار جواب A,B,C,D میں سے صرف ایک جواب صحیح ہے۔
   (ii) ایک بستہ میں علیحدہ علیحدہ پرچیوں پر 1 تا 20 طبعی اعداد لکھے ہیں (ایک پرچی پر ایک عدد) دیکھے بغیر بستہ سے ایک پرچی کا نکالنا۔
   (iii) کسی بلندی سے پتھر کا پھینکنا۔
   (iv) احمد اور اکرم نے اعداد 1,2,3 میں سے علیحدہ علیحدہ طور پر ایک ایک عدد کا انتخاب کیا۔
2. اوپر دیئے گئے سوال نمبر (1) کے بلا منصوبہ تجربات کے ممکنہ نتائج کیا ہیں؟

7.4.3 مساوی امکانی (Equally Likely Outcomes)

جب ہم سکہ اچھالتے ہیں یا پانسہ ڈالتے ہیں تو ہمیں یہ یقین ہوتا ہے کہ اس کی تشاکلی ہیئت کے سبب جس رخ پر بھی یہ گرے گا وہ رخ ہی اصل نتیجہ ہوگا۔ یعنی سکہ اچھالنے یا پانسہ ڈالنے پر تمام ممکنہ نتائج کے امکانات مساوی ہوتے ہیں۔ ہم اس تجربہ کو بار بار دہراتے ہوئے مشاہدات کو اکٹھا کریں گے اور اکٹھا کئے ہوئے معلومات کے استعمال سے ایک خاص سعی کے وقوع پذیر ہونے کا قیاس کریں گے۔ مثال کے طور پر ایک سکہ کو بار بار اچھالتے ہوئے ہم چت (H) اور (T) کے متعدد مرتبہ وقوع پذیر ہونے کا مشاہدہ کریں گے۔ سکہ کو مزید اور چند مرتبہ اچھالتے ہوئے نتیجہ نوٹ کریں گے جو کہ نیچے کے جدول میں دیا گیا ہے۔

پٹ وقوع ہونے کی تعداد	چت وقوع ہونے کی تعداد	سکہ اچھالنے کی تعداد
28	22	50
34	26	60
40	30	70
44	36	80
48	42	90
52	**48**	**100**

اوپر کے جدول میں ہم یہ قیاس کرسکتے ہیں کہ جتنی زیادہ مرتبہ سکہ کو اچھالا جائے گا اتنی ہی مرتبہ چت (H) اور پٹ (T) کے ظاہر ہونے کے امکانات زیادہ ہوں گے۔ اس طرح یہ عمل ایک پانسہ کے ذریعہ بھی کیا جاسکتا ہے اس کو متعدد بار لڑھکائیے اور مشاہدہ کیجیے۔

نتائج کا جدول ذیل میں دیا گیا ہے۔

پانسہ کولڑھکانے کے عمل کی تعداد No. of times die rolled	ہر نتیجہ کے وقت پانسہ کی تعداد (یعنی اوپری رخ پر ظاہر ہونے والا عدد) Number of times each outcomes occurred (i.e. each number appearing on the top face)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
50	9	5	12	9	8	7
100	17	19	19	16	13	16
150	28	24	28	23	21	26
200	34	34	36	30	32	34
250	40	40	43	40	43	44
300	48	47	49	52	52	52

اوپر کے جدول سے ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ'ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل ''جتنی زیادہ مرتبہ دہرایا جاتا ہے'' چھ ممکنہ نتائج میں سے ہر ایک کے وقوع ہونے کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے۔

اوپر کے دو تجربات کی بنا پر ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ تجربہ کے مختلف نتائج مساوی امکانی ہوتے ہیں۔یعنی ہر نتیجہ وقوع ہونے کا مساوی امکان ہوتا ہے۔

7.4.4 بار بار دہرایا جانے والا تجربہ اور وقوع (Trials and Events)

اوپر کے تجربات میں سکہ کا ایک مرتبہ اچھالنا یا پانسہ کا ایک مرتبہ لڑھکانا ''تجربہ'' یا ''بلا منصوبہ تجربہ'' ہوتا ہے۔

ایک پانسہ کو لڑھکانے کے عمل پر غور کیجئے۔

اوپری رخ پر 5 سے بڑا عدد وقوع ہونے کے کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں؟ صرف ایک (جو 6 ہے)

پانسہ کے اوپری رخ پر کتنے جفت عدد ظاہر ہونے کے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔تین نتائج ہو سکتے ہیں (2، 4 اور 6)

اس طرح ایک مخصوص نتیجہ یا مخصوص نتائج کا مجموعہ ایک واقعہ ہوتا ہے۔

اوپر کے تجربہ میں ایک عدد جو 5 سے بڑا ہو اور ایک جفت عدد کا اوپری رخ پر ظاہر ہونا دو ایک وقوع ہوں گے' غور کیجئے کہ وقوع کا صرف ایک واحد نتیجہ ضروری نہیں' لیکن ایک بلا منصوبہ تجربہ کا ہر نتیجہ ایک وقوع ہوتا ہے۔

قیاسات سے امکانی وقوع کی ہم ربطی (Linking the chance to Probability)

غور کیجئے کہ ہم صرف ایک مرتبہ سکہ کو اچھالتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں' اس تجربہ میں صرف دو ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔ چت (Head) یا پٹ (Tail) اور یہ دونوں نتائج بھی مساوی امکانات رکھتے ہیں کہ ایک چت کے وقوع ہونے کا کتنا موقع / امکان ہے؟

یہ دو ممکنہ نتائج میں سے ایک $\frac{1}{2}$ کا وقوع ہونا ہے۔

دوسرے الفاظ میں ایک سکہ اچھالنے پر ایک چت (H) وقوع ہونے کا امکان $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔

جس کا اظہار اس طرح کیا جاتا ہے

$$\mathbf{P(H) = \frac{1}{2} = 0.5} \text{ یا } \mathbf{50\%}$$

ایک پٹ (T) کے واقع ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

اب ہم ایک پانسہ کو لڑھکانے کا عمل کرتے ہوئے تجربہ کرتے ہیں کہ اس میں کتنے ممکنہ نتائج ہو سکتے ہیں۔

اس تجربہ میں 6 مساوی ممکنہ نتائج 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 ہیں۔

ایک پانسہ کے اوپری رخ پر ایک طاق عدد کے ظاہر ہونے کا امکان کیا ہوگا؟

جملہ 6 ممکنہ نتائج میں سے تین موافق نتائج 1، 3 یا 5 ہو سکتے ہیں جو کہ $\frac{1}{3}$ یا $\frac{1}{2}$ ہے۔

وقوعہ 'A' کا قیاس معلوم کرنے کے لئے ہم یہ ضابطہ لکھ سکتے ہیں۔

$$P(A) = \frac{\text{وقوعہ 'A' کے لئے موافق ممکنہ نتائج کی تعداد}}{\text{جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

7.4.5 قیاسیات۔ نظریاتی طرز رسائی (Probability - A Theoretical Approach)

آیئے ہم ذیل کی صورتحال کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ فرض کیجئے کہ ایک سکہ کو بلا منصوبہ اچھالا گیا۔ جب ہم کسی سکہ کی بات کرتے ہیں تو یہ تصور کرتے ہیں کہ نتیجہ بالکل صحیح ہوگا کیونکہ سکہ کی تشاکلی ہیئت کے سبب یہ ممکن نہیں کہ وہ نیچے کی جانب گرتے وقت ایک جانب کے بجائے دوسری جانب گر سکے۔ (یعنی سکہ چت یا پٹ کسی بھی سمت گر سکتا ہے) سکہ کی اسی خاصیت کی بنا ہم سکہ کو ''غیر جانبدار'' 'Unbiased' کہتے ہیں۔ اس کو اچھے اسلوب میں ''بلا منصوبہ اچھال'' 'Random Toss' کہا جاتا ہے یعنی ہم مانتے ہیں کہ سکہ نیچے کی جانب گرتے وقت کسی رکاوٹ کے بغیر آسانی سے نیچے گرنی کی گنجائش رکھتا ہے۔ اس طرح کے تجربات بلا منصوبہ تجربات ہوتے ہیں۔

اس بات کے حوالے سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس طرح کے نتائج جیسے چت اور پٹ مساوی امکانی ہوتے ہیں۔ایک تجربہ کے نتائج تب مساوی امکانی (Equally likely) ہوتے ہیں جب قیاس کے وقوع ہونے کا مساوی امکان ہو۔

اس باب میں' قیاسیات کے بنیادی قسم کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام تجربات مساوی امکانی نتائج پرمبنی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ ایک وقوعہ E کا تجرباتی قیاس P(E) ہوتا ہے۔

$$P(E) = \frac{\text{E کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے ممکنہ تمام نتائج کی تعداد}}$$

اسی طرح وقوعہ T کے نظریاتی قیاس کو (جس کو معیاری قیاس بھی کہا جاتا ہے) P(T) لکھا جاتا ہے۔جس کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے۔

$$P(T) = \frac{\text{T کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

جب ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ تجربہ کے نتائج مساوی اکانی ہیں تو ہم عام طور پر اس نظریاتی قیاسیات کو عام قیاسیات ہی تصور کرتے ہیں۔

باہمی غیر مشمولی وقوعے (Mutually Exclusive Events)

اگر سکہ کو اچھالا جائے تب چت یا پٹ حاصل ہوتا ہے لیکن دونوں نہیں' اسی طرح ہم کسی ہائی اسکول کے طالب علم کا انتخاب کریں تو' اس کا تعلق ششم' ہفتم' ہشتم' نہم یا دہم میں سے کسی ایک جماعت سے تعلق ہوتا نہ کہ کسی دو یا دو سے زائد جماعتوں سے۔ان دونوں مثالوں سے یہ بات واضح ہوجاتی ہے کہ کسی ایک واقعہ کا وقوع ہونا دوسرے واقعہ کے وقوع ہونے کو روکتا ہے۔ایسے وقوعے ہی **باہمی غیر مشمولی وقوعے (Mutually Exclusive Events)** کہلاتے ہیں۔

دو یا دو سے زائد وقوعے کے کسی تجربہ میں کسی ایک واقعہ کا ہونا' دوسرے وقوعہ کا نہ ہونا باہمی غیر مشمولی وقوعہ کہلاتا ہے۔اس سے متعلق مزید معلوم ہم اس باب کے اواخر میں حاصل کریں گے۔

قیاس معلوم کرنا (Finding Probability)

ہم قیاس کس طرح معلوم کریں گے جب کہ وقوعے مساوی امکانی ہو؟ سکہ اچھالنے کے عمل کو ہم ایک واقعہ تصور کرتے ہیں جو تجربات سے متعلق ہے۔ جہاں پر مساویانہ امکانات پائے جاتے ہیں۔قیاسیات کے موضوع پر مزید معلومات حاصل کرنے کے لئے ضروری ہے کہ ہر ایک وقوعہ کے ممکنہ دو نتائج پر غور کیا جائے۔ان نتائج کو **تمثیلی قیاسیات یا Sample Space** کہا جائے گا۔کہا جاسکتا ہے کہ پانسہ ایک دفعہ اچھالنے کا **تمثیلی قیاس (Sample space)** {H, T} ہے۔اسی طرح سرخ' نیلے' زرد اور سفید کنچوں کے بستہ سے کسی ایک کنچہ کو نکالنے کا قیاس {R, B, Y, W} ہوگا۔اب بتایئے کہ پانسہ کو پھینکنے پر تمثیلی قیاس (Sample space) کیا ہوگا؟

اب ہم یکساں مواقع رکھنے والے باہمی غیر مشمولی قیاسیات سے متعلق معلومات حاصل کریں گے۔

مثال-1: ایک سکہ کے ایک مرتبہ اچھالنے پر (i) چت حاصل ہونے کا قیاس کیجئے۔(ii) پٹ حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

حل: فرض کیجئے کہ چت (H) حاصل کرنے کے لئے E ایک وقوعہ ہے۔

اس تجربہ کے ممکنہ نتائج ہیں: چت (H) اور پٹ (T)

ممکنہ نتائج کی تعداد = 2

E کے موافق نتائج کی تعداد = 1 (جو کہ صرف H ہوگا)

اس لئے E کا قیاس = P(H) = P(E)

$$P(E) = \frac{\text{E کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

اسی طرح پٹ (T) حاصل ہونے کا وقوعہ 'F' ہو تو

$P(F) = \frac{1}{2}$ (اندازہ کیجئے۔کیوں؟)

مثال-2: پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر: i) عدد 3 حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟ ii) 3 کے سوا دوسرا عدد حاصل ہونے کے قیاس کا تعین کیجئے۔

حل: (i) فرض کیجئے کہ عدد 3 حاصل ہونے کے لئے E ایک وقوعہ ہے۔

تجربہ کے ممکنہ نتائج یہ ہیں: 1, 2, 3, 4, 5, 6

حاصل ہونے والے ممکنہ نتائج کی تعداد = 6

E کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد E = 1 (جو کہ 3 ہے)

اس لئے $P(E) = P(3) = \frac{1}{6}$

(ii) فرض کیجئے کہ 3 کے سوا دوسرا عدد حاصل ہونے کے لئے وقوعہ F ہے۔یعنی کہ 1, 2, 3, 4, 5, 6

ممکنہ حاصل ہونے والے نتائج ہیں : 1, 2, 3, 4, 5, 6

ممکنہ حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد = 6

F کے موافق حاصل ہونے والے نتائج کی تعداد (جو کہ 1, 2, 4, 5, 6)

اس لئے $P(F) = \frac{5}{6}$

غور کیجئے کہ مثال (1) میں F وقوعہ ہے جب کہ مثال (2) میں E وقوعہ نہیں ہے۔

مثال-3: ایک تھیلی میں ایک سرخ، ایک نیلی اور ایک زرد گیند ہے جو کہ یکساں جسامت رکھتی ہیں۔مریم دیکھے بغیر تھیلی سے ایک گیند نکالتی ہے۔قیاس معلوم کیجئے (i) زرد گیند نکلنے پر۔(ii) سرخ گیند نکلنے پر۔(iii) نیلی گیند نکلنے پر۔

حل: مریم دیکھے بغیر تھیلی سے ایک گیند نکالتی ہے۔اس لئے یہ مساوی امکان ہے کہ وہ تین میں سے کوئی بھی ایک گیند نکالے گی۔

فرض کیجئے کہ زرد گیند نکلنے پر وقوعہ Y نیلی گیند کے لئے وقوعہ B اور سرخ گیند کے لئے وقوعہ R لیتے ہیں۔

اب، جملہ ممکنہ نتائج کی تعداد = 3

(i) وقوعہ Y کے موافق نتائج کی تعداد = 1

اس لئے $P(Y) = \frac{1}{3}$

اس طرح $P(R) = \frac{1}{3}$

اور $P(B) = \frac{1}{3}$

مثال-4: 100 کارڈس پر مشتمل ایک تھیلی سے بلا منصوبہ ایک کارڈ نکالا گیا (1 سے 100) قیاس معلوم کیجئے۔ (i) جب کہ وہ جفت عدد ہو۔ (ii) جب کہ وہ طاق عدد ہو۔

حل: (i) فرض کیجئے کہ وقوعہ E ہے اور اگر نکالا گیا کارڈ جفت ہو تب

جفت عدد کے کارڈس کی تعداد $= 50 \; \{2, 4, 6, ... 100\}$

اس لئے E کے لئے موافق نتائج کی تعداد E = 50 ہوگی۔

جملہ کارڈس کی تعداد = 100

لہٰذا $P(E) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

(ii) فرض کیجئے کہ نکالا گیا کارڈ طاق عدد ہو تب طاق عدد کے کارڈس کی تعداد $= 50 \; \{1, 3, 5, ... 99\}$

اس لئے $P(E) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

اب ہم غور کرتے ہیں:

1. کسی تجربہ میں ایک ہی نتیجہ رکھنے والے وقوع کو بنیادی وقوعہ کہتے ہیں۔مثال (1) اور (2) میں E اور F دونوں بنیادی وقوعے ہیں۔اسی طرح مثال (3) میں تمام تین وقوعے B, Y اور R بنیادی وقوعے ہیں۔

2. مثال (1) میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

مثال (2) میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $P(Y) + P(R) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$

اگر ہم تمام بنیادی وقوعوں کے قیاس کو جمع کرتے ہیں تو ہمیں 1 حاصل ہوتا ہے۔

تکمیلی وقوعے اور قیاسیات (Complementary Events and Probability)

$P(E) + P() = 1$

یہاں F کا مطلب '' E نہیں'' ہے،

E اور $\bar{E}) = 1$ تکمیلی وقوعے کہلاتے ہیں۔

$P(E) + P(\text{not } \bar{E}) = 1$

یعنی $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

عام طور پر وقوعہ E کے لئے یہ صادق ہوتا ہے۔

$P(E) = 1 - P(\bar{E})$

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. ایک مرتبہ پانسہ ڈالنے پر عدد 5 حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔
2. پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر
   (i) ہندسہ 7 حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟ (ii) 5 یا اس سے چھوٹے ہندسے سے حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟
3. 0 اور 20 کے درمیان ایک صحیح عدد کا انتخاب کیا گیا۔ منتخب کئے گئے صحیح عدد کے لئے مفرد ہونے کا قیاس کیا ہے؟
4. ایک تھیلی تین سرخ اور تین سفید گیندوں پر مشتمل ہے۔ دیکھے بغیر تھیلی سے ایک گیند نکالی گئی۔
   (i) سرخ گیند حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟ (ii) سفید گیند حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

ناممکن اور یقینی وقوعے (Impossible and Certain Events)

فرض کیجئے کہ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ہندسے لکھا ہوا' پانسہ ڈالا گیا ہے۔

(i) پانسہ ڈالنے پر ہندسہ 7 حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟ ایک پانسہ میں 1, 2, 3, 4, 5, 6 یعنی 6 ہی رخ ہوتے ہیں جن پر ہندسے لکھے ہوئے ہیں۔ اس پانسہ کا 7 واں رخ یا 7 لکھا ہوا رخ نہیں ہوسکتا لہٰذا 7 حاصل ہونا 'ناممکن' ہے۔ یعنی ایسے نتائج کی تعداد صفر ہوتی ہے۔ لہٰذا پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر وقوعہ 7 حاصل ہونا ناممکن ہے۔

$$P(E) = \frac{0}{6} = 0 \quad (\text{7 حاصل ہونا})$$

چونکہ 7 کا وقوع ناممکن ہے اس وقوعہ کو ناممکن وقوعہ کہتے ہیں۔

(ii) پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا اس سے چھوٹے ہندسے سے حاصل ہونے کا قیاس کیا ہے؟ کتنے ممکنہ وقوع ہوں گے؟ چونکہ پانسے کے ایک رخ پر 6 اور باقی رخوں پر 6 سے چھوٹے ہندسے یعنی 1, 2, 3, 4, 5 کی نشاندہی کی گئی ہے' لہٰذا پانسہ ایک مرتبہ ڈالنے پر 6 یا 6 سے چھوٹے ہندسوں کا وقوع ممکن ہے یعنی موافق اور جملہ وقوع کی تعداد مساوی ہے۔

$$P(E) = \frac{0}{6} = 0$$

یہاں ایک وقوعہ کا قیاس یقینی طور پر 1 ہے۔اس کو **یقینی وقوعہ** کہتے ہیں۔

نوٹ: قیاس P(E) کی تعریف سے ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ (وقوعہ E کے موافق نتائج کی تعداد) ہمیشہ نسب نما (تمام ممکنہ نتائج کی تعداد) سے کم یا مساوی ہوتی ہے۔اس لئے $0 \leq P(E) \leq 1$

اپنی ترقی کی جانچ کیجئے

1. پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر مندرجہ ذیل کے حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

   (a) ایک جفت عدد (b) ایک طاق عدد (c) ایک مفرد عدد

2. اوپر کے سوال میں 1 = P (ایک طاق عدد) + P (ایک جفت عدد) ہونے کی تصدیق کیجئے۔

3. پانسہ کو ایک مرتبہ ڈالنے پر ذیل کے حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

   (i) عدد جو 4 سے چھوٹا ہے۔ (ii) عدد جو 4 سے بڑا یا مساوی ہے۔

   (iii) غیر مفرد در مرکب عدد۔ (iv) عدد جو مرکب نہیں ہے۔

4. اگر $P(E) = 0.88$ تب ”نہیں E“ کا قیاس کیا ہوگا۔

5. اگر $P(E) = 0$ تب P (نہیں E) معلوم کیجئے۔

6. ایک بکسہ 15 سفید گیندوں اور 10 نیلی گیندوں پر مشتمل ہے۔بکسہ سے بلا منصوبہ ایک گیند نکالی گئی۔ذیل کے حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

   (i) گیند جو نیلے رنگ کی نہ ہو۔ (ii) گیند جو سفید رنگ کی نہ ہو۔

7. ایک تھیلی 3 سرخ 4 سبز اور 2 نیلے رنگ کے کنچوں پر مشتمل ہے۔تھیلی میں سے ایک کنچہ بلا منصوبہ نکالا گیا۔ذیل کے لئے قیاس معلوم کیجئے۔

   (i) سبز نہ ہو (ii) سرخ نہ ہو (iii) نیلی نہ ہو

8. دو یکساں سکوں کو بہ یک وقت ڈالا گیا۔اس کے تمام ممکنہ نتائج لکھئے۔ایک سکہ پر چت (H) اور دوسرے سکہ پر پٹ (T) حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوا؟

9. دو مساوی سکوں کو بیک وقت ڈالا گیا۔دونوں سکوں پر پٹ (T) حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

10. دو پانسوں کو بیک وقت ڈالتے ہوئے اوپری رخوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کو نوٹ کیا گیا۔اس بات کا امکان کیا ہے کہ ان اعداد کا مجموعہ یہ ہے۔

    (i) 7 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 10 (v) 12

مشق

1. ذیل کے کون سے بیانات صادق (T) ہیں اور کون سے کاذب (F)

(a) کسی وقوعہ کا قیاس 1.01 ہوسکتا ہے

(b) اگر $P(E) = 0.08$ تب $P(\bar{E}) = 0.02$

(c) ناممکن وقوعہ کا قیاس 1 ہے

(d) وقوعہ E کے لئے $0, \leq P(E) \leq 1$

(e) $P(\bar{E}) = 1 + P(E)$

2. ایک بکسہ کارڈس پر مشتمل ہے جن پر 100 تا 200 اعداد لکھے ہیں۔ بلامنصوبہ ان میں سے ایک کارڈ نکالنے پر جفت ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

3. دو سکوں کو بیک وقت ڈالا گیا۔ کم از کم ایک چت حاصل ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟ (اشارہ: (چت نہیں) P (کم از کم ایک چت) $= 1 - p$

4. اگر $P(E) = 0.05$ ، E نہیں کا قیاس کیا ہوگا؟

5. ایک تھیلی میں لیموں کی مہک والے چاکلیٹ ہیں۔ احمد نے بلامنصوبہ ایک چاکلیٹ لیا تب

(i) نارنجی مہک والا (ii) لیموں کی مہک رکھنے والے چاکلیٹ کے قیاس کو محسوب کیجئے۔

6. تین طلباء میں دو طلباء کے یوم پیدائش ایک ہی دن واقع نہ ہونے کا قیاس 0.992 ہو تو بتلایئے کہ ایک ہی دن واقع ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟

7. پانسے کو ایک مرتبہ ڈالنے پر ذیل کا ممکنہ قیاس کیا ہوگا؟

(i) مفرد عدد (ii) 2 اور 6 کے درمیان واقع عدد (iii) طاق عدد

8. ایک بکسہ 1 تا 100 اعداد لکھے کارڈس پر مشتمل ہے۔ بلامنصوبہ ایک جفت عدد انتخاب کرنے کا قیاس کیا ہوگا؟

9. دو پانسوں کو بیک وقت ڈالتے ہوئے اوپری رخوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کو نوٹ کیا گیا۔ اس بات کا امکان کیا ہے کہ ان اعداد کا مجموعہ یہ ہو:

(i) 12 سے زیادہ (ii) 12 سے کم

(iii) 11 سے زیادہ (iv) 2 سے زیادہ

.10 ایک تھیلی 15 سرخ اور کچھ سبز گیندوں پر مشتمل ہے۔ اگر سبز گیند نکلنے کا قیاس $\frac{1}{6}$ ہے تو سبز گیندوں کی تعداد کیا ہوگی؟

.11 ایک تھیلی 3 سرخ اور 5 سیاہ گیندوں پر مشتمل ہے۔ بلا منصوبہ تھیلی سے ایک گیند نکالنے پر (i) سرخ ہونے کا (ii) سرخ نہ ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

.12 ایک بکسے میں 5 سرخ، 8 سفید اور 4 سبز کنچے ہیں۔ بلا منصوبہ اگر اس بکسہ سے ایک کنچہ لیا گیا ہو تو قیاس معلوم کیجئے جب کہ کنچہ (i) سرخ ہو (ii) سفید ہو (iii) سبز نہ ہو۔

.13 ایک بچوں کے غلے (Kiddy Bank) میں سو 50 پیسے کے سکے، پچاس ایک روپے کے سکے، بیس 2 روپے کے سکے اور دس 5 روپے کے سکے ہیں۔ اگر غلے کو الٹ دیا جائے تب ہر سکہ کے غالباً مساوی امکانات ہونے کی صورت میں (i) 50 پیسے کے سکے، (ii) 5 روپے کے سکے نہیں کے لئے قیاس محسوب کیجئے۔

.14 20 برقی بلب میں 4 ناقص ہیں۔ بلا منصوبہ ان میں سے ایک بلب نکالا گیا۔ اس بلب کے ناقص ہونے کا قیاس کیا ہوگا؟ فرض کیجئے کہ اگر منتخب کیا ہوا بلب ناقص نہ نکلا ہو تب اس کا قیاس کیا ہوگا؟

.15 ایک بکسہ 90 قرص (Disc) پر مشتمل ہے جن پر 1 تا 90 اعداد لکھے گئے ہیں۔ بلا منصوبہ ان میں ایک قرص کا انتخاب کیا گیا۔ قرص پر ذیل کے اعداد حاصل ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

(i) دو ہندسی عدد (ii) کامل مربع (iii) عدد جو 5 سے قابل تقسیم ہو۔

.16 عاقلہ نے اکوریم (Aquarium) کے لئے دکان سے مچھلی خریدی۔ دوکاندار نے 5 نر اور 8 مادہ مچھلیوں میں سے بلا منصوبہ ایک مچھلی نکالی۔ حاصل ہونے والی مچھلی نر ہونے کا قیاس معلوم کیجئے۔

.17 ایک کھیل میں تیزی سے گھمایا گیا تیر کا نشان (شکل کے مطابق کسی ایک عدد 1,2,3,4,5,6,7 یا 8 پر ٹھہرتا ہے (شکل دیکھئے) اگر تمام اعداد پر ٹھہرنے کے غالباً مساوی وقوعے ہیں تو قیاس محسوب کیجئے، جب کہ تیر کا نشان ذیل کے اعداد پر ٹھہرتا ہے۔

(i) 8 (ii) طاق عدد

(iii) 2 سے بڑا عدد (iv) 9 سے چھوٹا عدد

ہم نے کیا سیکھا؟

- بلا منصوبہ تجربہ ہمیشہ ایک سے زائد ممکنہ نتائج رکھتا ہے اور تجربہ سے پہلے ہم اس کے نتیجہ کا کوئی خاص اندازہ نہیں کر سکتے۔
- تجربہ کے ایک یا ایک سے زائد نتائج سے ایک وقوعہ تشکیل پاتا ہے۔
- تجربہ کا وقوعہ جو صرف ایک نتیجہ رکھتا ہے بنیادی وقوعہ (Elementary Event) کہلاتا ہے۔
- وقوعہ E کے قیاس P(E) کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے

$$P(E) = \frac{\text{E کے موافق نتائج کی تعداد}}{\text{تجربہ کے تمام ممکنہ نتائج کی تعداد}}$$

جب کہ نتائج مساوی امکانی ہو۔

- $0, \leq P(E) \leq 1$
- اگر $P(E) = 0$ ہو تو E ناممکن وقوعہ کہلاتا ہے، اگر $P(E) = 1$ ہو تو E یقینی وقوعہ کہلاتا ہے۔
- ایک تجربہ کے تمام وقوعوں کے قیاس مجموعہ 1 ہوتا ہے۔ $P(E) + P(\bar{E})$ جہاں E اور $\bar{E}$ تکمیلی وقوعے ہیں۔